HARDY-HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Ayşe Gülsüm ERTAŞ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK

Ağustos, 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HARDY- HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Ayşe Gülsüm ERTAŞ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK

Ağustos 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Ayşe Gülsüm ERTAŞ (BAYRAM) tarafından hazırlanan " Hardy-Hilbert Tipli İntegral Eşitsizlikleri Üzerine " adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 19/08/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Başkan : Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM ....
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Üye : Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN ....
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Üye : Doç. Dr. Özkan ÖCALAN ....
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ ....
Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Üye : Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA ....
Düzce Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

19/08/2014

İmza

Ayşe Gülsüm ERTAŞ

ÖZET

Doktora Tezi

HARDY-HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ ÜZERİNE

Ayşe Gülsüm ERTAŞ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez çalışmasında, Hilbert eşitsizliği olarak bilinen,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}dxdy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left\{ \int_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}},$$

tipli Hardy-Hilbert eşitsizliğini ve bu eşitsizliğin farklı tiplerini ele alarak, genişletilmiş formlarını elde ettik. Ilk olarak temel tanım ve teoremler verildi. Daha sonra sırasıyla tezimizin orjinal kısımlarını oluşturan, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerde genelleştirilmiş çekirdek fonksiyonları için Hardy-Hilbert tipli eşitsizlikler verildi ve ispatlandı.

2014, vi+46 sayfa

Anahtar Kelimeler: İntegral eşitsizlikleri, Hardy-Hilbert tipli integral eşitsizlikleri, Riemann zeta fonksiyonu.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON HARDY-HILBERT TYPE INTEGRAL INEQUALITIES

Ayşe Gülsüm ERTAŞ
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM

In this thesis, we consider some inequalities which known as the Hilbert integral inequality,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\, g(y)}{x+y} dx dy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left\{ \int_0^\infty f^p(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty g^q(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

We obtained some extending forms, considering the Hilbert type Hardy-Hilbert inequality and different types of this inequality. First, given the basic definitions and theorems. Then in the third, fourth and fifth parts which consist of the orijinal parts of our thesis, we obtained Hardy-Hilbert type integral inequalities with generalized kernel functions and proved them.

2014, vi+46 pages

Key Words: Integral inequalities, Hardy-Hilbert type integral inequalities, Riemann zeta function.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda çalışmamı sağlayan, bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan ve beni yönlendiren saygıdeğer danışman hocam, sayın Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayşe Gülsüm ERTAŞ
AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
B	Beta fonksiyonu
Γ	Gamma fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Mutlak değeri p inci mertebeden integrallenebilen fonksiyonların cümlesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu öklid uzayı
ζ^*	Riemann zeta fonksiyonu
$\mathbb{R}^+$	$(0,\infty)$ aralığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

1. GİRİŞ

Eşitsizlikler ve eşitsizliklerle ilgili kavramlar için Pisagor teoremi, cebirin temel teoremi ve Fermat'ın son teoremi yeni nesiller için büyük bir miras ve ilham kaynağı teşkil eder. Son zamanlarda, Bekken vd. (1997) tarafından N. Abel'in hikayesini ve matematiğini hatırlatan bir çalışma ele alınmıştır. Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen bütün alanlarında olmakla birlikte diğer fen bilimlerinin uygulamalı alanlarında da önemli bir rol oynamaktadır. Eşitsizlikler ile ilgili temel çalışmalardan birisi Hardy vd. (1952) tarafından "Inequalities" adlı kitapta toplanmıştır. Bu kitap yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konuları geniş çapta ele almaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni ilginç eşitsizlikleri içeren "Inequalities" adlı kitap Beckenbach vd. (1961) tarafından yeniden kaleme alınmıştır. Daha sonra Mitrinović (1970) "Analitic Inequalities" adlı kitap ile o güne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır. Mitrinović vd. (1993) daha genel olan "Classical and New Inequalities in Analysis" adlı kitabı yazmıştır. Pachpatte (2005) tarafından yazılan "Mathematical Inequalities" adlı kitap da eşitsizlikler üzerine yapılan pek çok yayından birisidir.
Bu çalışmadaki amacımız Hardy-Hilbert tipli integral eşitsizlikleri'ni detaylı olarak incelemek ve bazı özel fonksiyonlar için genelleştirmektir. Ele alacağımız integral eşitsizliklerinden ilki analiz ve uygulamalarında önemli bir yere sahip olan Hilbert integral eşitsizliğidir. Bu eşitsizlik için gelişim sıralamasını kısaca şu şekilde ifade edebiliriz.
İlk olarak D.Hilbert tarafından şu şekilde verilmiştir.
$f(x),\ g(x) \geq 0$ için $0 < \int\limits_0^\infty f^2(x)\,dx < \infty,\ 0 < \int\limits_0^\infty g^2(x)\,dx < \infty$ olmak üzere,

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y} dxdy < \pi \left(\int\limits_0^\infty f^2(x)dx. \int\limits_0^\infty g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.1}$$

dir. Buradaki π mümkün olan en iyi sabit çarpandır (Hardy 1925). (1.1) ile ifade edilen eşitsizlik Hardy ve Riesz tarafından
$p > 1,\ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \ f(x), g(x) \geq 0$ ve $0 < \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx < \infty$, $0 < \int\limits_0^\infty g^q(x)\,dx < \infty$ olmak üzere,

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y} dxdy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left\{ \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_0^\infty g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

şeklinde genişletilmiştir. Bu eşitsizlik Hardy-Hilbert integral eşitsizliği adı altında anılmaya başlanmıştır. Burada $\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}$ mümkün olan en iyi sabittir (Hardy *et al*. 1952). Hardy vd. (1952) ve Kuang (2004) çalışmalarında bu eşitsizliğin farklı tiplerini ele alarak aşağıdaki şekilde genişletilmiş formlarını elde etmişlerdir.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\ln x-\ln y)\,f(x)\,g(y)}{x-y}dxdy<\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\right)^2\left\{\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.3}$$

eşitsizliği için $\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}}\right)^2$ mümkün olan en iyi sabittir.

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{\max\{x,y\}}dxdy\leq pq\left\{\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.4}$$

için de pq mümkün olan en iyi sabittir (Hardy *et al.* 1952).
B. Sun bu eşitsizlikle ilgili olarak $\lambda>0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $f,g\geq 0$ iken $0<\int_0^{\infty}t^{p-1-\lambda}f^p(t)\,dt<\infty$, $0<\int_0^{\infty}t^{q-1-\lambda}g^q(t)\,dt<\infty$ şartları altında,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{\max\{x^{\lambda},y^{\lambda}\}}dxdy\leq\frac{pq}{\lambda}\left\{\int_0^{\infty}t^{p-1-\lambda}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}t^{q-1-\lambda}g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.5}$$

şeklindeki eşitsizliği vermiştir. Burada da $\left(\frac{pq}{\lambda}\right)$ mümkün olan en iyi sabittir (Sun 2006).
Yongjin vd. (2006) bu eşitsizlik ile ilgili olarak; $f(x)$, $g(x)\geq 0$, $0<\int_0^{\infty}f^2(x)\,dx<\infty$ ve $0<\int_0^{\infty}g^2(x)\,dx<\infty$ iken,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{x+y+\max\{x,y\}}dxdy<c\left(\int_0^{\infty}f^2(x)\,dx\int_0^{\infty}g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.6}$$

eşitsizliğini ifade ve ispat etmiştir. Yine burada $c=\sqrt{2}\left(\pi-2\arctan\sqrt{2}\right)\approx 1.7408$ mümkün olan en iyi sabittir (Yongjin *et al.* 2006).
Mingzhe and Lin (2009) ise; $f(x)$, $g(x)\geq 0$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere
$0<\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx<\infty$ ve $0<\int_0^{\infty}g^q(x)\,dx<\infty$ iken,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|^n\,f(x)\,g(y)}{x+y}dxdy\leq\zeta_p\left\{\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^{\infty}g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{1.7}$$

olduğunu göstermiştir. Burada ζ_p mümkün olan en iyi sabittir (Lin and Mingzhe 2009).
$f,g\geq 0$, $p>1$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $0<\int_0^{\infty}f^p(x)\,dx<\infty$, $0<\int_0^{\infty}g^q(y)\,dy<\infty$ ve $\lambda>0$ iken,

$$
\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)\, g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx dy
$$

$$
\leq n! \left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\} \tag{1.8}
$$

$$
\times \left\{\int_0^\infty f^p(x)\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty g^q(y)\, dy\right\}^{\frac{1}{q}},
$$

dir. Burada $n! \left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$ mümkün olan en iyi sabit faktördür (Bayram ve Yıldırım 2010).

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu başlık altında çalışmamızda gerekli olan temel tanım ve teoremleri ele alacağız ve de bazıları için gerek duyulursa açıklayıcı bilgiler vereceğiz.

Tanım 2.1 (Sınırlı Fonksiyon) : $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır denir.

Tanım 2.2 (Mutlak Süreklilik) : $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde, $[a,b]$ aralığının sonlu sayıdaki her $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3], ...,$ $[x_{n-1},x_n]$ ayrık alt aralıkları için,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda, f fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.3 (Artan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$ için $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise $f(x)$ A üzerinde monoton artan fonksiyon, $f(x_1) < f(x_2)$ ise kesin artan fonksiyon denir (Caferov 1999).

Tanım 2.4 (Azalan Fonksiyon): A sonlu veya sonsuz bir aralık olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2$ için $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise $f(x)$ A üzerinde monoton azalan fonksiyon, $f(x_1) > f(x_2)$ ise kesin azalan fonksiyon denir (Caferov 1999).

(x_1, x_2) aralığında diferansiyellenebilen $y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde; Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \geq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton artan, eğer $f'(x) > 0$ ise kesin artan fonksiyondur.

Eğer bir aralığın tüm x noktalarında $f'(x) \leq 0$ ise fonksiyon bu aralıkta monoton azalan, eğer $f'(x) < 0$ ise kesin azalan fonksiyondur.

Şekil 2.1. f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklar

Tanım 2.5 (Gamma Fonksiyonu): $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır (Jeffrey and Dai 2008).

Tanım 2.6 (Beta Fonksiyonu):

Re(x), Re(y)>0 için,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır.

Beta fonksiyonun şu özellikleri vardır:

i.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt, \quad x, y > 0,$$

ii.

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad x, y > 0,$$

iii.

$$B(x, y) = B(y, x),$$

iv.

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m+n-1)!},$$

özellikleri vardır (Jeffrey and Dai 2008).

Tanım 2.7 (Lebesgue İntegrallenebilirlik): Verilen her hangi bir f fonksiyonu ölçülebilir E cümlesi üzerinde

$$\int_E |f(x)|\, dx < \infty$$

ise f fonksiyonuna E üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.8 (Hölder İntegral Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g, $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1970).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x,y)\, g(x,y)|\, dxdy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x,y)|^p\, dxdy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x,y)|^q\, dxdy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Tanım 2.9 (O ve o Landau simgeleri): f ve g reel sayılar cümlesi üzerine tanımlanan iki fonksiyon olsun.

$$f(x) = O(g(x)),\ x \to \infty$$

olması için gerek ve yeter şart, yeterince büyük x değerleri için

$$|f(x)| \leq M|g(x)|,\ \forall x \geq x_0$$

olacak şekilde $\exists M > 0$ ve $x_0 \in R$ olmasıdır. Diğer bir deyişle $f(x) = O(g(x))$, $x \to a$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\limsup_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

olmasıdır.

$$f(x) = o(g(x))$$

olması için gerek ve yeter şart, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ sayısı vardır öyle ki

$$|f(n)| \leq \varepsilon |g(n)|,\ \forall n \geq n_0$$

sağlanmasıdır. Diğer bir deyişle, $g(x) \neq 0$ olmak üzere $f(x) = o(g(x))$ ifadesi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ifadesine denktir.

Tanım 2.10 (Riemann Zeta Fonksiyonu):
$0 < \alpha < 1$ ve n pozitif tamsayı olsun. ζ^* fonksiyonu

$$\zeta^*(n, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha + k)^n}$$

şeklindedir. Daha ileri bir tanımla ζ_p fonksiyonu

$$\zeta_p = n! \left(\zeta^* \left(n+1, \frac{1}{p} \right) + \zeta^* \left(n+1, 1 - \frac{1}{p} \right) \right),\ (n \in N_0)$$

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Buradan açıkça görülüyorki $\zeta_p = \zeta_q$.

Lemma 2.1: $0 < \alpha < 1$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$\int_0^1 t^{\alpha - 1} \left(\ln \frac{1}{t} \right)^n \frac{1}{1+t} dt = n! \zeta^*(n+1, \alpha)$$

(Yuming 2006).

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HARDY-HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİ

Analiz ve uygulamalarında önemli yer tutan Hilbert integral eşitsizliği şu şekildedir. $f(x)$, $g(x) \geq 0$ için $0 < \int_0^\infty f^2(x)\,dx < \infty$ ve $0 < \int_0^\infty g^2(x)\,dx < \infty$ ise

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)g(y)}{x+y}dxdy < \pi \left(\int_0^\infty f^2(x)dx . \int_0^\infty g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.1}$$

dir. Burada π mümkün olan en iyi sabit faktördür (Hardy 1925). Bu eşitsizlik daha sonra Hardy tarafından aşağıdaki şekilde genişletilmiş ve adına Hardy-Hilbert integral eşitsizliği denilmiştir. Bu eşitsizlik,
$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x)$,$g(x) \geq 0$ iken $0 < \int_0^\infty f^p(x)\,dx < \infty$, $0 < \int_0^\infty g^q(x)\,dx < \infty$,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}dxdy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)} \left\{ \int_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.2}$$

dir. Burada $\dfrac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}$ mümkün olan en iyi sabit faktördür (Hardy *et al.* 1952).
Hardy vd. (1952) ve Kuang (2004) çalışmalarında bu eşitsizliğin aşağıdaki formlarını elde etmişlerdir.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(\ln x - \ln y)\,f(x)\,g(y)}{x-y}dxdy < \left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \right)^2 \left\{ \int_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.3}$$

$\left(\dfrac{\pi}{\sin\frac{\pi}{p}} \right)^2$ mümkün olan en iyi sabit faktördür.

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{\max\{x,y\}}dxdy \leq pq \left\{ \int_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.4}$$

pq mümkün olan en iyi sabit faktördür (Hardy *et al.* 1952).

Teorem 3.1: $\lambda > 0$, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f, g \geq 0$ iken $0 < \int_0^\infty t^{p-1-\lambda} f^p(t)\,dt < \infty$, $0 < \int_0^\infty t^{q-1-\lambda} g^q(t)\,dt < \infty$ ise,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{\max\{x^\lambda, y^\lambda\}}dxdy \leq \frac{pq}{\lambda} \left\{ \int_0^\infty t^{p-1-\lambda} f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty t^{q-1-\lambda} g^q(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.5}$$

$\dfrac{pq}{\lambda}$ en iyi sabit faktördür (Sun 2006).

Teorem 3.2: $f(x), g(x) \geq 0,\ 0 < \int\limits_0^\infty f^2(x)\,dx < \infty$ ve $0 < \int\limits_0^\infty g^2(x)\,dx < \infty$ iken,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y+\max\{x,y\}}dxdy < c\left(\int_0^\infty f^2(x)\,dx \int_0^\infty g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.6}$$

$c = \sqrt{2}\left(\pi - 2\arctan\sqrt{2}\right) \approx 1.7408$ dir (Yongjin *et al.* 2006).

Şimdi Hardy-Hilbert tipli integral eşitsizliğinin ispatında kullanacağımız Riemann Zeta fonksiyonunu, lemmayı ve teoremi verelim.

$0 < \alpha < 1$ ve n bir pozitif tamsayı olsun. ζ^* fonksiyonu,

$$\zeta^*(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha+k)^n},$$

şeklinde tanımlanmıştır. Daha geniş bir tanımla ζ_p,

$$\zeta_p = n!\left(\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}\right) + \zeta^*\left(n+1, 1-\frac{1}{p}\right)\right),\ (n \in N_0) \tag{3.7}$$

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Lemma 3.1: $0 < \alpha < 1$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun.

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^n \frac{1}{1+t}dt = n!\zeta^*(n+1,\alpha) \tag{3.8}$$

(Yuming 2006).

Teorem 3.3: $f, g \geq 0,\ \ p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ n$ negatif olmayan bir tamsayı olsun. Eğer $0 < \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx < \infty$ ve $0 < \int\limits_0^\infty g^q(x)\,dx < \infty$ ise,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)\,g(y)}{(x+y)}dxdy \leq \zeta_p \left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{3.9}$$

dir. Burada ζ_p, (3.7) de tanımlanmıştır ve mümkün olan en iyi sabit çarpandır (Lin and Mingzhe 2009).

Teorem 3.4: $f, g \geq 0,\ p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ n$ negatif olmayan bir tamsayı olsun. $0 < \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx < \infty$ ve $0 < \int\limits_0^\infty g^q(y)\,dy < \infty$ ve $\lambda > 0$ iken,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)\,g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy \leq \tag{3.10}$$

$$n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\} \left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada $n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$ mümkün olan en iyi sabit çarpandır (Bayram ve Yıldırım 2010).

İspat: İlk olarak (3.10) eşitsizliğinin sol tarafı için,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)\,g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}}\frac{f(x)}{\left(\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}\right)^{\frac{1}{p}}}$$
$$\times\left(\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{pq}}\frac{g(y)}{\left(\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}\right)^{\frac{1}{q}}}dxdy \tag{3.11}$$

yazılabilir. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)\,g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy$$

$$\leq\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{f^p(x)}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{g^q(y)}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.12}$$

$$=\left(\int_0^\infty f^p(x)\left(\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}}\frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dy\right)dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\times\left(\int_0^\infty g^q(y)\left(\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dx\right)dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=I_1\times I_2.$$

elde edilir. Buradaki I_1 ve I_2 tanımlamaları için,

$$M = \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dy \tag{3.13}$$

tanımlamasını yapalım ve bu eşitliği

$$\begin{aligned} M &= \int_0^x \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dy \\ &+ \int_x^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dy \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

şeklinde yeniden yazalım. M_1 de, $x \geq y$ olduğundan $\dfrac{x}{y} \geq \dfrac{y}{x}$ dir. Bunun sonucu olarak $\max\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\dfrac{y}{x}\right)^\lambda\right\} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^\lambda$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^x \frac{|\ln \frac{x}{y}|^n}{x+y} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda} dy \\ &= \int_0^x \frac{|\ln \frac{x}{y}|^n}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}-\lambda} dy \end{aligned} \tag{3.15}$$

olur. Burada $\dfrac{y}{x} = u$, değişken değiştirmesi yapılarak, lemma 3.1 yardımıyla,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^1 u^{\lambda-\frac{1}{q}} |\ln \frac{1}{u}|^n \frac{1}{1+u} du \\ &= n!\zeta^*\left(n+1, \lambda + \frac{1}{p}\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

elde edilir. Aynı yolu izleyerek, M_2 için, $y \geq x$ olmasından $\dfrac{y}{x} \geq \dfrac{x}{y}$ ve

$$\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\} = \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda$$

dir. Buradan da,

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \int\limits_x^\infty \frac{|\ln\frac{x}{y}|^n}{x+y}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dy \\
&= \int\limits_x^\infty \frac{|\ln\frac{x}{y}|^n}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)}\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda} dy
\end{aligned}
$$

olduğu açıktır. Yine burada $\dfrac{y}{x} = u$, değişken değiştirmesi yapılarak, lemma 3.1 yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \int\limits_1^\infty u^{-\lambda-\frac{1}{q}} |\ln\frac{1}{u}|^n \frac{1}{1+u} du \\
&= n!\zeta^*\left(n+1, \lambda+\frac{1}{q}\right)
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

elde edilir. (3.14), (3.16) ve (3.17) eşitlikleri aynı anda göz önünde bulundurularak,

$$
I_1 \le \left(M \int\limits_0^\infty f^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.18}
$$

yazılır. Bu ifadede

$$
M = n!\left(\zeta^*\left(n+1, \lambda+\frac{1}{p}\right) + \zeta^*\left(n+1, \lambda+\frac{1}{q}\right)\right) \tag{3.19}
$$

şeklindedir. (3.12) nin sağ tarafındaki ikinci integral için de aynı yolu izleyerek,

$$
\begin{aligned}
N &= \int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \\
&= \int\limits_0^y \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \\
&+ \int\limits_y^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \\
&= N_1 + N_2
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

yazabiliriz. N_1 de, $y \ge x$ olmasından $\dfrac{y}{x} \ge \dfrac{x}{y}$ dir. Bu nedenle de, $\max\left\{\left(\dfrac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\dfrac{y}{x}\right)^\lambda\right\} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^\lambda$ dir. $\dfrac{x}{y} = u$, değişken değiştirmesi yapılarak, lemma 3.1 yardımıyla,

$$
N_1 = \int\limits_0^y \frac{|\ln\frac{x}{y}|^n}{x+y}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda} dy
$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^1 u^{1-\frac{1}{p}+\lambda-1} |\ln \frac{1}{u}|^n \frac{1}{1+u} du \\ &= n!\zeta^* \left(n+1, \lambda+\tfrac{1}{q}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

bulunur. Aynı şekilde, N_2 için

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_y^\infty \frac{|\ln \frac{x}{y}|^n}{x+y} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}} dy \\ &= \int_1^\infty u^{-\frac{1}{p}-\lambda} |\ln \frac{1}{u}|^n \frac{1}{1+u} du \\ &= n!\zeta^* \left(n+1, \lambda+\tfrac{1}{p}\right) \end{aligned} \tag{3.22}$$

eşitliği yazılır. Yine (3.20), (3.21) ve (3.22) yi birleştirerek

$$I_2 \leq \left(M \int_0^\infty g^q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.23}$$

$$N = M = n!\left(\zeta^*\left(n+1, \lambda+\frac{1}{p}\right) + \zeta^*\left(n+1, \lambda+\frac{1}{q}\right)\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.12), (3.18), (3.19) ve (3.23) ifadelerini aynı anda göz önüne alırsak,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)\, g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}, \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}} dx dy$$

$$\leq n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\} \left\{\int_0^\infty f^p(x)\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty g^q(y)\, dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

olacağı açıktır.

Şimdi ise (3.10) daki $n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$ katsayısının mümkün olan en iyi çarpan olduğunu göstermeliyiz. $\forall \varepsilon > 0$ için $f_\varepsilon(x) = x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}$ ve $g_\varepsilon(y) = y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}$ şeklinde iki fonksiyon tanımlayalım. Bu fonksiyonlar için,

$$\int_\varepsilon^\infty f_\varepsilon^p(x)\, dx = \frac{1}{\varepsilon^{1+\varepsilon}} \quad \text{ve} \quad \int_\varepsilon^\infty g_\varepsilon^q(y)\, dy = \frac{1}{\varepsilon^{1+\varepsilon}}$$

eşitlikleri kolayca görülebilir. Eğer $n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$

mümkün olan en iyi çarpan olmasaydı öyle bir C çarpanı olmalıydı ki $C>0$ için,

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|^{n}f_{\varepsilon}(x)\,g_{\varepsilon}(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dxdy\\
&\leq C\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}f_{\varepsilon}^{p}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\varepsilon}^{\infty}g_{\varepsilon}^{q}(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{C}{\varepsilon^{1+\varepsilon}}\\
&<\frac{n!\left\{\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}}{\varepsilon^{1+\varepsilon}}
\end{aligned}\tag{3.24}$$

olacaktı. Öte yandan,

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|^{n}f_{\varepsilon}(x)\,g_{\varepsilon}(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dxdy\\
&=\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\left(|\ln x-\ln y|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dxdy\\
&=\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\left(|\ln x-\ln y|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dy\right\}\left\{x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\right\}dx\\
&=\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\int_{\varepsilon}^{x}\frac{\left(|\ln x-\ln y|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dy\right.\\
&\quad\left.+\int_{x}^{\infty}\frac{\left(|\ln x-\ln y|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dy\right\}\left\{x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\right\}dx\\
&=\int_{\varepsilon}^{\infty}\left\{\int_{\varepsilon}^{x}\frac{\left(|\ln\frac{x}{y}|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}}dy+\int_{x}^{\infty}\frac{\left(|\ln\frac{x}{y}|^{n}y^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{(x+y)\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}}dy\right\}\left\{x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}}\right\}dx
\end{aligned}\tag{3.25}$$

elde edilir. Burada $\dfrac{y}{x}=t$, değişken değiştirmesi yapılarak,

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left\{ \int_{\frac{\varepsilon}{x}}^{1} \frac{\left(|\ln \frac{1}{t}|^n (xt)^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}\right)}{x(1+t)\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda}} x dt + \int_{1}^{\infty} \frac{|\ln \frac{1}{t}|^n (xt)^{-\frac{1+\varepsilon}{q}}}{x(1+t)t^{\lambda}} x dt \right\} \left\{ x^{-\frac{1+\varepsilon}{p}} \right\} dx$$

$$= \int_{\varepsilon}^{\infty} \left\{ \int_{\frac{\varepsilon}{x}}^{1} |\ln \frac{1}{t}|^n t^{\lambda - \frac{1+\varepsilon}{q}} \frac{1}{1+t} dt + \int_{1}^{\infty} |\ln \frac{1}{t}|^n t^{-\lambda - \frac{1+\varepsilon}{q}} \frac{1}{1+t} dt \right\} \left\{ x^{-\frac{1+\varepsilon}{p} - \frac{1+\varepsilon}{q}} \right\} dx \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^{1+\varepsilon}} \left\{ \int_{\frac{\varepsilon}{x}}^{1} |\ln \frac{1}{t}|^n t^{\lambda - \frac{1+\varepsilon}{q}} \frac{1}{1+t} dt + \int_{1}^{\infty} |\ln \frac{1}{t}|^n t^{-\lambda - \frac{1+\varepsilon}{q}} \frac{1}{1+t} dt \right\}$$

elde edilir. Lemma (3.1) yardımıyla,

$$= \frac{1}{\varepsilon^{1+\varepsilon}} \left\{ n! \left\{ \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{p} + \lambda - \frac{\varepsilon}{q} \right) + \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{q} + \lambda + \frac{\varepsilon}{q} \right) \right\} \right\}$$

olacağı açıktır. Böylece ε yeterince küçük seçildiğinde

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{|\ln x - \ln y|^n f_{\varepsilon}(x) g_{\varepsilon}(y)}{(x+y) \max \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}, \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda} \right\}} dx dy$$

$$> \frac{1}{\varepsilon^{1+\varepsilon}} \left\{ n! \left\{ \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{p} + \lambda \right) + \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{q} + \lambda \right) \right\} + o(1) \right\} \quad (\varepsilon \to 0) \quad (3.27)$$

olacaktır. Buradan açıkça görülebilir ki, ε yeterince küçük seçildiğinde (3.24) eşitsizliği (3.27) eşitsizliği ile çelişir. Bu nedenle (3.10) daki

$$n! \left\{ \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{p} + \lambda \right) + \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{q} + \lambda \right) \right\}$$

çarpanı mümkün olan en iyi çarpandır. Bu da teoremimizin ispatını tamamlar.

Sonuç 3.5: (3.10) da özel olarak $p = q = 2$ seçilirse, $0 < \int_0^{\infty} f^2(x) dx < \infty$ ve $0 < \int_0^{\infty} g^2(y) dy < \infty$ ve $\lambda > 0$ için,

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x) g(y)}{(x+y) \max \left\{ \left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda}, \left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda} \right\}} dx dy$$

$$\leq 2n! \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{2} + \lambda \right) \left\{ \int_0^{\infty} f^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} g^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

olacağı açıktır. Burada, $2n! \zeta^* \left(n+1, \frac{1}{2} + \lambda \right)$ mümkün olan en iyi çarpandır (Bayram ve Yıldırım 2010).

3.1 Bazı Denklik Halleri

Teorem 3.4 ifadesine denk olan aşağıdaki sonuçları verelim.

Teorem 3.1.1: n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere $p > 1$ için $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. Negatif olmayan reel değerli f fonksiyonu için $0 < \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx < \infty$ ise

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \right)^p dy \tag{3.1.1}$$

$$\leq \left[n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right) \right\} \right]^p \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx$$

dir. Burada $\left[n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right) \right\} \right]^p$ mümkün olan en iyi sabit çarpandır (faktördür) (Bayram ve Yıldırım 2010).

İspat: İlk olarak (3.1.1) eşitsizliğinin (3.10) eşitsizliğine denk olduğunu gösterelim.

$$g(y) = \left(\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \right)^{p-1}, \ y \in (0,\infty)$$

şeklinde bir $g(y)$ reel değerli fonksiyonunu göz önüne alalım. (3.10) yardımıyla,

$$\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \right)^p dy$$

$$= \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)\, g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dxdy$$

$$\leq n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right) \right\} \left\{ \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int\limits_0^\infty g^q(y)\,dy \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{p}+\lambda\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{1}{q}+\lambda\right) \right\}$$

$$\times \left\{ \int\limits_0^\infty f^p(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left[\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda, \left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}} dx \right)^{q(p-1)} dy \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$= n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dx\right)^p dy\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3.1.2}$$

(3.1.2) eşitsizliğinden (3.1.1) eşitsizliği görülebilir. Diğer yandan, (3.1.1) eşitsizliği geçerli olsun. (3.1.1) de Hölder eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)\,g(y)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dxdy$$

$$=\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dx\right\}g(y)\,dy$$

$$\leq\left\{\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty\frac{|\ln x-\ln y|^n f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda,\left(\frac{y}{x}\right)^\lambda\right\}}dx\right\}^p dy\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left[\left(n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$= n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\} \tag{3.1.3}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

olacaktır. (3.1.1) deki

$$\left[n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}\right]^p$$

çarpanı mümkün olan en iyi sabit çarpan değil ise, (3.1.3) deki sabit çarpan olarak bilinen

$$n!\left\{\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{p}+\lambda\right)+\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{q}+\lambda\right)\right\}$$

çarpanı (3.10) da da mümkün olan en iyi çarpan değildir. Bu da bir çelişkidir. Böylece teoremimizin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.2: Eğer (3.1.1) de $p=2$ seçilirse $0<\int\limits_{0}^{\infty} f^{2}(x)\,dx<\infty$ ve $\lambda>0$ için,

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left(\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\ln x-\ln y|^{n} f(x)}{(x+y)\max\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^{\lambda},\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda}\right\}}dx\right)^{2} dy \tag{3.1.4}$$

$$\leq\left[2n!\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{2}+\lambda\right)\right]^{2}\int\limits_{0}^{\infty} f^{2}(x)\,dx$$

olacaktır. Burada $\left[2n!\zeta^{*}\left(n+1,\frac{1}{2}+\lambda\right)\right]^{2}$ mümkün olan en iyi sabit faktördür. (3.1.4) eşitsizliği (3.28) eşitsizliğine denktir (Bayram ve Yıldırım 2010).

4. $\dfrac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\dfrac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}$ ÇEKİRDEĞİ İÇİN HARDY-HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİ

Bu bölümde genelleştirilmiş homojen bir çekirdek ve ağırlık fonksiyonu tanımlayarak, en iyi sabit faktör ve bazı parametrelerle yeni bir Hardy-Hilbert tipli integral eşitsizliği tanımlayacağız ve ispatını yapacağız. Elde edeceğimiz eşitsizlikteki en iyi çarpanı, Riemann Zeta fonksiyonuna bağlı olarak göstereceğiz. Burada yapacağımız çalışma için bazı lemma ve teoremleri ifade edelim.

Lemma 4.1: $0<\alpha<1$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere.

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^n\frac{1}{1+t}dt=n!\zeta^*(n+1,\alpha)$$

dir (Yuming 2006).

Lemma 4.2: $\lambda,\mu\in R$ ve $\lambda+\mu>0$, $\omega_{\lambda,\mu}(u)$ ağırlık fonksiyonu,

$$\omega_{\lambda,\mu}(u):=\int_0^\infty\frac{(\min\{u,v\})^\lambda}{(\max\{u,v\})^\mu}\frac{u^{-\frac{\lambda-\mu}{2}}}{v^{1+\frac{\lambda-\mu}{2}}}dv,\ \ u\in(0,\infty), \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır ve $u\in(0,\infty)$ için,

$$\omega_{\lambda,\mu}(u)=\frac{4}{\lambda+\mu},\ \ u\in(0,\infty)$$

elde edilir (He 2011).

Teorem 4.1: $f,g\geq 0$ iken $0<\int_0^\infty x^{p\left(1+\frac{\lambda-\mu}{2}\right)-1}f^p(x)\,dx<\infty$ ve

$$0<\int_0^\infty x^{q\left(1+\frac{\lambda-\mu}{2}\right)-1}g^q(x)\,dx<\infty$$

ise,

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^\infty\int_0^\infty\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}f(x)\,g(y)\,dxdy \qquad (4.2)\\ &> \frac{4}{\lambda+\mu}\left\{\int_0^\infty x^{p\left(1+\frac{\lambda-\mu}{2}\right)-1}f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty y^{q\left(1+\frac{\lambda-\mu}{2}\right)-1}g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

dir. Buradaki $\dfrac{4}{\lambda+\mu}$, sabit faktörü (çarpanı) p ve q dan bağımsızdır ve mümkün olan en iyi sabit faktördür (He 2011).

Lemma 4.3: $\lambda,\mu\in R$ ve $\lambda+\mu>0$, $\omega_{\lambda,\mu}(u)$ ağırlık fonksiyonu,

$$\omega_{\lambda,\mu}(u):=\int_0^\infty \frac{|\ln u-\ln v|^n}{u+v}\frac{(\min\{u,v\})^\lambda}{(\max\{u,v\})^\mu}\frac{u^{1-\frac{\lambda-\mu}{2}}}{v^{1+\frac{\lambda-\mu}{2}}}dv,\ u\in(0,\infty) \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u\in(0,\infty)$ için,

$$\omega_{\lambda,\mu}(u)=n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\},\ u\in(0,\infty)$$

dir.
İspat: $u>0$ için $t=\dfrac{v}{u}$ değişken değiştirmesi ile,

$$\begin{aligned}
\omega_{\lambda,\mu}(u) &:= \int_0^\infty \frac{|\ln u-\ln v|^n}{u+v}\frac{(\min\{u,v\})^\lambda}{(\max\{u,v\})^\mu}\frac{u^{1-\frac{\lambda-\mu}{2}}}{v^{1+\frac{\lambda-\mu}{2}}}dv\\
&= \int_0^\infty \frac{\left|\ln\frac{1}{t}\right|^n}{u(1+t)}\frac{(\min\{u,ut\})^\lambda}{(\max\{u,ut\})^\mu}\frac{u^{1-\frac{\lambda-\mu}{2}}}{(ut)^{1+\frac{\lambda-\mu}{2}}}udt\\
&= \int_0^\infty \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n\frac{(\min\{1,t\})^\lambda}{(\max\{1,t\})^\mu}t^{-1-\frac{\lambda-\mu}{2}}dt\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n\frac{t^\lambda}{1^\mu}t^{-1-\frac{\lambda-\mu}{2}}dt+\int_1^\infty \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n\frac{1^\lambda}{t^\mu}t^{-1-\frac{\lambda-\mu}{2}}dt,\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n t^{-1+\frac{\lambda+\mu}{2}}dt+\int_1^\infty \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n t^{-1-\frac{\lambda+\mu}{2}}dt
\end{aligned}$$

Buradaki ikinci integralde $t=\dfrac{1}{k}$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$=\int_0^1 \frac{1}{1+t}\left|\ln\tfrac{1}{t}\right|^n t^{-1+\frac{\lambda+\mu}{2}}dt+\int_0^1\frac{1}{1+k}|\ln k|^n k^{1+\frac{\lambda+\mu}{2}-1}dk$$

olarak bulunur. Burada her iki integral için lemma 4.1 ayrı ayrı kullanılarak,

$$\omega_{\lambda,\mu}(u) = n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}$$

elde edilir.
Teorem 4.2: $f,g\geq 0,\ 1<p$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ iken $0<\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}f^p(x)\,dx$ $<\infty$ ve $0<\int_0^\infty x^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}g^q(x)\,dx<\infty$ ise,

$$
\begin{aligned}
I \quad &:= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,g(y)\,dxdy \\
&> \left[n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right] \qquad (4.4) \\
&\times \left\{\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir ki burada $n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)+\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}$ sabit faktörü p,q dan bağımsızdır ve mümkün olan en iyi sabit faktördür.

İspat: Ağırlıklı Hölder eşitsizliğinin tersi ile,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,g(y)\,dxdy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} \left[\frac{x^{\frac{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}{q}}}{y^{\frac{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}{p}}} f(x)\right]\left[\frac{y^{\frac{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}{p}}}{x^{\frac{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}{q}}} g(y)\right] dxdy \\
&\geq \left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}} f^p(x)\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{y^{(q-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{x^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}} g^q(y)\,dxdy\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.5) \\
&= I_1\times I_2
\end{aligned}
$$

elde edebiliriz. Burada,

$$
I_1 = \left(\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy\right] f^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}
$$

olarak alalım. Burada,

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy \\
&= \int_0^x \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy \\
&+ \int_x^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy \qquad (4.6)\\
&= M_1+M_{2.}
\end{aligned}
$$

olsun. M_1, durumunda $x \geq y$ olduğundan $(\min\{x,y\})^\lambda = y^\lambda$, $(\max\{x,y\})^\mu = x^\mu$ dir. Böylece,

$$
M_1 = \int_0^x \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{y^\lambda}{x^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy.
$$

$u=\dfrac{y}{x}$, değişken değiştirmesi ile,

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \int_0^1 \frac{\left|\ln \frac{1}{u}\right|^n}{x(1+u)}\frac{(ux)^\lambda}{x^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{(ux)^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}xdu \\
&= x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)}\left|\ln\frac{1}{u}\right|^n u^{\frac{\lambda+\mu}{2}-1}du \qquad (4.7)\\
&= \left[n!\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}f^p(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. M_2, durumunda ise $y \geq x$ olduğundan $(\min\{x,y\})^\lambda = x^\lambda$, $(\max\{x,y\})^\mu = y^\mu$ dir. $u=\dfrac{x}{y}$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$
\begin{aligned}
M_2 &= \int_x^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{x^{(p-1)\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}{y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)}}dy \\
&= x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)}|\ln u|^n u^{\frac{\lambda+\mu}{2}+1-1}du \qquad (4.8)\\
&= \left[n!\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}f^p(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) birlikte düşünülürse,

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \left[n!\left\{\zeta^*\left(n+1,\tfrac{\lambda+\mu}{2}\right)+\zeta^*\left(n+1,\tfrac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left[\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

yazılır. Aynı şekilde,

$$
I_2 = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx\right) g^q(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}}
$$

diyelim. Burada

$$
\begin{aligned}
N &= \int_0^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx \\
&= \int_0^y \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx \\
&+ \int_y^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx \\
&= N_1+N_{2.}
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

dir. N_1, durumunda ise $y \geq x$ olduğundan $(\min\{x,y\})^\lambda = x^\lambda$, $(\max\{x,y\})^\mu = y^\mu$dir. $u = \dfrac{x}{y}$ değişken değiştirmesi yapılarak,

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \int_0^y \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{x^\lambda}{y^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx \\
&= y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)}|\ln u|^n u^{\frac{\lambda+\mu}{2}-1}du
\end{aligned}
$$

$$
N_1 = \left[n!\zeta^*\left(n+1,\frac{\lambda+\mu}{2}\right)\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}g^q(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.11}
$$

yazılır.

N_2, durumunda ise $x \geq y$ olduğundan $(\min\{x,y\})^\lambda = y^\lambda$ ve $(\max\{x,y\})^\mu = x^\mu$ dir. Böylece $u = \dfrac{y}{x}$, değişken değiştirmesi ile,

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \int_y^\infty \frac{|\ln x-\ln y|^n}{x+y}\frac{y^\lambda}{x^\mu}\frac{y^{(q-1)(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}{x^{(\frac{\lambda-\mu}{2}+1)}}dx \\
&= y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2}\int_0^1 \frac{1}{(1+u)}\left|\ln \tfrac{1}{u}\right|^n u^{\frac{\lambda+\mu}{2}+1-1}du
\end{aligned}
$$

$$N_2 = \left[n!\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4.12}$$

bulunur. Yine burada (4.11) ve (4.12) aynı anda düşünülürse,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \tfrac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \tfrac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &\times \left[\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{4.13}$$

olacaktır. (4.5), (4.9) ve (4.13) ün birleştirilmesi ile,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,g(y)\,dxdy \\ &> \left[n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right] \\ &\times \left\{\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olacağı açıktır. Burada $n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}$ sabit faktörü p, q dan bağımsızdır ve mümkün olan en iyi sabit faktördür. Kabul edelim ki

$$n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \tfrac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \tfrac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}$$

sabit faktörü mümkün olan en iyi sabit olmasın. Bu durumda,

$$k > n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}$$

eşitsizliğini sağlayan bir k pozitif sayısı vardır ve $a > 0$ öyle ki,

$$\begin{aligned} &\int_a^\infty\left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y}\frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,g(y)\,dy\right]dx \\ &> k\left\{\int_a^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

$0 < \varepsilon < \dfrac{(\lambda+\mu)|q|}{2}$ için,

$$f^* = \begin{cases} 0 & , x \in (0,a) \text{ için} \\ x^{-\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-\frac{\varepsilon}{p}} & , x \in [a,\infty) \text{ için} \end{cases}$$

$$g^* = \begin{cases} 0 & , y \in (0,a) \text{ için} \\ \\ y^{-\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-\frac{\varepsilon}{q}} & , y \in [a,\infty) \text{ için} \end{cases}$$

seçelim. Burada tanımlanan f^*, g^* fonksiyonlarını (4.14) ifadesinde kullanarak, y değişkeni için, $t = \dfrac{y}{x}$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f^*(x)\, g^*(y)\, dy \right] dx$$

$$\leq \int_a^\infty x^{-2-\varepsilon} \left[\int_0^\infty \frac{1}{1+t} \left| \ln \frac{1}{t} \right|^n \frac{(\min(1,t))^\lambda}{(\max(1,t))^\mu} t^{-\left(1+\frac{\lambda-\mu}{2}\right)-\frac{\varepsilon}{q}} dt \right] dx$$

$$= \frac{1}{(\varepsilon+1)a^{\varepsilon+1}} n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{\varepsilon}{q}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{\varepsilon}{q} + 1\right) \right\}$$

yazılır. Buradan da,

$$n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{\varepsilon}{q}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} - \frac{\varepsilon}{q} + 1\right) \right\}$$

$$\geq (\varepsilon+1)a^{\varepsilon+1} \int_a^\infty \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f^*(x)\, g^*(y)\, dy \right] dx$$

$$> (\varepsilon+1)a^{\varepsilon+1} k \left\{ \int_a^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^{*p}(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left\{ \int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^{*q}(y)\, dy \right\}^{\frac{1}{q}} = k$$

olacaktır. Bu da,

$$n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} + 1\right) \right\} \geq k \ \left(\varepsilon \to 0^+\right),$$

şeklinde yazılır ki buda hipotezimizle çelişir. Bu nedenle (4.4) deki

$$n! \left\{ \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2} + 1\right) \right\}$$

sabit faktörü mümkün olan en iyi sabittir. Bu ise istenendir.

Hatırlatma: Teorem 4.2 de $\lambda \to 0$ ve $\mu \to 0$ limit halinde elde edilen sonuçlar Mingzhe and Lin (2009) daki sonucu verir.

4.1 Bazı Denklik Halleri

Teorem 4.1.1: $f \geq 0$ için $0 < \int\limits_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx < \infty$ ise (4.4) e denk olan,

$$\begin{aligned} J &:= \int\limits_0^\infty y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^p dy \\ &> \left(n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right)^p \qquad (4.15) \\ &\times \int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx, \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\left(n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\}\right)^p$$

mümkün olan en iyi sabit faktördür.

İspat: $\int\limits_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx > 0$ için $J > 0$. Eğer $J = \infty$ ise (4.15) geçerlidir. Şimdi kabul edelim ki $J < \infty$ ve

$$g(y) = y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^{p-1}, \quad y \in (0,\infty)$$

olsun. J için,

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy \\ &= \int\limits_0^\infty y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int\limits_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^p dy \end{aligned}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy \\ &= \int\limits_0^\infty \left(y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-\frac{2}{q}} g(y)\right)^q dy \\ &= \left\{\int\limits_0^\infty \left(y^{\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-\frac{2}{q}} y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}}\right)^q\right. \end{aligned}$$

$$\times \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^{q(p-1)} dy\Bigg\}$$

$$= \int_0^\infty y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^{p} dy$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada (4.4) ile,

$$\begin{aligned}
\infty &> \int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy = J \\
&= \int_0^\infty y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^{p} dy \\
&= \int_0^\infty \Bigg\{ y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx\right]^{p-1} \\
&\times \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx \Bigg\} dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,g(y)\,dxdy \\
&= I \\
&> n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\} \\
&\times \left\{\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{q}} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
J^{\frac{1}{P}} &= \left\{\int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy\right\}^{\frac{1}{P}} \\
&> n!\left\{\zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}\right) + \zeta^*\left(n+1, \frac{\lambda+\mu}{2}+1\right)\right\} \\
&\times \left\{\int_0^\infty x^{p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle (4.15) geçerlidir. Öte yandan kabul edelim ki (4.15) geçerli olsun. Ağırlıklı Hölder eşitsizliğinin tersi ile,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \left[y^{-\frac{\lambda-\mu}{2}-1+\frac{2}{q}} \int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx \right] \left[y^{\frac{\lambda-\mu}{2}+1-\frac{2}{q}} g(y) \right] dy \\
&\geq \left\{ \int_0^\infty y^{-p\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)+\frac{2p}{q}} \left[\int_0^\infty \frac{|\ln x - \ln y|^n}{x+y} \frac{(\min\{x,y\})^\lambda}{(\max\{x,y\})^\mu} f(x)\,dx \right]^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left\{ \int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy \right\}^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

$$
I \geq J^{\frac{1}{P}} \left\{ \int_0^\infty y^{q\left(\frac{\lambda-\mu}{2}+1\right)-2} g^q(y)\,dy \right\}^{\frac{1}{q}}
$$

olduğunu görebiliriz. Böylece (4.15) ile (4.4) ü elde ederiz. Bu nedenle (4.4) ve (4.15) denktir.

5. $\dfrac{1}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}}$ ÇEKİRDEĞİ İÇİN HARDY-HİLBERT TİPLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİĞİ

Analiz ve uygulamalarındaki önemi nedeniyle, Hardy-Hilbert integral eşitsizliği olarak bilinen

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{f(x)\,g(y)}{x+y}dxdy < \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{p}\right)}\left\{\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^\infty g^q(x)\,dx\right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{5.1}$$

şeklindeki Hardy vd. (1952) integral eşitsizliğinin genelleştirmeleri veya genişlemeleri genellikle integrasyondaki çekirdeğin yapısına bağlı olarak ele alınmıştır.

(5.1) eşitsizliğinin sol tarafındaki fonksiyonun yani çekirdek fonksiyonunun yapısına bağlı olarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; Kuang (1999) makalesinde $\dfrac{1}{x+y}$ paydası yerine (x^t+y^t), (t, x ve y den bağımsız bir parametredir), Yang and Debnath (2002) makalelerinde $\dfrac{1}{x+y}$ paydası yerine $(Ax+By)^{\lambda}$, Kuang (2004) makalesinde $\dfrac{1}{x+y}$ paydası yerine $\dfrac{\ln x-\ln y}{x-y}$, Krnic vd. (2005) ise makalesinde $\dfrac{1}{x+y}$ paydası yerine $(u(x)+v(y))^{\lambda}$, Lin and Mingzhe (2009) makalelerinde $\dfrac{1}{x+y}$ paydası yerine $\dfrac{|\ln x-\ln y|^n}{x-y}$ olarak genişletmeleri ve genelleştirmeleri yapmışlardır.

Yukarıda bahsettiğimiz genelleştirmeleri dikkate alarak, Hardy-Hilbert tipli integral eşitsizliğini daha genel bir çekirdek için ifade ve ispat edeceğiz. Bunun için gerekli olacak bazı lemma ve teoremleri verelim.

Lemma 5.1: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $f(x,y,z)\;\epsilon\; L^p_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}$ ve

$$g(x,y,z)\;\epsilon\; L^q_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y,z)\,g(x,y,z)|dxdydz\\ &\leq\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y,z)|^p dxdydz\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |g(x,y,z)|^q dxdydz\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{5.2}$$

dir.

Lemma 5.2: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{k}=1$ olmak üzere $f(x,y,z)\;\epsilon\; L^p_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}$, $g(x,y,z)\;\epsilon\; L^q_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}$ ve $h(x,y,z)\;\epsilon\; L^k_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)}$ olsun. Böylece,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y,z)\,g(x,y,z)\,h(x,y,z)|\,dxdydz$$

$$\leq \left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |f(x,y,z)|^p dxdydz\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |g(x,y,z)|^q dxdydz\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5.3}$$

$$\times \left(\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty |h(x,y,z)|^k dxdydz\right)^{\frac{1}{k}}$$

dir.

Lemma 5.3: $p_1 > 1,\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{k} = 1,\ 0 < \varepsilon < \frac{1}{qk}$ iken

$$\int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{p_1qk} - \frac{\varepsilon}{p_1} - 1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}}} dv \;=\; B\left(\frac{1}{p_1qk}, \frac{1}{q_1qk}\right) + O(1) \qquad \varepsilon \to 0^+ \tag{5.4}$$

dir (Agwo 2009).

Lemma 5.4: $p_1 > 1,\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1,\ p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{k} = 1$ ve $0 < \varepsilon < \frac{1}{qk}$ iken

$$\begin{aligned} J_1 \;&=\; \int_1^\infty\int_1^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}} (m(x))^{\frac{1}{p_1qk} - \frac{\varepsilon}{p_1} - 1} \\ &\times\;\; (n(y))^{-\frac{1}{p_1qk} - \frac{\varepsilon}{q_1} - 1} \frac{dm(x)}{dx}\frac{dn(y)}{dy} dxdy, \end{aligned} \tag{5.5}$$

$\varepsilon \to 0^+$ iken şu eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon}\left(B\left(\tfrac{1}{p_1qk}, \tfrac{1}{q_1qk}\right) + o(1)\right) - O(1) \;&\leq\; J_1 \\ &\leq\; \frac{1}{\varepsilon}\left(B\left(\tfrac{1}{p_1qk}, \tfrac{1}{q_1qk}\right) + o(1)\right) \end{aligned}$$

dir (Agwo 2009).

Teorem 5.1: *m, n ve r* $[0,\infty]$ üzerinde artan fonksiyonlardır öyle ki $m(0) = n(0) = r(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} m(x) = \lim_{x\to\infty} n(x) = \lim_{x\to\infty} r(x) = \infty$ ve f, g, h için,

$$\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{pp_1}{2}} (m(x))^{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{qk}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dx < \infty$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{kq_1}{2}} (m(x))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dx < \infty$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{pq_1}{2}} (n(y))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{qk}\right)} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dy < \infty$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{p_1 q}{2}} (n(y))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pk}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dy < \infty$$

$$\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{kp_1}{2}} (r(z))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pk}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dz < \infty$$

$$\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{q_1 q}{2}} (r(z))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pk}\right)} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dz < \infty$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{k}=1$ ve $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$ iken,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)g(y)h(z)|}{(m(x)+n(y)+r(z))} dxdydz$$

$$\leq \left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{qk}} B\left(\frac{1}{q_1 qk}, \frac{1}{p_1 qk}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{pp_1}{2}} (m(x))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{qk}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dx\right]^{\frac{1}{p_1 p}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{pq_1}{2}} (n(y))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{qk}\right)} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dy\right]^{\frac{1}{q_1 p}}$$

$$\times \left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pk}} B\left(\frac{1}{q_1 pk}, \frac{1}{p_1 pk}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{p_1 q}{2}} (n(y))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pk}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dy\right]^{\frac{1}{p_1 q}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{q_1 q}{2}} (r(z))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pk}\right)} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dz\right]^{\frac{1}{q_1 q}}$$

$$\times \left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pq}} B\left(\frac{1}{q_1 pq}, \frac{1}{p_1 pq}\right)\right]^{\frac{1}{k}} \left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{kp_1}{2}} (r(z))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pk}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dz\right]^{\frac{1}{p_1 k}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{kq_1}{2}} (m(x))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dx\right]^{\frac{1}{q_1 k}}, \tag{5.6}$$

dir. Burada

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{qk}} B\left(\frac{1}{q_1 qk}, \frac{1}{p_1 qk}\right), \quad \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pk}} B\left(\frac{1}{q_1 pk}, \frac{1}{p_1 pk}\right), \quad \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pq}} B\left(\frac{1}{q_1 pq}, \frac{1}{p_1 pq}\right)$$

mümkün olan en iyi sabitlerdir (Agwo 2009).

Lemma 5.5: $p_1 > 1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{k}=1$ ise $0<\varepsilon<\frac{1}{qk}$ ve $\lambda \geq 1$ için,

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv = B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+O(1) \qquad \varepsilon\to 0^+ \tag{5.7}$$

dir.
İspat:

$$\left|\int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv - B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)\right|$$

$$=\left|\int_0^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}-v^{\frac{1}{p_1qk}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv\right|$$

$$\leq \int_0^{1} \frac{\left|v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}-v^{\frac{1}{p_1qk}-1}\right|}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv+\int_1^{\infty} \frac{\left|v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}-v^{\frac{1}{p_1qk}-1}\right|}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv$$

$$\leq \int_0^{1}(v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}-v^{\frac{1}{p_1qk}-1})dv+\int_1^{\infty} \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-1}-v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{v^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}}-\frac{1}{\frac{1}{p_1qk}}+\frac{1}{\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1}-\frac{1}{\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1+\frac{\varepsilon}{p_1}}\to 0, \qquad \varepsilon\to 0.$$

Lemma 5.6: $p_1 > 1$, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1$, $p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{k}=1$ ise $0<\varepsilon<\frac{1}{qk}$ ve $\lambda \geq 1$ için burada,

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}}(m(x)+n(y))^{-\lambda+1}(m(x))^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1} \\ &\times (n(y))^{-\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{q_1}-1}\frac{dm(x)}{dx}\frac{dn(y)}{dy}dxdy, \end{aligned} \tag{5.8}$$

dir. Böylece $\varepsilon\to 0^+$ için

$$\frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+o(1)\right)-O(1)$$

$$\leq J_1 \leq \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+o(1)\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: y sabiti için, $m(x)=n(y)v$ olsun. Böylece (5.7) ile,

$$J_1 = \int_1^\infty (n(y))^{-\varepsilon-\lambda}\frac{dn(y)}{dy}\left[\int_{\frac{1}{n(y)}}^\infty \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv\right]dy$$

$$= \int_1^\infty (n(y))^{-\varepsilon-\lambda}\frac{dn(y)}{dy}\left[\int_0^\infty \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv\right]dy$$

$$- \int_1^\infty (n(y))^{-\varepsilon-\lambda}\frac{dn(y)}{dy}\left[\int_0^{\frac{1}{n(y)}} \frac{v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}}{(1+v)^{\frac{1}{qk}+\lambda-1}}dv\right]dy$$

$$\geq \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+O(1)\right)$$

$$- \int_1^\infty (n(y))^{-\varepsilon-\lambda}\frac{dn(y)}{dy}\left[\int_0^1 v^{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}dv\right]dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+O(1)\right)-\frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\frac{1}{\frac{1}{p_1qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+o(1)\right)-O(1)$$

bulunur. Aynı yolla,

$$J_1 \leq \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)+o(1)\right)$$

dir. Bu da lemmanın ispatıdır.

Teorem 5.2: Kabul edelim ki m, n, r, $[0,\infty)$ aralığı üzerinde artan fonksiyonlar, $m(0)=n(0)=r(0)=0$ ve $\lim_{x\to\infty} m(x)=\lim_{x\to\infty} n(x)=\lim_{x\to\infty} r(x)=\infty$ olsun. Ayrıca f, g, h fonksiyonları için,

$$\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{pp_1}{2}}(m(x))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{qk}+1-\lambda}\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}}dx<\infty$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{kq_1}{2}}(m(x))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)+1-\lambda}\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)}dx<\infty$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{pq_1}{2}}(n(y))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{qk}\right)+1-\lambda}\left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)}dy<\infty$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{p_1 q}{2}} (n(y))^{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{pk} + 1 - \lambda} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dy < \infty$$

$$\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{kp_1}{2}} (r(z))^{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{pq} + 1 - \lambda} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dz < \infty$$

$$\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{q_1 q}{2}} (r(z))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1 + \frac{1}{pk}\right) + 1 - \lambda} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k} + \frac{1}{p_1}\right)} dz < \infty$$

eşitsizlikleri sağlansın. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{k} = 1$ ve $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1, \ \ \lambda \geq 1$ ise

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x) g(y) h(z)|}{(m(x) + n(y) + r(z))^\lambda} dx dy dz$$

$$\leq \left[B\left(1 - \frac{1}{qk}, \frac{1}{qk} + \lambda - 1\right) \left(B\left(\frac{1}{q_1 qk}, \frac{1}{p_1 qk} + \lambda - 1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \right.$$

$$\left. \left(B\left(\frac{1}{p_1 qk}, \frac{1}{q_1 qk} + \lambda - 1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{pp_1}{2}} (m(x))^{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{qk} + 1 - \lambda} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dx \right]^{\frac{1}{p_1 p}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{pq_1}{2}} (n(y))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1 + \frac{1}{qk}\right) + 1 - \lambda} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k} + \frac{1}{p_1}\right)} dy \right]^{\frac{1}{q_1 p}}$$

$$\times \left[B\left(1 - \frac{1}{pk}, \frac{1}{pk} + \lambda - 1\right) \left(B\left(\frac{1}{q_1 pk}, \frac{1}{p_1 pk} + \lambda - 1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \right.$$

$$\left. \left(B\left(\frac{1}{p_1 pk}, \frac{1}{q_1 pk} + \lambda - 1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}} \right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{p_1 q}{2}} (n(y))^{\frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{pk} + 1 - \lambda} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dy \right]^{\frac{1}{p_1 q}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{q_1 q}{2}} (r(z))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1 + \frac{1}{pk}\right) + 1 - \lambda} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k} + \frac{1}{p_1}\right)} dz \right]^{\frac{1}{q_1 q}} \quad (5.9)$$

$$\times\left[B\left(1-\frac{1}{pq},\frac{1}{pq}+\lambda-1\right)\left(B\left(\frac{1}{q_1pq},\frac{1}{p_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\right.$$

$$\left.\left(B\left(\frac{1}{p_1pq},\frac{1}{q_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}\right]^{\frac{1}{k}}$$

$$\times\left[\int_0^{\infty}|h(z)|^{\frac{kp_1}{2}}(r(z))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pq}+1-\lambda}\left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}}dz\right]^{\frac{1}{p_1k}}$$

$$\times\left[\int_0^{\infty}|f(x)|^{\frac{kq_1}{2}}(m(x))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)+1-\lambda}\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)}dx\right]^{\frac{1}{q_1k}},$$

dir. Burada,

$$B\left(1-\tfrac{1}{qk},\tfrac{1}{qk}+\lambda-1\right)\left(B\left(\tfrac{1}{q_1qk},\tfrac{1}{p_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(B\left(\tfrac{1}{p_1qk},\tfrac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$B\left(1-\tfrac{1}{pk},\tfrac{1}{pk}+\lambda-1\right)\left(B\left(\tfrac{1}{q_1pk},\tfrac{1}{p_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(B\left(\tfrac{1}{p_1pk},\tfrac{1}{q_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$B\left(1-\tfrac{1}{pq},\tfrac{1}{pq}+\lambda-1\right)\left(B\left(\tfrac{1}{q_1pq},\tfrac{1}{p_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(B\left(\tfrac{1}{p_1pq},\tfrac{1}{q_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}},$$

sabit faktörleri mümkün olan en iyi sabit faktörlerdir.

İspat:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\tfrac{|f(x)g(y)h(z)|}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}}dxdydz \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\tfrac{|f(x)|^{\frac{1}{2}}|g(y)|^{\frac{1}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\frac{\lambda}{p}}}\left(\tfrac{m(x)+n(y)}{r(z)}\right)^{\frac{1}{pqk}}\left(\tfrac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{pqk}} \\
&\times\ (m(x)+n(y))^{\frac{-\lambda+1}{p}}\left(\tfrac{1}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{-\lambda+1}{p}}\left(\tfrac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-1}{k}} \\
&\times\ \tfrac{|g(y)|^{\frac{1}{2}}|h(z)|^{\frac{1}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\frac{\lambda}{q}}}\left(\tfrac{n(y)+r(z)}{m(x)}\right)^{\frac{1}{pqk}}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\times \quad (n(y)+r(z))^{\frac{-\lambda+1}{q}} \left(\frac{1}{n(y)+r(z)}\right)^{\frac{-\lambda+1}{q}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-1}{p}}$$

$$\times \quad \frac{|f(x)|^{\frac{1}{2}}|h(z)|^{\frac{1}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\frac{\lambda}{k}}} \left(\frac{r(z)+m(x)}{n(y)}\right)^{\frac{1}{pqk}} \left(\frac{m(x)}{m(x)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pqk}}$$

$$\times \quad (m(x)+r(z))^{\frac{-\lambda+1}{k}} \left(\frac{1}{m(x)+r(z)}\right)^{\frac{-\lambda+1}{k}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-1}{q}} dxdydz$$

(5.10) da Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$I \leq I_1^{\frac{1}{p}} I_2^{\frac{1}{q}} I_3^{\frac{1}{k}} \tag{5.11}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)|^{\frac{p}{2}}|g(y)|^{\frac{p}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{m(x)+n(y)}{r(z)}\right)^{\frac{1}{qk}} \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}} \\ &\times \quad (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} \left(\frac{1}{m(x)+n(y)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dr(z)}{dz} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p}{k}} dxdydz \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|g(y)|^{\frac{q}{2}}|h(z)|^{\frac{q}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{n(y)+r(z)}{m(x)}\right)^{\frac{1}{pk}} \left(\frac{r(z)}{n(y)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pk}} \\ &\times \quad (n(y)+r(z))^{-\lambda+1} \left(\frac{1}{n(y)+r(z)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dm(x)}{dx} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-q}{p}} dxdydz \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)|^{\frac{k}{2}}|h(z)|^{\frac{k}{2}}}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{r(z)+m(x)}{n(y)}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\frac{m(x)}{m(x)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pq}} \\ &\times \quad (m(x)+r(z))^{-\lambda+1} \left(\frac{1}{m(x)+r(z)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dn(y)}{dy} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-k}{q}} dxdydz \end{aligned} \tag{5.14}$$

şeklindedir. Kabul edelim ki ağırlık katsayısı,

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= \int_0^\infty \frac{1}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{m(x)+n(y)}{r(z)}\right)^{\frac{1}{qk}} \left(\frac{1}{m(x)+n(y)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dr(z)}{dz}dz \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{(m(x)+n(y))^{\lambda}\left(1+\frac{r(z)}{m(x)+n(y)}\right)^{\lambda}} \left(\frac{m(x)+n(y)}{r(z)}\right)^{\frac{1}{qk}} \left(\frac{1}{m(x)+n(y)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dr(z)}{dz}dz \end{aligned} \tag{5.15}$$

olsun. (5.15) de $v = \dfrac{r(z)}{m(x)+n(y)}$ olarak alınırsa,

$$w_1(x,y) = B\left(1-\frac{1}{qk}, \frac{1}{qk}+\lambda-1\right) \tag{5.16}$$

bulunur. Benzer olarak,

$$w_2(y,z) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{n(y)+r(z)}{m(x)}\right)^{\frac{1}{pk}} \left(\frac{1}{n(y)+r(z)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dm(x)}{dx} dx \tag{5.17}$$

ifadesinde $v = \dfrac{m(x)}{n(y)+r(z)}$ alınırsa,

$$w_2(y,z) = B\left(1-\frac{1}{pk}, \frac{1}{pk}+\lambda-1\right) \tag{5.18}$$

$$w_3(x,z) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{(m(x)+n(y)+r(z))^{\lambda}} \left(\frac{r(z)+m(x)}{n(y)}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\frac{1}{m(x)+r(z)}\right)^{-\lambda+1} \frac{dn(y)}{dy} dy \tag{5.19}$$

olur. Yine (5.19) da $v = \dfrac{n(y)}{r(z)+m(x)}$ alınarak,

$$w_3(x,z) = B\left(1-\frac{1}{pq}, \frac{1}{pq}+\lambda-1\right) \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.16), (5.18), (5.20) ve (5.11) ifadeleri aynı anda göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} I \leq & \left[B\left(1-\frac{1}{qk}, \frac{1}{qk}+\lambda-1\right) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}} (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} \right. \\ & \left. |f(x)|^{\frac{p}{2}} |g(y)|^{\frac{p}{2}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p}{k}} dxdy \right]^{\frac{1}{p}} \\ \times & \left[B\left(1-\frac{1}{pk}, \frac{1}{pk}+\lambda-1\right) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{r(z)}{n(y)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pk}} (n(y)+r(z))^{-\lambda+1} \right. \\ & \left. |g(y)|^{\frac{q}{2}} |h(z)|^{\frac{q}{2}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-q}{p}} dydz \right]^{\frac{1}{q}} \\ \times & \left[B\left(1-\frac{1}{pq}, \frac{1}{pq}+\lambda-1\right) \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \left(\frac{m(x)}{m(x)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pq}} (m(x)+r(z))^{-\lambda+1} \right. \\ & \left. |f(x)|^{\frac{k}{2}} |h(z)|^{\frac{k}{2}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-k}{q}} dxdz \right]^{\frac{1}{k}} \end{aligned} \tag{5.21}$$

yazılır. (5.21) in sağ tarafındaki ilk integralde, $p_1 > 1,\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1$ şartı altında Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)} \right)^{\frac{1}{qk}} (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} |f(x)|^{\frac{p}{2}} |g(y)|^{\frac{p}{2}} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{-p}{k}} dxdy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|^{\frac{p}{2}} (m(x))^{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}}}{(m(x)+n(y))^{\frac{1}{p_1 qk}}} \left(\frac{n(y)}{m(x)} \right)^{\frac{1}{p_1 q_1 qk} - \frac{1}{p_1}}$$

$$\times (m(x)+n(y))^{\frac{-\lambda+1}{p_1}} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\frac{dm(x)}{dx} \right)^{\frac{-1}{q_1}}$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|g(y)|^{\frac{p}{2}} (n(y))^{\frac{1}{qk} + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}}}{(m(x)+n(y))^{\frac{1}{q_1 qk}}} \left(\frac{m(x)}{n(y)} \right)^{\frac{1}{p_1 q_1 qk} - \frac{1}{q_1}}$$

$$\times (m(x)+n(y))^{\frac{-\lambda+1}{q_1}} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{-p}{k} - \frac{1}{p_1}} \left(\frac{dm(x)}{dx} \right)^{\frac{1}{q_1}} dydx$$

$$\le \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x)|^{\frac{pp_1}{2}} \left(\frac{n(y)}{m(x)} \right)^{\frac{1}{q_1 qk} - 1} (m(x))^{\frac{p_1}{q_1} - 1}}{(m(x)+n(y))^{\frac{1}{qk}}} \right. \tag{5.22}$$

$$\left. (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} \frac{dn(y)}{dy} \left(\frac{dm(x)}{dx} \right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dydx \right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\times \left[\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|g(y)|^{\frac{pq_1}{2}} (n(y))^{\frac{q_1}{qk} + \frac{q_1}{p_1} - 1}}{(m(x)+n(y))^{\frac{1}{qk}}} \left(\frac{m(x)}{n(y)} \right)^{\frac{1}{p_1 qk} - 1} \right.$$

$$\left. (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{-pq_1}{k} - \frac{q_1}{p_1}} \frac{dm(x)}{dx} dydx \right]^{\frac{1}{q_1}}$$

elde edilir. Kabul edelim ki,

$$w_4(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\left(1 + \frac{n(y)}{m(x)}\right)^{\frac{1}{qk}}} \left(\frac{n(y)}{m(x)} \right)^{\frac{1}{q_1 qk} - 1} (m(x))^{-\lambda+1} \left(1 + \frac{n(y)}{m(x)} \right)^{-\lambda+1} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right) dy \tag{5.23}$$

olsun. Burada $v = \dfrac{n(y)}{m(x)}$ olarak alınırsa,

$$w_4(x) = (m(x))^{-\lambda+2} B\left(\frac{1}{q_1 qk}, \frac{1}{p_1 qk} + \lambda - 1 \right) \tag{5.24}$$

olacaktır. Aynı şekilde,

$$w_5(y)=\int_0^\infty \frac{1}{\left(1+\frac{m(x)}{n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}}}\left(\frac{m(x)}{n(y)}\right)^{\frac{1}{p_1qk}-1}(n(y))^{-\lambda+1}\left(1+\frac{m(x)}{n(y)}\right)^{-\lambda+1}\frac{dm(x)}{dx}dx \tag{5.25}$$

(5.25) ifadesinde $v=\dfrac{m(x)}{n(y)}$ alınarak,

$$w_5(y)=(n(y))^{-\lambda+2}B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right) \tag{5.26}$$

yazılır. $(5.22),(5.24)$ ve (5.26) birlikte düşünülerek,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)}\right)^{\frac{1}{qk}}(m(x)+n(y))^{-\lambda+1}|f(x)|^{\frac{p}{2}}|g(y)|^{\frac{p}{2}}\left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p}{k}}dxdy\\
&\le\left(B\left(\frac{1}{q_1qk},\frac{1}{p_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\times\left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{pp_1}{2}}(m(x))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{qk}+1-\lambda}\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}}dx\right]^{\frac{1}{p_1}}\\
&\times\left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{pq_1}{2}}(n(y))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{qk}\right)+1-\lambda}\left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)}dy\right]^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. (5.21) in sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü integrallerde de, (5.27) yi elde etmek için izlediğimiz adımların benzerlerini takip ederek,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{r(z)}{n(y)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pk}}(n(y)+r(z))^{-\lambda+1}|g(y)|^{\frac{q}{2}}|h(z)|^{\frac{q}{2}}\left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-q}{p}}dydz\\
&\le\left(B\left(\frac{1}{q_1pk},\frac{1}{p_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(B\left(\frac{1}{p_1pk},\frac{1}{q_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\quad\times\left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{p_1q}{2}}(n(y))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pk}+1-\lambda}\left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}}dy\right]^{\frac{1}{p_1}}\\
&\quad\times\left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{q_1q}{2}}(r(z))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pk}\right)+1-\lambda}\left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)}dz\right]^{\frac{1}{q_1}},
\end{aligned} \tag{5.28}$$

elde ederiz ve buradan,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \left(\frac{m(x)}{m(x)+r(z)}\right)^{\frac{1}{pq}} (m(x)+r(z))^{-\lambda+1} |f(x)|^{\frac{k}{2}} |h(z)|^{\frac{k}{2}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-k}{q}} dxdz$$

$$\le \left(B\left(\frac{1}{q_1pq},\frac{1}{p_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(B\left(\frac{1}{p_1pq},\frac{1}{q_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{kp_1}{2}} (r(z))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{pq}+1-\lambda} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dz\right]^{\frac{1}{p_1}} \tag{5.29}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{kq_1}{2}} (m(x))^{\frac{q_1}{p_1}\left(1+\frac{1}{pq}\right)+1-\lambda} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)} dx\right]^{\frac{1}{q_1}}$$

bulunur. Buradaki

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \left(B\left(\frac{1}{q_1qk},\frac{1}{p_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(B\left(\frac{1}{p_1qk},\frac{1}{q_1qk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
\gamma_2 &= \left(B\left(\frac{1}{q_1pk},\frac{1}{p_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(B\left(\frac{1}{p_1pk},\frac{1}{q_1pk}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}} \\
\gamma_3 &= \left(B\left(\frac{1}{q_1pq},\frac{1}{p_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(B\left(\frac{1}{p_1pq},\frac{1}{q_1pq}+\lambda-1\right)\right)^{\frac{1}{q_1}}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunan γ_1 ,γ_2 ,γ_3 ün mümkün olan en iyi sabit faktörler olduğunu ispat edelim. Kabul edelim ki γ_1 mümkün olan en iyi sabit faktör olmasın. Bu durumda α_1 pozitif sabiti vardır ki $\alpha_1 < \gamma_1$ ve γ_1 yerine α_1 yazdığımızda da (5.27) sağlanır. Genelliği bozmadan kabul edelim ki $m(1) = n(1) = 1$, $0 < \varepsilon < 1$ için f_ε ve g_ε seçelim. $x \in [1,\infty)$ için $f_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x) = 0$ olmak üzere, $x \in (0,1)$ için

$$|f_\varepsilon(x)| = (m(x))^{\frac{2}{pp_1}\left(-\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{qk}-\varepsilon-1\right)} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{2}{pp_1}\left(\frac{p_1}{q_1}+1\right)}$$

$$|g_\varepsilon(x)| = (n(x))^{\frac{2}{pq_1}\left(-\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_1-1}{qk}-\varepsilon-1\right)} \left(\frac{dn(x)}{dx}\right)^{\frac{2}{pq_1}\left(q_1\left(\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}\right)+1\right)}$$

olarak seçelim. Bu durumda,

$$\alpha_1\left[\int_0^\infty (m(x))^{-\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{qk}-\varepsilon-1+\frac{p_1}{q_1}+1-\frac{1}{qk}-\lambda} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\left(\frac{p_1}{q_1}+1-\frac{p_1}{q_1}\right)} dx\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty (n(y))^{-\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_1-1}{qk}-\varepsilon-1+\frac{q_1}{p_1}+\frac{q_1}{p_1qk}+1-\lambda} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{1+\frac{q_1p}{k}+\frac{q_1}{p_1}-\frac{pq_1}{k}-\frac{q_1}{p_1}} dy\right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \alpha_1 \left[\int_1^\infty (m(x))^{-\varepsilon-\lambda} \frac{dm(x)}{dx} dx \right]^{\frac{1}{p_1}} \left[\int_1^\infty (n(y))^{-\varepsilon-\lambda} \frac{dn(y)}{dy} dy \right]^{\frac{1}{q_1}}$$

$$= \frac{\alpha_1}{\varepsilon+\lambda-1}$$

olacaktır. Fakat

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)} \right)^{\frac{1}{qk}} (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} |f(x)|^{\frac{p}{2}} |g(y)|^{\frac{p}{2}} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{-p}{k}} dxdy$$

$$= \int_1^\infty \int_1^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)} \right)^{\frac{1}{qk}} (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} (m(x))^{\frac{1}{p_1}\left(-\frac{p_1}{q_1}+\frac{1}{qk}-\varepsilon-1\right)}$$

$$\times (n(y))^{\frac{1}{q_1}\left(-\frac{q_1}{p_1}-\frac{q_1}{p_1 qk}-\varepsilon-1\right)} \left(\frac{dm(x)}{dx} \right)^{\frac{1}{p_1}\left(\frac{p_1}{q_1}+1\right)} \left(\frac{dn(y)}{dy} \right)^{\frac{1}{q_1}+\frac{p}{k}+\frac{1}{p_1}-\frac{p}{k}} dxdy$$

$$\int_1^\infty \int_1^\infty \left(\frac{n(y)}{m(x)+n(y)} \right)^{\frac{1}{qk}} (m(x)+n(y))^{-\lambda+1} (m(x))^{\frac{1}{p_1 qk}-\frac{\varepsilon}{p_1}-1}$$

$$\times (n(y))^{-\frac{1}{p_1 qk}-\frac{\varepsilon}{q_1}-1} \frac{dm(x)}{dx} \frac{dn(y)}{dy} dxdy = J_1 \geq \frac{1}{\varepsilon+\lambda-1} (\gamma_1 + o(1)) - O(1)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\frac{1}{\varepsilon+\lambda-1} (\gamma_1 + o(1)) - O(1) \quad < \quad \frac{\alpha_1}{\varepsilon+\lambda-1}$$

veya

$$\gamma_1 + o(1) - (\varepsilon+\lambda-1) O(1) \quad < \quad \alpha_1$$

bulunur. $\varepsilon \to 0^+$ iken $\gamma_1 < \alpha_1$ dir. Buda $\alpha_1 < \gamma_1$ ile çelişir. Bu nedenle (5.27) deki γ_1 mümkün olan en iyi sabit faktördür. Benzer olarak γ_2 ve γ_3 de mümkün olan en iyi sabit faktörlerdir. (5.27), (5.28) ve (5.29) eşitsizlikleri (5.21) de yerine yazılarak, teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1: $\lambda = 1$ için (5.9) da $p = q = k = 3$ olarak alınırsa,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x) g(y) h(z)|}{m(x)+n(y)+r(z)} dxdydz$$

$$\leq \left[\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{9}} B\left(\frac{1}{9q_1}, \frac{1}{9p_1} \right) \right] \left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{3p_1}{2}} (m(x))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}} \left(\frac{dm(x)}{dx} \right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dx \right]^{\frac{1}{3p_1}} \tag{5.30}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{3q_1}{2}} (n(y))^{\frac{10q_1}{9p_1}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)} dy\right]^{\frac{1}{3q_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |g(y)|^{\frac{3p_1}{2}} (n(y))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dy\right]^{\frac{1}{3p_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{3q_1}{2}} (r(z))^{\frac{10q_1}{9p_1}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)} dz\right]^{\frac{1}{3q_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |h(z)|^{\frac{3p_1}{2}} (r(z))^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-p_1}{q_1}} dz\right]^{\frac{1}{3p_1}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |f(x)|^{\frac{3q_1}{2}} (m(x))^{\frac{10q_1}{9p_1}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)} dx\right]^{\frac{1}{3q_1}}$$

şeklinde yeni bir eşitsizlik elde ederiz.

Sonuç 5.2: $\lambda = 1$ için (5.9) da $p_1 = q_1 = 2$ olarak alınırsa,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(x)\,g(y)\,h(z)|}{m(x)+n(y)+r(z)} dxdydz$$

$$\leq \left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{qk}} B\left(\frac{1}{2qk}, \frac{1}{2qk}\right)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^\infty |f(x)|^p (m(x))^{1-\frac{1}{qk}} \left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{-1} dx\right]^{\frac{1}{2p}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |g(y)|^p (n(y))^{1+\frac{1}{qk}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{\frac{-2p}{k}-1} dy\right]^{\frac{1}{2p}} \tag{5.31}$$

$$\times \left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pk}} B\left(\frac{1}{2pk}, \frac{1}{2pk}\right)\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^\infty |g(y)|^q (n(y))^{1-\frac{1}{pk}} \left(\frac{dn(y)}{dy}\right)^{-1} dy\right]^{\frac{1}{2q}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty |h(z)|^q (r(z))^{1+\frac{1}{pk}} \left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{\frac{-2p}{k}-1} dz\right]^{\frac{1}{2q}}$$

$$\times\left[\frac{\Pi}{\sin\frac{\Pi}{pq}}B\left(\frac{1}{2pq},\frac{1}{2pq}\right)\right]^{\frac{1}{k}}\left[\int_0^\infty|h(z)|^k(r(z))^{1-\frac{1}{pq}}\left(\frac{dr(z)}{dz}\right)^{-1}dz\right]^{\frac{1}{2k}}$$

$$\times\left[\int_0^\infty|f(x)|^k(m(x))^{1+\frac{1}{pq}}\left(\frac{dm(x)}{dx}\right)^{\frac{-2p}{k}-1}dx\right]^{\frac{1}{2k}}$$

bulabiliriz.

Sonuç 5.3: $\lambda=1$ için (5.30) ve (5.31) de $m(x)=e^x-1$, $n(y)=e^y-1$, $r(z)=e^z-1$ olarak alınırsa sırasıyla,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|f(x)g(y)h(z)|}{e^x+e^y+e^z-3}dxdydz\\
&\le\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{9}}B\left(\frac{1}{9q_1},\frac{1}{9p_1}\right)\left[\left(\int_0^\infty|f(x)|^{\frac{3p_1}{2}}(e^x-1)^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}}(e^x)^{-\frac{p_1}{q_1}}dx\right)\right.\\
&\left(\int_0^\infty|g(y)|^{\frac{3p_1}{2}}(e^y-1)^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}}(e^y)^{-\frac{p_1}{q_1}}dy\right)\\
&\left.\left(\int_0^\infty|h(z)|^{\frac{3p_1}{2}}(e^z-1)^{\frac{p_1}{q_1}-\frac{1}{9}}(e^z)^{-\frac{p_1}{q_1}}dz\right)\right]^{\frac{1}{3p_1}}\\
&\qquad\times\left[\left(\int_0^\infty|f(x)|^{\frac{3q_1}{2}}(e^x-1)^{\frac{10q_1}{9p_1}}(e^x)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)}dx\right)\right.\\
&\qquad\left(\int_0^\infty|g(y)|^{\frac{3q_1}{2}}(e^y-1)^{\frac{10q_1}{9p_1}}(e^y)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)}dy\right)\\
&\qquad\left.\left(\int_0^\infty|h(z)|^{\frac{3q_1}{2}}(e^z-1)^{\frac{10q_1}{9p_1}}(e^z)^{-q_1\left(1+\frac{1}{p_1}\right)}dz\right)\right]^{\frac{1}{3q_1}}.
\end{aligned}\tag{5.32}$$

ve

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|f(x)g(y)h(z)|}{e^x+e^y+e^z-3}dxdydz$$

$$\le\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{qk}}B\left(\frac{1}{2qk},\frac{1}{2qk}\right)\right]^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^\infty|f(x)|^p(e^x-1)^{1-\frac{1}{qk}}e^{-x}dx\right)\right.$$

$$\left.\left(\int_0^\infty|g(y)|^p(e^y-1)^{1+\frac{1}{qk}}(e^y)^{\frac{-2p}{k}-1}dy\right)\right]^{\frac{1}{2p}}$$

$$\times\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pk}}B\left(\frac{1}{2pk},\frac{1}{2pk}\right)\right]^{\frac{1}{q}}\left[\left(\int_0^\infty|g(y)|^q(e^y-1)^{1-\frac{1}{pk}}e^{-y}dy\right)\right.$$

$$\left.\left(\int_0^\infty|h(z)|^q(e^z-1)^{1+\frac{1}{pk}}(e^z)^{\frac{-2p}{k}-1}dz\right)\right]^{\frac{1}{2q}} \tag{5.33}$$

$$\times\left[\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{pq}}B\left(\frac{1}{2pq},\frac{1}{2pq}\right)\right]^{\frac{1}{k}}\left[\left(\int_0^\infty|h(z)|^k\ (e^z-1)^{1-\frac{1}{pq}}e^{-z}dz\right)\right.$$

$$\left.\left(\int_0^\infty|f(x)|^k(e^x-1)^{1+\frac{1}{pq}}(e^x)^{\frac{-2p}{k}-1}dx\right)\right]^{\frac{1}{2k}}.$$

elde edilir.

Sonuç 5.4: $\lambda\geq 1$ için (5.9) da $m(x)=x$, $n(y)=y$, $r(z)=z$, $p_1=q_1=2$ olarak alınırsa,

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{|f(x)g(y)h(z)|}{(x+y+z)^\lambda}dxdydz$$

$$\leq\left[B\left(1-\frac{1}{qk},\frac{1}{qk}+\lambda-1\right)B\left(\frac{1}{2qk},\frac{1}{2qk}+\lambda-1\right)\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^\infty|f(x)|^px^{2-\frac{1}{qk}-\lambda}dx\right)\left(\int_0^\infty|g(y)|^py^{2+\frac{1}{qk}-\lambda}dy\right)\right]^{\frac{1}{2p}}$$

$$\times\left[B\left(1-\frac{1}{pk},\frac{1}{pk}+\lambda-1\right)B\left(\frac{1}{2pk},\frac{1}{2pk}+\lambda-1\right)\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\times\left[\left(\int_0^\infty|g(y)|^qy^{2-\frac{1}{pk}-\lambda}dy\right)\left(\int_0^\infty|h(z)|^qz^{2+\frac{1}{pk}-\lambda}dz\right)\right]^{\frac{1}{2q}}$$

$$\times\left[B\left(1-\frac{1}{pq},\frac{1}{pq}+\lambda-1\right)B\left(\frac{1}{2pq},\frac{1}{2pq}+\lambda-1\right)\right]^{\frac{1}{k}} \tag{5.34}$$

$$\times\left[\left(\int_0^\infty|h(z)|^kz^{2-\frac{1}{pq}-\lambda}dz\right)\left(\int_0^\infty|f(x)|^kx^{2+\frac{1}{pq}-\lambda}dx\right)\right]^{\frac{1}{2k}}$$

eşitsizliğini elde edebiliriz.

KAYNAKLAR

Agwo, H.A. (2009). A new extension of Hilbert's inequality for multifunctions with best constant factors. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **78, 2:** 255-267.

Andrews, Larry C. (1985). Special functions for engineers and Applied Mathematicians. Macmillan Publishing Company, New York.

Bayram, A.G. and Yıldırım, H. (2010). A New Kind of Hardy- Hilbert Type Integral Inequality. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Issn: 1311-8080, **63**: Issue. 4.

Bekken, O., Fauvel, J., Johansson, B., Katz, V., Swetz, F. (1997). Learn from the masters!. The Mathematical Association of America. 298-299.

Bellman, R., Beckenbach, E.F. (1961). Inequalities. Springer, Berlin.

Caferov, V. (1999). Analiz. TC Anadolu üniversitesi yayınları no: 1082. 251.

Hardy, G. (1925). Note on a theorem of Hilbert concerning series positive terms. *Proceedings London Mathematical Society*, *Records of proceedings*, XLV-XLIV, **23(2)**.

Hardy, G., Littlewood, J.E. and Pólya, G. (1952). Inequalities. Cambridge University Press, Cambridge.

He, Bing (2011). A Reverse Hilbert-Type Inequality with A Generalized Homogeneous Kernel. *Tamkang Journal Of Mathematics*, **42:** 1, 1-7.

Jeffrey, A., Dai, H-H. (2008). Handbook of Mathematical Formulas and Integrals. Elsevier Inc. 4. Edition, 589, UK.

Krnic, M., Mingzhe, Gao, Pećarić, J.E. and Xuemel, Gao (2005). On the best constant in Hilbert's inequality. *Mathematical Inequalities and Applications*, **8(2)**: 317-329.

Kuang, Jichang (1999). On new extensions of Hilbert's integral inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **235(2)**: 608-614.

Kuang, Jichang (2004). Applied Inequalities. 3nd. ed. Shandong Science and Technology Press, 534-535.

Lin, Peng and Mingzhe, Gao (2009). A Note on Hardy-Hilbert Type Integral Inequality. *International Journal of Mathematical Analysis*, **3**: 33, 1607-1616.

Mitrinovic, D.S. (1970).Analytic Inequalities. Springer-Verlag, Berlin.

Mitrinovic, D.S., Pećarić, J.E. and Fink, A.M. (1991).“Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives.” Kluwer, Boston.

Mitrinović, D.S., Pećarić, J.E. and Fink, A.M. (1993). Classical and New inequalities in Analysis, Mathematics and its applications (Eastern European Series). Kluwer Academic Publishers, Dordrecth, Boston and London.

Pachpatte, B.G. (2005). Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., **67:** 606.

Sun, B. (2006). Best generalization of Hilbert type inequality. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **7(3)**: Art 113.

Yang, B. and Debnath, L. (2002). On the extended Hardy-Hilbert inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **272(1)**: 187-199.

Yongjin, L.I., Jing, W.U., Bing, H.E. (2006). A new Hilbert type inequality and the equivalent form. *International Journal of Mathematics andMathematical sciences*. Article ID. 45378, 1-6.

Yuming, Jin (2006). Applied Integral Tables. Hefei: Chinese Science and Technology University Press, 247, formula: 1373.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Ayşe Gülsüm ERTAŞ
Doğum Yeri	:	Afyonkarahisar
Doğum Tarihi	:	06.09.1979
Medeni Hali	:	Evli
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim	:	0 539 286 61 60 / aysegbayram@yahoo.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Afyon Lisesi, 1997
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2001
Yüksek Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 2007

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Susuz İlköğretim Okulu 2001-2004

İscehisar Mehmet Çakmak Anadolu Lisesi 2004-2010

Afyon Lisesi 2010-...

Yayınları

1. Bayram, A.G. and Yıldırım, H. (2010). A New Kind of Hardy-Hilbert Type Integral Inequality. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Issn:1311-8080 Vol. **63**, Issue. 4.