KÜME DİZİLERİNİN İNVARYANT İSTATİSTİKSEL VE LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

DOKTORA TEZİ

Nimet PANCAROĞLU

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS, 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KÜME DİZİLERİNİN İNVARYANT İSTATİSTİKSEL VE LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Nimet PANCAROĞLU

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS, 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Nimet PANCAROĞLU tarafından hazırlanan "Küme Dizilerinin İnvaryant İstatistiksel ve Lacunary İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklığı "adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 30/05/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan : Prof. Dr. Ekrem SAVAŞ
İstanbul Ticaret Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER
Afyon Kocatepe Üniv. Eğitim Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Ed. Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2014 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02/06/2014

Nimet PANCAROĞLU

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DİZİLERİNİN İNVARYANT İSTATİSTİKSEL
VE LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL
YAKINSAKLIĞI

Nimet PANCAROĞLU
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde, çalıştığımız konu ile ilgili kavramların tarihsel gelişiminden bahsedildi. İkinci bölümde, çalışmamız için temel teşkil eden tanım, notasyon ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaklık ile Wijsman invaryant istatistiksel yakınsaklık ve Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık ile Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Dördüncü bölümde, f modülüs fonksiyonunu kullanarak, Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaklık, Wijsman invaryant istatistiksel yakınsaklık, Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık, Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı. Bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. Son bölümde ise, asimtotik invaryant denklik(Wijsman anlamında), asimptotik invaryant istatistiksel denklik, asimptotik lacunary invaryant denklik, asimtotik lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramları tanımlanıp bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi.
2014, v+70 sayfa

Anahtar Kelimeler : İnvaryant istatistiksel yakınsaklık, lacunary dizi, küme dizisi, Wijsman yakınsaklık, modülüs fonksiyonu, asimtotik denklik.

ABSTRACT

Ph.D.

INVARIANT STATISTICAL AND
LACUNARY INVARIANT STATISTICAL
CONVERGENCE OF SEQUENCES OF SETS

Nimet PANCAROĞLU
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, historical development of related notions of the subject was mentioned. In the second chapter, some basic definitions, notions and theorems related to study were given. In the third chapter, relationships between Wijsman strongly invariant convergence, Wijsman invariant statistical convergence and relationships between Wijsman strongly lacunary invariant convergence, Wijsman lacunary invariant statistical convergence for sequences of set were examined. In the fourth chapter, by using f modulus function, Wijsman strongly invariant convergence, Wijsman invariant statistical convergence, Wijsman strongly lacunary invariant convergence and Wijsman lacunary invariant statistical convergence for sequences of set were defined. Relationships between these concepts were examined. In the final chapter, the concepts of asymptotic invariant equivalence(Wijsman sense), asymptotic lacunary invariant equivalence, asymptotic invariant statistical equivalence and asymptotic lacunary invariant statistical equivalence for sequences of set were defined. Relationships between these concepts were examined.

2014, v+70 pages

Key Words : Invariant statistical convergence, lacunary sequence, sequences of sets, Wijsman convergence, modulus function, asymptotic equivalence.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca, tez konumu belirleyip bu konuda bana engin bilgi ve tecrübesiyle destek veren, sabırla çalışmam konusunda yol gösteren saygıdeğer hocam Prof.Dr. Fatih NURAY'a teşekkürü bir borç bilirim.

Engin bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olan ve beni destekleyen Prof.Dr. Ekrem Savaş'a teşekkür ederim.

Tezimi yazdığım süreç boyunca destek ve yardımlarını esirgemeyen Yrd.Doç.Dr.Uğur Ulusu'ya, Yrd.Doç.Dr. Yurdal Sever'e ve Yrd.Doç.Dr. Erdinç Dündar'a teşekkür ederim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nimet PANCAROĞLU

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
(X,ρ)	Metrik uzay
$\lvert K\rvert$	K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_k)	Reel sayı dizisi
$\theta=\{k_r\}$	Lacunary dizisi
$S_{\sigma\theta}-\lim x_k$	(x_k) dizisinin lacunary invaryant istatistiksel limiti
$\{A_k\}$	Küme dizisi
$[WV_\sigma]$	Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak dizi uzayı
$[WN_{\sigma\theta}]$	Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizi uzayı
$S_\sigma-\lim_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman invaryant istatistiksel limiti
$S_{\sigma\theta}-\lim_W A_k$	$\{A_k\}$ dizisinin Wijsman lacunary invaryant istatistiksel limiti
WS_σ	Wijsman invaryant istatistiksel yakınsak dizi uzayı
$WS_{\sigma\theta}$	Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsak dizi uzayı
L_∞	Sınırlı kümelerin dizi uzayı
$[WV_\sigma(f)]$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak dizi uzayı
$[WV_\sigma(f)]_\infty$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan sınırlı Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak dizi uzayı
$[WN_{\sigma\theta}(f)]$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizi uzayı
$[WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty$	Modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan sınırlı Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak dizi uzayı
$\overset{[WV]^L_\sigma}{\sim}$	Kuvvetli asimptotik invaryant denk (Wisjman anlamında)
$\overset{WS^L_\sigma}{\sim}$	Asimptotik invaryant istatistiksel denk (Wisjman anlamında)
$\overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim}$	Kuvvetli asimptotik lacunary invaryant denk (Wisjman anlamında)
$\overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim}$	Asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denk (Wisjman anlamında)

1 GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonel analiz alanının temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise toplanabilme teorisinde ve fonksiyonel analizde büyük öneme sahiptir. 1951' de Fast'in istatistiksel yakınsak kavramını tanımlanmasından bu yana bu kavramın uygulamaları ve birkaç genelleştirmesi Buck (1953), Schoenberg (1959), Maddox (1978), Šalát (1980), Fridy (1985), Fridy ve Orhan (1985), Nuray ve Ruckle (2000) ve daha pekçok araştırmacı tarafından verilmiştir.

Freedman, Sember ve Raphael (1978) yaptıkları bir çalışmada θ lacunary dizisi yardımıyla tanımlanan N_θ kuvvetli lacunary toplanabilir dizi uzayı ile $|\sigma_1|$ kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzayı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve kuvvetli p-Cesàro toplanabilirlik kavramları arasındaki ilişkileri Connor 1988'de yaptığı bir çalışmada vermiştir.

Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizisi kavramını kullanarak, istatistiksel yakınsaklıkla ilişkiler bulan ve yine yakınsaklık alanında önemli yer tutan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Fridy ve Orhan (1993) bu çalışmalarında; başta istatistiksel yakınsaklık kavramı olmak üzere diğer toplanabilme metodları ile lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkileri incelemişlerdir.

İnvaryant yakınsaklık son elli yılda birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Banach(1932) tarafından çalışmada bu konunun temelleri verilmiştir. Lorentz (1948) ve Hardy(1949) tarafından ıraksak seriler üzerine çalışırken bu yönde çalışmalar yapılmıştır. 1959'da Raimi tarafından genelleştirilmiş Banach limitlerini incelenmiştir. İnvaryant yakınsaklık üzerine Raimi (1963), Bell (1929), Schafer (1972), Miller (1973), Savaş (1989), Savaş ve Nuray (1994), Mursaleen (1979, 1983), Ahmad, Mursaleen and Khan (1994), Boss and Seydal (1999), Savaş ve Rhoades (2002), Mursaleen and Edely (2009), Aiyub and Khan (2010) ve daha birçok araştırmacı çalışmalar yapmıştır.

Kuvvetli lacunary invaryant yakınsaklık kavramını tanımlayan Savaş (1990) invaryant yakınsaklıkla arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Savaş ve Nuray (1993) invaryant istatistiksel yakınsaklık ile lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanımlayıp arasındaki ilişkileri yaptıkları çalışmalarda göstermiştir. Savaş (1990), Savaş ve Nuray (1993), Karakaya ve Şimşek $(2003 - 2004)$, Karakaya (2004), Savaş ve Savaş (2003), ve daha birçok araştırmacı tarafından çalışmalar yapılmıştır.

Modülüs fonksiyonun tanımı Nakono (1953) tarafından verilmiştir. Daha sonra Ruckle(1973), $\{e_1, e_2 \ldots\}$ birim vektörlerinin sınırlı cümlesini bulunduran en küçük FK uzayı var mıdır? sorusuna cevap ararken

$$L(f) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) < \infty\}$$

dizi uzayını f modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlamıştır. Maddox (1986), kuvvetli Cesàro toplanabilme tanımının genelleştirmesi olan modülüs yardımıyla kuvvetli Cesàro toplanabilen dizilerin uzayını $w(f)$ olarak tanımlamıştır. Daha sonra Connor (1989), Maddox'un tanımındaki Cesàro matrisi yerine herhangi negatif olmayan regüler matrisi alarak $w(A, f)$ toplanablime tanımına genelleştirilmiştir.

Modülüs fonksiyonunu kullanarak Nuray ve Savaş (1993,1994), Savaş $(1992, 1999)$, Pehlivan (1989), Pehlivan ve Fisher $(1994, 1995)$ ve bir çok kişi tarafından çeşitli dizi uzayları tanımlanmış ve bunların çeşitli özellikleri incelenmiştir.

Küme dizileri için yakınsaklık kavramı ise daha çok 1980 li yıllarda araştırmalara konu olmaya başlamış ve bu konudaki çalışmalar başta Beer $(1985, 1989, 2002)$ olmak üzere; Wijsman $(1964, 1966)$, Salinetti and Wets (1979), Lucchetti (1985), Lechicki and Levi (1987), Baronti and Papini (1986) ve diğer birçok araştırmacı tarafından yapılmıştır. Araştırmacılar tarafından yapılan bu çalışmalarda küme dizileri için verilen yakınsaklık kavramlarından en yaygın olarak kullanılanlardan birkaç tanesi; "Hausdorff yakınsaklık (H)", "Kuratowski yakınsaklık (K)" ve "Wijsman yakınsaklık (W)" tır. Bu yakınsaklık tiplerinden (K) ve (H) uzun zaman önce araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. (W) yakınsaklık için Lechicki and Levi (1985) ve Wijsman (1964, 1966) ve Beer (1994) bazı çalışmalar yapmışlardır. Baronti and Papini (1986) yaptıkları bir çalışma ile küme dizileri için (K), (H) ve (W) yakınsaklık arasındaki ilişkileri göstermişlerdir.

Nuray ve Rhoades (2012) tarafından yapılan bir çalışmada küme dizileri için Wijsman istatistiksel yakınsaklık, Kuratowski istatistiksel yakınsaklık ve Hausdoff istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

Pobyvanets (1980) reel sayı dizilerin asimptotik denklik ve asimptotik regüler matris tanımlarını vermiştir. Negatif terimli olmayan diziden diziye bir A dönüşümünün asimptotik regular olması için gerek ve yeter şartları elde etmiştir. 1993'te Marouf ve 1997'de Li bu oranlar üzerinde çalışmışlardır. Patterson (2003) asimptotik istatistiksel denk dizileri tanımlamıştır. Patterson and Savaş (2006)'da asimptotik lacunary denk dizileri ve asimptotik lacunary istatistiksel denk dizileri tanımlamıştır. Yine Savaş ve Patterson (2006)'da asimptotik lacunary invaryant denk dizileri ve asimptotik lacunary invaryant istatistiksel dizileri tanımlayıp, ikisi arasındaki ilişkileri göstermiştir. Gumus ve Connor (2011) reel sayı dizileri için asimptotik $\mathcal{I}$-denkliği tanımlamış ve kavram ile ilgili özellikleri vermiştir. Ulusu ve Nuray (2013)'te küme dizileri için lacunary denklik ve lacunary istatistiksel denkliği tanımlayıp aralarındaki ilişkileri göstermiştir.

Bu çalışmadaki temel amacımız, daha önceden sayı dizileri için çalışılmış olan invaryant ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını küme dizilerine genelleştirmektir. Bu bağlamda, küme dizileri için daha önce verilmiş olan yakınsaklık tanımlarını, bu yakınsaklıkların kendilerine özgü özelliklerini ve bunlar arasındaki ilişkileri yeniden ele alarak, küme dizileri için invaryant istatistiksel ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramlarını tanıtmak ve bu kavramlara dayanarak yeni teoremleri ispatlamak amaçlanmaktadır. Bu sebeple tez çalışmasında öncelikle ;

İkinci bölümde(temel kavramlar kısmında) istatistiksel yakınsaklık kavramının doğmasına sebep olan yoğunluk kavramı, istatistiksel yakınsaklık, Cesàro toplanabilme, lacunary dizi, hemen hemen yakınsaklık, lacunary istatistiksel yakınsaklık, invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık, lacunary invaryant yakınsaklık, lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık, modülüs fonksiyonu yardımıyla tanımlanan dizi uzayları, istatistiksel denklik, lacunary denklik, lacunary istatistiksel denklik, invaryant istatistiksel denklik, küme dizileri için daha önceden verilen bazı yakınsaklık kavramları ve küme dizileri için yakın zamanda Nuray ve Rhoades (2012) tarafından verilen istatistiksel yakınsaklık kavramları verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise temel kavramlar bölümünde tanıtılan kavramların Wijsman anlamında invaryant yakınsaklık ve invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı. Bu iki kavram arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispat edildi. Daha sonra Wijsman anlamında lacunary invaryant yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı. Bu iki kavram arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispat edildi.

Dördüncü bölümde ise f modülüs fonksiyonunu kullanarak, f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman anlamında invaryant yakınsak dizi uzayı, f modülüs fonksiyonuna göre lacunary invaryant yakınsak dizi uzayı, f modülüs fonksiyonuna göre sınırlı invaryant yakınsak dizi uzayı ve f modülüs fonksiyonuna göre sınırlı lacunary invaryant yakınsak dizi uzayı tanımlandı. f modülüs fonksiyonuna göre invaryant yakınsaklık ile invaryant istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Daha sonra f modülüs fonksiyonuna göre lacunary invaryant yakınsaklık ile lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi.

Beşinci bölümde ise küme dizilerinin (Wijsman anlamında) asimptotik invaryant denkliği, asimptotik invaryant istatistiksel denkliği, asimptotik lacunary invaryant denkliği ve asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denkliği kavramları tanımlandı. Bu kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispat edildi.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir.

2.1 Yakınsaklık

Tanım 2.1.1 X boş olmayan bir cümle ve

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$,

(M3) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$

şartları sağlanırsa, ρ fonksiyonuna, X üzerinde *metrik fonksiyonu* ve (X, ρ) ikilisine de *metrik uzay* denir (Maddox, 1970).

Tanım 2.1.2 $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısı $|K|$ ile gösterelim. Yani,

$$|K| = cardK$$

olsun. K, $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ve

$$K_n = \{k \leq n : k \in K\}$$

olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla alt ve üst yoğunluğu,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}, \qquad \overline{\delta}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n}$$

dır. $\dfrac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda yani,

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

eşitliğinin sağlanması halinde, bu limite $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin *doğal yoğunluğu* denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K) = \delta(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu;

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

dır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.1.3 $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için

$$K = K(\varepsilon) = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$$

kümesinin yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim x = L$$

biçiminde gösterilir (Fast, 1951).

Tanım 2.1.4 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - L) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *Cesàro toplanabilirdir* denir (Volkov, 2001).

Tanım 2.1.5 $x = (x_k)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Freedman vd., 1978).

Kuvvetli Cesàro toplanabilir küme dizilerinin uzayı;

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L| \to 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.6 $x = (x_k)$ dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli *p-Cesàro toplanabilirdir* denir (Connor, 1988).

Kuvvetli p-Cesàro toplanabilir küme dizilerinin uzayı;

$$w_p = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p \to 0 \right\}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 $\theta = (k_r)$ dizisi olmak üzere $k_0 = 0$ ve $r \to \infty$ iken

$$h_r = k_r - k_{r-1} \to \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan tamsayıların artan bir dizisi ise $\theta = (k_r)$ dizisine *lacunary dizisi* denir. Ayrıca,

$$I_r = (k_{r-1}, k_r]$$

olarak belirtilir (Freedman vd., 1978).

Tanım 2.1.8 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi için eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} x_k = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary toplanabilirdir* denir.

Tanım 2.1.9 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi için eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir (Freedman vd., 1978).
Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı;

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L| = 0 \quad, r \to 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.10 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x = (x_k)$ dizisi için, $0 < p < \infty$ eğer,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-lacunary toplanabilirdir* denir (Mursaleen, Alotaibi, 2011).

Tanım 2.1.11 $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $x = (x_k)$ sayı dizisi için, $\forall\varepsilon > 0$ ve $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olmak üzere,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim x = L \quad \text{veya} \quad x_k \to L(S_\theta)$$

ile gösterilir (Fridy ve Orhan, 1993).

Tanım 2.1.12 L, ℓ_∞ sınırlı diziler uzayı üzerinde tanımlı bir lineer fonksiyonel olsun. Eğer, L lineer fonksiyoneli aşağıdaki özelliklere sahip ise bir *Banach limiti* adını alır.

(B1) $n = 1, 2, \ldots$ için $(x_n) \geq 0 \;\Rightarrow L(x_n) \geq 0$,

(B2) $L(e) = 1$, $e = (1, 1, \ldots)$,

(B3) $L(Sx_n) = L(x_n)$,

(Lorentz, 1948). Burada, S operatörü, $(Sx_n) = x_{n+1}$ şeklinde tanımlanmış olan kaydırma operatörüdür.

Tanım 2.1.13 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+m} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *hemen hemen yakınsaktır* denir (Lorentz, 1948).

Lorentz (x_k) dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart m'ye göre düzgün olarak,

$$\frac{x_m + x_{m+1} + ... + x_{m+k}}{k+1} \to L$$

ile göstermiştir.

Tanım 2.1.14 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Maddox, 1978).

Tanım 2.1.15 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, $0 < p < \infty$ olmak üzere, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.16 $x = (x_k)$ dizisi için eğer m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_{k+m} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.17 (İnvaryant Limit) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dönüşümü her m, n pozitif tam sayıları için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde bir birebir dönüşüm olsun. Sürekli bir $\phi : \ell_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneline aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde *invaryant limit* veya σ-limit denir.

(I1) $n = 1, 2, \ldots$ için $(x_n) \geq 0 \Rightarrow \phi(x) \geq 0$,

(I2) $\phi(e) = 1$, $e = (1, 1, \ldots)$,

(I3) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi(x_{\sigma(n)}) = \phi(x)$ (Schaefer, 1972).

Özel olarak, $\sigma(n) = n + 1$ olması halinde, ϕ bir Banach limiti olur.

Tanım 2.1.18 İnvaryant limitleri eşit olan sınırlı diziye invaryant yakınsak veya *σ-yakınsak* dizi denir. σ-yakınsak dizilerin kümesi V_σ ile gösterilir (Schaefer, 1972).

Tanım 2.1.19 $x = (x_k)$ dizisi için, m ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma^k(m)} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *invaryant yakınsaktır* denir (Schaefer, 1972).

Örnek 2.1.20

$$x = (x_k) = \begin{cases} 1 & , \quad k\text{tek} \quad \text{ise}, \\ 0 & , \quad k\text{çift} \quad \text{ise}, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $x = (x_k)$ dizisi $\frac{1}{2}$' ye invaryant yakınsaktır ama yakınsak değildir.

Tanım 2.1.21 $x = (x_k)$ dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen, 1983).

Tanım 2.1.22 $x = (x_k)$ dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{\sigma^k(m)} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-invaryant yakınsaktır* denir (Mursaleen ve Edely, 2009).

Tanım 2.1.23 $x = (x_k)$ kompleks sayı dizisi ve $\forall\varepsilon > 0$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \le n : |x_{\sigma^k(m)} - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına *invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir (Savaş ve Nuray, 1993).

Tanım 2.1.24 E pozitif tam sayıların bir kümesi olmak üzere m'ye göre düzgün olarak eğer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n: E\cap\{\sigma(m),\sigma^2(m),...,\sigma^k(m)\}\}|=0$$

oluyorsa E *kümesi düzgün invaryant sıfır yoğunluğa sahiptir* denir (Nuray ve Savaş, 1994).

Tanım 2.1.25 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x=(x_k)$ dizisi için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}x_{\sigma^k(m)}=L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary invaryant yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.26 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x=(x_k)$ dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_{\sigma^k(m)}-L|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir (Savaş, 1990).

Tanım 2.1.27 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x=(x_k)$ dizisi için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|x_{\sigma^k(m)}-L|^p=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *kuvvetli p-lacunary invaryant yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.28 θ bir lacunary dizisi olmak üzere $x=(x_k)$ kompleks sayı dizisi ve $\forall\varepsilon>0$ için m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}|\{k\in I_r: |x_{\sigma^k(m)}-L|\geq\varepsilon\}|=0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x=(x_k)$ dizisi L sayısına *lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir (Savaş and Nuray 1993).

Tanım 2.1.29 $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu için,

1. $f(x) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x = 0$ olmasıdır,
2. $f(x + y) \le f(x) + f(y)$,
3. f artandır,
4. $\lim f(x) = 0$, $x \to 0^+$

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna *modülüs fonksiyonu* denir. f modülüs fonksiyonu sınırlı ya da sınırsız olabilir. Örneğin $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ sınırlı, $f(x) = x^p$ $(0 < p \le 1)$ sınırsız modülüs fonksiyonlarıdır.

Maddox (1986) modülüs fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlamıştır.

$$w(f) = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k - L|) = 0, \text{ herhangi L için}\},$$
$$w_0(f) = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) = 0\},$$
$$w_\infty(f) = \{x \in s : \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|x_k|) < \infty\}.$$

Burada s bütün kompleks dizilerinin uzayıdır.

Connor (1989) modülüs fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlamıştır. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan regüler matris olmak üzere;

$$w_0(A, f) = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k|) = 0\},$$
$$w(A, f) = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} f(|x_k - L|) = 0, \quad L \in \mathbb{C}\}.$$

Pehlivan ve Fisher (1994) modülüs fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlamıştır:

$$N_\theta^0(f) = \{x = (x \in s : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|x_k|) = 0\},$$
$$N_\theta(f) = \{x \in s : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|x_k - L|) = 0, \quad \text{herhangi L için}\}.$$

Nuray ve Savaş (1993) modülüs fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki dizi uzaylarını tanımlamıştır:

$$[V_\sigma, f]_0 = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_{\sigma^k(m)}|) = 0,\ \text{m'ye göre düzgün }\},$$

$$[V_\sigma, f] = \{x \in s : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_{\sigma^k(m)} - L|) = 0,\ \text{keyfi L için, m'ye göre düzgün}\},$$

$$[V_\sigma, f]_\infty = \{x \in s : \sup_{n,m} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|x_{\sigma^k(m)}|) < \infty\}.$$

2.2 Küme Dizileri

Tanım 2.2.1 $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere, $f : \mathbb{N} \to P(X)$ şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall k \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(k) = A_k \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, \ldots$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Tanım 2.2.2 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

ile tanımlanır (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.3 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_k d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman yakınsaktır* denir ve

$$A_k \xrightarrow{W} A \quad \text{veya} \quad W - \lim A_k = A$$

ile gösterilir (Baronti ve Papini, 1986).

Tanım 2.2.4 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya hemen hemen her k için $|d(x, A_k) - d(x, A)| < \varepsilon$ oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$st - \lim{}_W A_k = A$$

ile gösterilir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Wijsman istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı WS ile gösterilir.

$$WS = \left\{ \{A_k\} : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} | \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için eğer $\sup_k d(x, A_k) < \infty$ oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi *sınırlıdır* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.6 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_k) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.7 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Wijsman kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı;

$$|W\sigma_1| = \left\{ \{A_k\} : \lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)| = 0 \right\}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.8 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere her bir $x \in X$ için eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_k) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Teorem 2.2.9 (X,ρ) bir metrik uzay ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu taktirde boş kümeden farklı, kapalı A ve A_k alt kümeleri için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

(i) $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesàro toplanabilir ise bu taktirde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\{A_k\}$ dizisi sınırlı ve A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsak ise bu taktirde $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-Cesàro toplanabilirdir.

(Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.10 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_{k+m}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.11 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+m}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.12 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere her bir $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{k+m}) - d(x, A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli p-hemen hemen yakınsaktır* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.13 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\forall\varepsilon>0$ ve her bir $x\in X$ için, m ye göre düzgün olarak eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{k\leq n:|d(x,A_{k+m})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|=0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman hemen hemen istatistiksel yakınsaktır* denir (Nuray ve Rhoades, 2012).

Tanım 2.2.14 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi olmak üzere A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, her bir $x\in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}d(x,A_k)=d(x,A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary toplanabilirdir* denir (Ulusu ve Nuray, 2012).

Tanım 2.2.15 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi olmak üzere A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, her bir $x\in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|=0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilirdir* denir (Ulusu ve Nuray ,2012).

Wijsman kuvvetli lacunary toplanabilir küme dizilerinin uzayı;

$$[WN_\theta]:=\left\{\{A_k\}:\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|=0\right\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.16 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri ve $0<p<\infty$ olmak üzere eğer, her bir $x\in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_k)-d(x,A)|^p=0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli $p-$lacunary toplanabilirdir* denir (Ulusu ve Nuray, 2012).

Tanım 2.2.17 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi olmak üzere A ve A_k, X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Eğer, $\forall\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_k) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\theta - \lim{}_W A_k = A \quad \text{veya} \quad A_k \to A(WS_\theta)$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2012).

Wijsman lacunary istatistiksel yakınsak küme dizilerinin uzayı;

$$WS_\theta := \left\{\{A_k\} : S_\theta - \lim{}_W A_k = A\right\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.18 X ve Y Banach uzayları ve $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y ye lineer operatörlerinin bir dizisi olsun. Eğer, her $x = (x_n) \in X$ dizisi için,

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ifadesi Y de tanımlı norma göre yakınsak ve her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$Ax = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\right) \in Y$$

oluyorsa A matrisine X den Y ye bir matris dönüşümü denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir (Maddox, 1980).

Tanım 2.2.19 Yakınsak dizileri yakınsak dizilere limiti koruyarak dönüştüren matrislere regüler matrisler adı verilir (Boos, 2000).

Tanım 2.2.20 $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir A kümesinin karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir ve

$$\chi_A(k) = \begin{cases} 1 & , \quad k \in A \\ 0 & , \quad k \notin A \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

2.3 Asimptotik Denklik

Tanım 2.3.1 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için eğer

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *asimptotik denktirler* denir ve

$$x \sim y$$

ile gösterilir (Marouf, 1993).

Tanım 2.3.2 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri ve her $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı asimptotik istatistiksel denktirler* denir ve

$$x \overset{S_L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Patterson, 2003).

Tanım 2.3.3 θ bir lacunary dizisi olmak üzere, negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı kuvvetli asimptotik lacunary denktirler* denir ve

$$x \overset{N_\theta^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Patterson and Savaş, 2006).

Tanım 2.3.4 θ bir lacunary dizisi olmak üzere, negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri ve her $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_k}{y_k} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denktirler* denir ve

$$x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Patterson ve Savaş, 2006).

Tanım 2.3.5 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri eğer m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı kuvvetli asimptotik invaryant denktirler* denir ve

$$x \overset{V_\sigma^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Savaş ve Patterson, 2006).

Tanım 2.3.6 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri ve her $\varepsilon > 0$ için eğer, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı asimptotik invaryant istatistiksel denktirler* denir ve

$$x \overset{S_\sigma^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Savaş ve Patterson, 2006).

Tanım 2.3.7 θ bir lacunary dizisi olmak üzere, negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri eğer m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı kuvvetli asimptotik lacunary invaryant denktirler* denir ve

$$x \overset{N_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Savaş ve Patterson, 2006).

Tanım 2.3.8 θ bir lacunary dizisi olmak üzere, negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için ve her $\varepsilon > 0$ için eğer, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{x_{\sigma^k(m)}}{y_{\sigma^k(m)}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_k) ve (y_k) dizilerine *L katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktirler* denir ve

$$x \overset{S_{\sigma\theta}^L}{\sim} y$$

ile gösterilir (Savaş ve Patterson, 2006).

Tanım 2.3.9 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. A_k ve B_k, her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için eğer

$$\lim_k \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} = 1$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *asimptotik denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \sim \{B_k\}$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2013).

Tanım 2.3.10 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. A_k ve B_k, her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik istatistiksel denktirler(Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WS^L}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2013).

Tanım 2.3.11 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} = L$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik lacunary denktirler(Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WN_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2013).

Tanım 2.3.12 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ için eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik kuvvetli lacunary denktirler(Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{[WN]_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2013).

Tanım 2.3.13 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, her $x \in X$ için $d(x, A_k) > 0$ ve $d(x, B_k) > 0$ olacak şekilde X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $x \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için eğer

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : \left| \frac{d(x, A_k)}{d(x, B_k)} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WS_\theta^L}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir (Ulusu ve Nuray, 2013).

3 KÜME DİZİLERİN İNVARYANT İSTATİSTİKSEL VE LACUNARY İNVARYANT İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde küme dizileri için invaryant yakınsaklık, invaryant istatistiksel yakınsaklık, lacunary invaryant yakınsaklık ve lacunary invaryant istatistiksel yakınsaklık kavramları tanımlandı. Birbirleri arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispatlandı.

3.1 Küme Dizilerinin İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} d(x, A_{\sigma^k(m)}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman invaryant yakınsaktır* denir ve

$$A_k \xrightarrow{WV_\sigma} A \quad \text{veya} \quad WV_\sigma - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Burada özel olarak $\sigma(m) = m + 1$ alınırsa Tanım (2.2.10) elde edilir.

Tanım 3.1.2 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir ve

$$A_k \xrightarrow{[WV_\sigma]} A \quad \text{veya} \quad [WV_\sigma] - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Burada özel olarak $\sigma(m) = m + 1$ alınırsa Tanım (2.2.11) elde edilir.

Tanım 3.1.3 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli p-invaryant yakınsak* denir ve

$$A_k \stackrel{[WV_\sigma]_p}{\longrightarrow} A \quad \text{veya} \quad [WV_\sigma]_p - \lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Burada özel olarak $\sigma(m) = m+1$ alınırsa Tanım (2.2.12) elde edilir.

Tanım 3.1.4 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, $\forall\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_\sigma - \lim{}_W A_k = A \quad \text{veya} \quad A_k \longrightarrow A(WS_\sigma)$$

ile gösterilir.

Burada özel olarak $\sigma(m) = m+1$ alınırsa Tanım (2.2.12) elde edilir.

Teorem 3.1.5 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $0 < p < \infty$ için $A_k \to A\,([WV_\sigma]_p)$ ise $A_k \to A(WS_\sigma)$

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_\sigma)$ ise $A_k \to A\,([WV_\sigma]_p)$

(iii) $WS_\sigma \cap L_\infty = [WV_\sigma]_p$

dır. Burada L_∞ sınırlı küme dizilerinin kümesidir.

İspat.

(i) $A_k \to A([WV_\sigma]_p)$ verilmiş olsun. Bu taktirde $0 < p < \infty$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p &= \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\ &\geq \varepsilon^p. \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p. \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{n}$ ile çarpılır ve $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WV_\sigma]_p$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $n \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon^p. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_\sigma)$ olduğunu gösterir.

(ii) $A_k \to A(WS_\sigma)$ ve $\{A_k\} \in L_\infty$ verilmiş olsun. Her $m \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$G = \sup_{k,m} |d(x, A_{\sigma^k(m)})| + |d(x, A)|$$

kümesini alalım. Öyle bir N_ε seçelim ki, her m ve $n > N_\varepsilon$ için,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}| < \frac{\varepsilon}{2G^p}$$

$L(n,m,x) = \{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{p}}\}$ kümesidir. Şimdi her m ve $n > N_\varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|^p &= \sum_{k \in L(n,m,x)} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|^p \\
&\quad + \sum_{k \notin L(n,m,x)} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|^p \\
&< \frac{1}{n}(n\frac{\varepsilon}{2G^p})G^p + \frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli p-invaryant yakınsaktır.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düşünülürse sonuç olarak $WS_\sigma \cap L_\infty = [WV_\sigma]_p$ elde edilir. □

Teorem 3.1.6 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $A_k \to A\,([WV_\sigma])$ ise $A_k \to A(WS_\sigma)$

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_\sigma)$ ise $A_k \to A\,([WV_\sigma])$

(iii) $WS_\sigma \cap L_\infty = [WV_\sigma]$

dır.

İspat.

(i) $A_k \to A([WV_\sigma])$ verilmiş olsun. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| &= \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \\
&\quad + \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| < \varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon}}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \\
&\geq \varepsilon.\left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|
\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon. \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{n}$ ile çarpılır ve $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WV_\sigma]$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $n \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon. \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_\sigma)$ olduğunu gösterir.

(ii) $A_k \to A(WS_\sigma)$ ve $\{A_k\} \in L_\infty$ verilmiş olsun. Her $m \geq 1$ ve $\varepsilon > 0$ için,

$$G = \sup_{k,m} |d(x, A_{\sigma^k(m)})| + |d(x, A)|$$

kümesini alalım. Öyle bir N_ε seçelim ki, her m ve $n > N_\varepsilon$ için,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})\}| < \frac{\varepsilon}{2G}$$

$L(n, m, x) = \{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq (\frac{\varepsilon}{2})\}$ kümesidir. Şimdi her m and $n > N_\varepsilon$ için,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| &= \sum_{k\in L(n,m,x)} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\quad + \sum_{k\notin L(n,m,x)} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&< \frac{1}{n}(n\frac{\varepsilon}{2G})G + \frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden $\{A_k\}$ dizisi A kümesine Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düsünülürse sonuç olarak $WS_\sigma \cap L_\infty = [WV_\sigma]$ elde edilir. □

Lemma 3.1.7 (X, ρ) bir metrik uzay, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $\varepsilon > 0$, her $n \geq n_0$ ve her $m \geq m_0$ olduğunda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

olacak şekilde n_0 ve m_0 varsa $\{A_k\} \in [WV_\sigma]$ dır.

İspat. $\varepsilon > 0$, $n \geq n_0'$ ve $m \geq m_0$ için m'ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde n_0' ve m_0 seçelim. $n \geq n_0''$ ve $0 \leq m \leq m_0$ için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

olacak şekilde n_0'' var olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$n_0 = \max(n_0', n_0'')$ alınırsa, $n \geq n_0$ ve bütün m'ler için

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. m_0 tamsayı olup, yerine koyulursa;

$$\sum_{k=0}^{m_0-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = M$$

yazılır. Şimdi $0 \leq m \leq m_0$ ve $n \geq m_0$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{m_0-1} + \sum_{k=m_0}^{n-1}\right)|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\leq \frac{M}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{n-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir ve n yeterince büyük alınırsa,

$$\leq \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon$$

elde edilir. □

Lemma 3.1.8 (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_k,, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon>0$, her $n\geq n_0$ ve her $m\geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|<\varepsilon_1$$

olacak şekilde n_0 ve m_0 varsa $\{A_k\}\in WS_\sigma$ dır.

İspat. $\varepsilon_1>0$ olsun. Her $\varepsilon>0$, her $n\geq n_0'$ ve her $m\geq m_0$ için m'ye göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|<\frac{\varepsilon_1}{2}$$

olacak şekilde n_0' ve m_0 seçelim. $n\geq n_0''$ ve $0\leq m\leq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|<\varepsilon_1$$

olacak şekilde n_0'' var olduğunu ispatlamak yeterlidir.
$n_0=\max(n_0',n_0'')$ alınırsa, $n\geq n_0$ ve bütün m'ler için

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|<\varepsilon_1$$

eşitsizliğini sağlar. $0\leq m\leq m_0$, m_0 tamsayı olup, yerine koyulursa;

$$K=|\{0\leq k\leq m_0-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|$$

elde edilir. Şimdi $0\leq m\leq m_0$ ve $n\geq m_0$ alınırsa ve

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|<\frac{\varepsilon_1}{2}$$

eşitsizliği ile

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|$$

$$\leq\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq m_0-1:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}|$$

$$+\frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

elde edilir ve n yeterince büyük alınırsa,

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

elde edilir. □

3.2 Küme Dizilerinin Lacunary İnvaryant İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.2.1 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} d(x, A_{\sigma^k(m)}) = d(x, A)$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary invaryant yakınsaktır* denir ve

$$A_k \overset{WN_{\sigma\theta}}{\longrightarrow} A \quad veya \quad WN_{\sigma\theta} - \lim A_k = A$$

ile gösterilir. Wisjman lacunary invaryant yakınsak küme dizileri $WN_{\sigma\theta}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir ve

$$A_k \overset{[WN_{\sigma\theta}]}{\longrightarrow} A \quad veya \quad [WN_{\sigma\theta}] - \lim A_k = A$$

ile gösterilir. Wijsman lacunary kuvvetli invaryant yakınsak küme dizileri $[WN_{\sigma\theta}]$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.3 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu taktirde her θ lacunary dizisi için ve her $x \in X$ için

$$[WN_{\sigma\theta}] \Leftrightarrow [WV_\sigma]$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in [WN_{\sigma\theta}]$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$, $r \geq r_0$ için $u \geq 0$, $m = k_{r-1} + 1 + u$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k=0}^{k_r-1} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir r_0 sayısı vardır. $n \geq h_r$ olsun. i bir tamsayı ve θ, $0 \leq \theta < h_r$ aralığında seçildiğinde $n = ih_r + \theta$ yazılır. $n \geq h_r$ ve $i \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{(i+1)h_r-1}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=jh_r}^{(j+1)h_r-1}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

$$\leq \frac{i+1}{n}h_r\varepsilon \leq \frac{2ih_r\varepsilon}{n} \quad (i \geq 1)$$

$\frac{h_r}{n} \leq 1$ için ve $\frac{ih_r}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \leq 2\varepsilon$$

dır. Böylece $\{A_k\} \in [WV_\sigma]$ dır. Bu taktirde

$$[WN_{\sigma\theta}] \Rightarrow [WV_\sigma] \tag{3.1}$$

dır.

$\{A_k\} \in [WV_\sigma]$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon, \quad m = 1, 2, ...$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı ve $A \subset X$ olacak şekilde boş kümeden farklı kapalı bir A kümesi vardır. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece, $\{A_k\} \in [WN_{\sigma\theta}]$ elde edilir. O halde

$$[WV_\sigma] \Rightarrow [WN_{\sigma\theta}] \tag{3.2}$$

dır. (3.1) ve (3.2) 'den

$$[WN_{\sigma\theta}] \Leftrightarrow [WV_\sigma]$$

elde edilir. □

Tanım 3.2.4 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|^p = 0$$

oluyorsa, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman kuvvetli lacunary p-invaryant yakınsak* denir ve

$$A_k \overset{[WN_{\sigma\theta}]_p}{\longrightarrow} A \quad veya \quad [WN_{\sigma\theta}]_p - \lim A_k = A$$

ile gösterilir. Wijsman kuvvetli lacunary p-invaryant yakınsak küme dizileri $[WN_{\sigma\theta}]_p$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.5 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, $\forall\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *Wijsman lacunary invaryant istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$S_{\sigma\theta} - \lim{}_W A_k = A \quad \text{veya} \quad A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$$

ile gösterilir.

Teorem 3.2.6 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $A_k \to A\,([WN_{\sigma\theta}])$ ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ ise $A\,([WN_{\sigma\theta}])$

(iii) $(WS_{\sigma\theta}) \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}]$

dır.

İspat.

(i) $A_k \to A([WN_{\sigma\theta}])$ verilmiş olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için, m ye göre düzgün olarak,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| &= \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \\ &+ \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \\ &\geq \varepsilon. \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon. \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon. \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WN_{\sigma\theta}]$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $r \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon. \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

ise

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğunu gösterir.

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğunu kabul edelim. $\{A_k\} \in L_\infty$ olduğundan her $x \in X$ ve her k ve m için $|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\quad+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\leq \frac{M}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad+\varepsilon.\left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{M}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \leq \frac{M}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon$$

olur. Burada her iki tarafın $r \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} &|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \\
&\leq \lim_{r\to\infty}\left(M.\frac{1}{h_r}\left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

bulunur. $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğundan, (3.3) eşitsizliğinin sağ tarafındaki limit değeri ε a eşittir. Böylece

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

elde ederiz ki bu $A_k \to A[WN_{\sigma\theta}]$ olması demektir.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düşünülürse sonuç olarak $WS_{\sigma\theta} \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}] \cap L_\infty$ olduğu ortaya çıkar. $\square$

Teorem 3.2.7 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Bu taktirde her θ lacunary dizisi ve her $x \in X$ için

$$WS_{\sigma\theta} \Leftrightarrow WS_{\sigma}$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in WS_{\sigma\theta}$ olsun. $\varepsilon_1 > 0$, $r \geq r_0$ için $u \geq 0$, $m = k_{r-1} + 1 + u$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r}|\{0 \leq k \leq h_r - 1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \leq \varepsilon_1$$

olacak şekilde bir r_0 sayısı vardır. $n \geq h_r$ olsun. i bir tamsayı ve t, $0 \leq t < h_r$ aralığında seçildiğinde $n = ih_r + t$ yazılır. $n \geq h_r$ ve $i \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq (i+1)h_r - 1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}|$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{1}\left|\{jh_r \leq k \leq (j+1)h_r - 1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{n}(i+1)h_r\varepsilon_1 \leq 2i\frac{h_r}{n}\varepsilon_1$$

$(i \geq 1)$ $\dfrac{h_r}{n} \leq 1$ için ve $\dfrac{ih_r}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| \leq 2\varepsilon_1$$

dır. Böylece $\{A_k\} \in WS_{\sigma}$ dır. Bu taktirde

$$WS_{\sigma\theta} \Rightarrow WS_{\sigma} \tag{3.4}$$

elde edilir.

$\{A_k\} \in WS_{\sigma}$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1, \quad m = 1, 2, ...$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı ve $A \subset X$ olacak şekilde boş kümeden farklı kapalı bir A kümesi vardır. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq\}| < \varepsilon_1$$

yazabiliriz. Böylece, $\{A_k\} \in WS_{\sigma\theta}$ elde edilir. O halde

$$WS_\sigma \Rightarrow WS_{\sigma\theta} \tag{3.5}$$

dır. (3.4) ve (3.5)'den

$$WS_{\sigma\theta} \Leftrightarrow WS_\sigma$$

elde edilir. □

Teorem 3.2.8 (X, ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $0 < p < \infty$ için $A_k \to A\left([WN_{\sigma\theta}]_p\right)$ ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ ise $A_k \to A\left([WN_{\sigma\theta}]_p\right)$

(iii) $WS_{\sigma\theta} \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}]_p$

dır.

İspat.

(i) $A_k \to A([WN_{\sigma\theta}]_p)$ verilmiş olsun. Bu durumda $0 < p < \infty$ ve $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p &= \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\ &+ \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\ &\geq \varepsilon^p . \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p. \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \geq \varepsilon^p. \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WN_{\sigma\theta}]_p$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $r \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon^p. \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

olur ve

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğunu gösterir.

(ii) $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğunu kabul edelim. $\{A_k\} \in L_\infty$ olduğundan her $x \in X$ ve her k ve m için $|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p < M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\
&\quad + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\
&\leq \frac{M}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad + \varepsilon^p. \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| < \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{M}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \leq \frac{M}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon^p$$

olur. Burada her iki tarafın $r \to \infty$ iken limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} & |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \\ & \le \lim_{r\to\infty} \left(M.\frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \ge \varepsilon\}\right| + \varepsilon^p \right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğundan, (3.6) eşitsizliğinin sağ tarafındaki limit değeri ε a eşittir. Böylece

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p \le \varepsilon \Rightarrow \lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|^p = 0$$

elde ederiz ki bu $A_k \to A[WN_{\sigma\theta}]$ olması demektir.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düsünülürse sonuç olarak $WS_{\sigma\theta} \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}]_p$ elde edilir.

□

4 MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ BAZI YAKINSAK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde modülüs fonksiyonunu kullanarak bazı yeni dizi uzayları tanımlandı. Bu yeni tanımlanan dizi uzayları ile 3. bölümde tanımladığımız bazı kavramlarla aralarındaki ilişkileri gösteren teoremler ispat edildi.

4.1 Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış İnvaryant Yakınsak Dizi Uzayları

Tanım 4.1.1 (X,ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) = 0,$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır* denir ve $A_k \stackrel{[WV_\sigma(f)]}{\longrightarrow} A$ veya $[WV_\sigma(f)] - limA_k = A$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Küme dizilerinin $[WV_\sigma]_\infty$ uzayı

$$[WV_\sigma]_\infty = \left\{ \{A_k\} : \sup_{m,n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)})| < \infty \right\}$$

dır.

Tanım 4.1.3 (X,ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Küme dizilerinin $[WV_\sigma(f)]_\infty$ uzayı

$$[WV_\sigma(f)]_\infty = \left\{ \{A_k\} : \sup_{m,n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)})|) < \infty \right\}$$

dır.

Eğer $f(x) = x$ olduğunda, $[WV_\sigma(f)]$ uzayı $[WV_\sigma]$ uzayına ve $[WV_\sigma(f)]_\infty$ uzayı da $[WV_\sigma]_\infty$ uzayına indirgenir.

Teorem 4.1.4 (X,ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $A_k \to A\left([WV_\sigma(f)]\right)$ ise $A_k \to A(WS_\sigma)$

(ii) f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $A_k \to A(WS_\sigma)$ ise $A_k \to A\left([WV_\sigma(f)]\right)$

(iii) f sınırlı ise $WS_\sigma = [WV_\sigma(f)]$

dır.

İspat.

(i) $A_k \to A([WV_\sigma(f)])$ verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$\sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) = \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) + \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|)$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) &\geq \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \\ &\geq \varepsilon.\left|\{k \leq n : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \geq \varepsilon.\left|\{k \leq n : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\frac{1}{n}$ ile çarpılır ve $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \geq \varepsilon.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WV_\sigma(f)]$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $n \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon.\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_\sigma)$ olduğunu gösterir.

(ii) Kabul edelim ki f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $A_k \to A(WS_\sigma)$ olsun. Her $m \geq 1$ için bir

$$G=\sup_{k,m} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)})|+|d(x,A)|)$$

kümesi alınır. $\varepsilon > 0$ olsun. Bütün m' ler ve $n > N_\varepsilon$ için

$$\frac{1}{n}|\{k\leq n:|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\frac{\varepsilon}{2}\}|<\frac{\varepsilon}{2G}$$

olacak şekilde N_ε seçilir ve $L(n,m,x) = \{k \leq n : |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ kümesidir.

Şimdi her m ve $n > N_\varepsilon$ için

$$\sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|) = \sum_{k\in L(n,m,x)} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|)$$

$$+\sum_{k\notin L(n,m,x)} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|)$$

$$<\frac{1}{n}(n\frac{\varepsilon}{2G})G+\frac{1}{n}(\frac{\varepsilon}{2})n=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\{A_k\}$ dizisi A kümesine f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düşünülürse sonuç olarak f sınırlı ise $WS_\sigma = [WV_\sigma(f)]$ elde edilir.

□

Teorem 4.1.5 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. f bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$[WV_\sigma(f)] \subset [WV_\sigma(f)]_\infty$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in [WV_\sigma(f)]$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)})|) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A) + d(x,A)|)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x,A)|)$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) + M\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(1)$$

Burada M, $d(x,A) < M$ olacak şekilde bir tamsayıdır. Böylece $\{A_k\} \in [WV_\sigma(f)]_\infty$ elde edilir. □

Teorem 4.1.6 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer f bir modülüs fonksiyonu ve $\{A_k\}$ dizisi A'ya Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak ise, bu taktirde A_k dizisi A'ya f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli invaryant yakınsaktır. Yani

$$[WV_\sigma] \subset [WV_\sigma(f)]$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in [WV_\sigma]$ olsun. Bu durumda, her $m \geq 1$ için,

$$S(n,m,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \to 0, \qquad (n \to \infty)$$

$\varepsilon > 0$ ve $0 \leq t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde $0 < \delta < 1$ aralığında bir δ seçilir. $a_{km} = |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|$ yazılır.

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_{km}) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

Burada ilk toplam $a_{km} \leq \delta$ ve ikinci toplam $a_{km} > \delta$' dır.

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)| \leq \delta}}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|)$$

$$\sum_2 = \sum_{\substack{k=1 \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|>\delta}}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|)$$

dir. Bu durumda, $\Sigma_1 \leq \varepsilon n$ ve $a_{km} > \delta$ için,

$$a_{km} < \frac{a_{km}}{\delta} < 1 + [\frac{a_{km}}{\delta}],$$

Burada $[z]$, z'nin tam kısmını gösterir. Modülüs fonksiyonun tanımından, $a_{km} > \delta$ için,

$$f(a_{km}) \leq (1 + [\frac{a_{km}}{\delta}])f(1) \leq 2f(1)\frac{a_{km}}{\delta}$$

dır.

Böylece $\Sigma_2 \leq 2f(1)\frac{a_{km}}{\delta}$ ve $\Sigma_1 \leq \varepsilon n$ olduğundan $[WV_\sigma] \subset [WV_\sigma(f)]$ elde edilir. □

Lemma 4.1.7 Savaş(1992) f bir modülüs fonksiyonu ve $\alpha > 0$ sabit sayı olsun. Bu durumda $f(x) > cx$ $(0 < x < \alpha)$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabit sayısı vardır.

Teorem 4.1.8 (X, ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri ve $\{A_k\}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu taktirde $\{A_k\}$ dizisinin A'ya f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak olması için gerek ve yeter şart A_k dizisinin A'ya Wijsman kuvvetli invaryant yakınsak olmasıdır. Yani,

$$[WV_\sigma(f)] \cap L_\infty = [WV_\sigma]$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $\{A_k\} \to A[WV_\sigma(f)]$ olsun. Bu taktirde m'ye göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) \to 0, \qquad (n \to \infty)$$

dır. Lemma (4.1.7)' dan her k ve m için için,

$$f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) > c|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

yazılır. Her iki tarafa da 1'den n'ye kadar toplam uygular ve n'ye bölersek,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) > c\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

elde edilir. $n \to \infty$ için eşitsizliğin sol tarafının limiti m'ye göre düzgün olarak sıfır olur. Buradan m'ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

elde edilir. Yani $[WV_\sigma(f)] \subset [WV_\sigma]$ olur. Teorem 4.1.6'dan $[WV_\sigma] \subset [WV_\sigma(f)]$ olduğundan

$$[WV_\sigma(f)] \cap L_\infty = [WV_\sigma]$$

elde edilir. □

4.2 Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Lacunary İnvaryant Yakınsak Dizi Uzayları

Tanım 4.2.1 (X,ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için, m' ye göre düzgün olarak

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) = 0,$$

oluyorsa $\{A_k\}$ dizisi A kümesine *modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır* denir ve

$$A_k \stackrel{[WN_{\sigma\theta}(f)]}{\longrightarrow} A \quad \text{veya} \quad [WN_{\sigma\theta}(f)] - lim A_k = A$$

ile gösterilir.

Tanım 4.2.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Küme dizilerinin $[WN_{\sigma\theta}]_\infty$ uzayı

$$[WN_{\sigma\theta}]_\infty = \left\{ \{A_k\} : \sup_{m,r} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)})| < \infty \right\}.$$

dır.

Tanım 4.2.3 (X,d) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Küme dizilerinin $[WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty$ uzayı

$$[WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty = \left\{ \{A_k\} : \sup_{m,r} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)})|) < \infty \right\}$$

dır. Eğer $f(x) = x$ olduğunda, $[WN_{\sigma\theta}(f)]$ uzayı $[WN_{\sigma\theta}]$ uzayına ve $[WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty$ uzayı da $[WN_{\sigma\theta}]_\infty$ uzayına indirgenir.

Teorem 4.2.4 (X,ρ) bir metrik uzay, f modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Bu taktirde

(i) $A_k \to A\,([WN_{\sigma\theta}(f)])$ ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$,

(ii) f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ ise $A_k \to A\,([WN_{\sigma\theta}(f)])$,

(iii) f sınırlı ise, $WS_{\sigma\theta} = [WN_{\sigma\theta}(f)]$ dır.

İspat.

(i) $A_k \to A([WN_{\sigma\theta}(f)])$ verilmiş olsun. $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) &= \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \\ &+ \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|<\varepsilon}} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|)\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)})-d(x,A)|\geq\varepsilon}} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \\ &\geq \varepsilon.\left|\{k \in I_r : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \geq \varepsilon.\left|\{k \in I_r : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\dfrac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) \geq \varepsilon.\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $A_k \to A[WN_{\sigma\theta}(f)]$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $r \to \infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon.\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

olur ve

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{h_r} \left|\{k \in I_r : |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olduğunu gösterir.

(ii) Kabul edelim ki f modülüs fonksiyonu sınırlı ve $A_k \to A(WS_{\sigma\theta})$ olsun. Her $m \geq 1$ için bir

$$G = \sup_{k,m} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)})| + |d(x, A)|)$$

kümesi alalım. $\varepsilon > 0$ ve öyle bir N_ε seçelim öyle ki

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}| < \frac{\varepsilon}{2G}$$

olsun. Her m ve $r > N_\varepsilon$ için

$$L(r, m, x) = \{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

kümesi olsun.

Şimdi her m ve $r > N_\varepsilon$ için

$$\sum_{k \in I_r} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) = \sum_{k \in L(r,m,x)} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|)$$

$$+ \sum_{k \notin L(r,m,x)} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|)$$

$$< \frac{1}{h_r}(h_r \frac{\varepsilon}{2G})G + \frac{1}{h_r}(\frac{\varepsilon}{2})h_r = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

elde ederiz. Bu yüzden $\{A_k\}$ dizisi A'ya f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli lacunary invariant yakınsaktır.

(iii) (i) ve (ii) birlikte düsünülürse sonuç olarak f sınırlı ise $WS_{\sigma\theta} = [WN_{\sigma\theta}(f)]$ elde edilir. □

Teorem 4.2.5 (X, ρ) bir metrik uzay, f bir modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. f modülüs fonksiyonu olsun. Bu taktirde

$$[WN_{\sigma\theta}(f)] \subset [WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in [WN_{\sigma\theta}(f)]$ olsun.

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)})|) = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A) + d(x,A)|)$$

$$\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) + \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A)|)$$

$$\leq \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|) + M\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(1)$$

Burada M, $d(x,A) < M$ olacak şekilde bir tamsayıdır. Bu yüzden $\{A_k\} \in [WN_{\sigma\theta}(f)]_\infty$ dır. □

Teorem 4.2.6 (X,ρ) bir metrik uzay, f modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer f bir modülüs fonksiyonu ve A_k dizisi A'ya Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak ise, bu taktirde A_k dizisi A'ya f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsaktır. Yani

$$[WN_{\sigma\theta}] \subset [WN_{\sigma\theta}(f)]$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in [WN_{\sigma\theta}]$ olsun. Bu durumda, her $m \geq 1$ için,

$$S(r,m,x) = \frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \to 0, \qquad (r\to\infty)$$

$\varepsilon > 0$ ve $0 \leq t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $0 < \delta < 1$ aralığında bir δ seçilir. $a_{km} = |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|$ yazılır.

$$\sum_{k\in I_r} f(a_{km}) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

. Burada ilk toplam $a_{km} \leq \delta$ ve ikinci toplam $a_{km} > \delta$'dır.

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| \leq \delta}} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|)$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)| > \delta}} f(|d(x,A_{\sigma^k(m)}) - d(x,A)|)$$

Bu taktirde, $\Sigma_1 \leq \varepsilon r$ ve $a_{km} > \delta$ için,

$$a_{km} < \frac{a_{km}}{\delta} < 1 + [\frac{a_{km}}{\delta}],$$

burada $[z]$ z'nin tam kısmını gösterir. Modülüs fonksiyonun tanımından, $a_{km} > \delta$ için,

$$f(a_{km}) \leq (1 + [\frac{a_{km}}{\delta}])f(1) \leq 2f(1)\frac{a_{km}}{\delta}$$

dır.

Böylece $\Sigma_2 \leq 2f(1)\frac{a_{km}}{\delta}$ ve $\Sigma_1 \leq \varepsilon r$ olduğundan $[WN_{\sigma\theta}] \subset [WN_{\sigma\theta}(f)]$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.7 (X, ρ) bir metrik uzay, f modülüs fonksiyonu, A ve A_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. f bir modülüs fonksiyonu ve A_k sınırlı bir dizi olsun. Bu taktirde A_k dizisi A'ya f modülüs fonksiyonuna göre Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak olması için gerek ve yeter şart A_k dizisinin A'ya Wijsman kuvvetli lacunary invaryant yakınsak olmasıdır. Yani,

$$[WN_{\sigma\theta}(f)] \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}]$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \in L_\infty$ ve $\{A_k\} \to A[WN_{\sigma\theta}(f)]$ olsun. Bu taktirde m'ye göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) \to 0(r \to \infty)$$

dır. Lemma (4.1.7)'dan her k ve m için için,

$$f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) > c|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

yazılır. Her iki tarafa da $k_{r-1} + 1$'den k_r'ye kadar toplam uygular ve h_r'ye bölersek,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} f(|d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|) > c\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)|$$

elde edilir. $r \to \infty$ için eşitsizliğin sol tarafının limiti m'ye göre düzgün olarak sıfır olur. Buradan m'ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d(x, A_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| = 0$$

elde edilir. Yani $[WN_{\sigma\theta}(f)] \subset [WN_{\sigma\theta}]$ olur. Teorem (4.2.6)'dan $[WN_{\sigma\theta}] \subset [WN_{\sigma\theta}(f)]$ olduğundan

$$[WN_{\sigma\theta}(f)] \cap L_\infty = [WN_{\sigma\theta}]$$

elde edilir. $\square$

5 KÜME DİZİLERİNİN İNVARYANT VE LACUNARY İNVARYANT DENKLİĞİ

Bu bölümde küme dizileri için invaryant denklik, invaryant istatistiksel denklik, lacunary invaryant denklik ve lacunary invaryant istatistiksel denklik kavramları tanımlandı. Bu kavramlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremler ispatlandı.

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri A_k ve B_k için, $d(x;A_k,B_k)$'yı aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$d(x;A_k,B_k)=\begin{cases}\dfrac{d(x,A_k)}{d(x,B_k)}, & x\notin A_k\cup B_k;\\ L, & x\in A_k\cup B_k.\end{cases}$$

5.1 Küme Dizilerinin İnvaryant Denkliği

Tanım 5.1 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $x\in X$ için, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})=L$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik invaryant denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\}\overset{WV_\sigma^L}{\sim}\{B_k\}$$

ile gösterilir.

Tanım 5.2 (X,ρ) bir metrik uzay olsun. A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $x\in X$ için, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|=0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı kuvvetli asimptotik invaryant denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\}\overset{[WV]_\sigma^L}{\sim}\{B_k\}$$

ile gösterilir.

Tanım 5.3 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. A_k ve B_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik invaryant istatistiksel denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir.

Lemma 5.4 (X, ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her $\varepsilon > 0$, her $n \geq n_0$ ve her $m \geq m_0$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde n_0 ve m_0 sayıları varsa $\{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$ dır.

İspat. $\varepsilon > 0$, $n \geq n_0'$ ve $m \geq m_0$ için m'ye göre düzgün olarak

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde n_0' ve m_0 seçelim. $n \geq n_0''$ ve $0 \leq m \leq m_0$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists n_0''$ var olduğunu ispatlamak yeterlidir.
$n_0 = \max(n_0', n_0'')$ alınırsa, $n \geq n_0$ ve bütün m'ler için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar. m_0 tamsayı olup, yerine yazılırsa;

$$\sum_{k=0}^{m_0-1} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| = M$$

yazılır. Şimdi $0 \leq m \leq m_0$ ve $n \geq m_0$ alınırsa ve

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{m_0-1}+\sum_{k=m_0}^{n-1}\right)|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|$$

$$\leq \frac{M}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=m_0}^{n-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|$$

$$\leq \frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir ve n yeterince büyük alınırsa,

$$\leq \frac{M}{n}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| < \varepsilon$$

elde edilir. □

Teorem 5.5 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A_k ve B_k X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Her θ lacunary dizisi için ve her $x \in X$ için

$$\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\} \Leftrightarrow \{A_k\} \overset{[WV]^L_{\sigma}}{\sim} \{B_k\}$$

dır.

İspat. $\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ olsun. $\varepsilon > 0$, $r \geq r_0$ için $u \geq 0$, $m = k_{r-1}+1+u$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k=0}^{k_r-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k m()})-L| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir r_0 sayısı vardır. $n \geq h_r$ olsun. i bir tamsayı ve θ, $0 \leq \theta < h_r$ aralığında seçildiğinde $n = ih_r + \theta$ yazılır. $n \geq h_r$ ve $i \geq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{(i+1)h_r-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{i}\sum_{k=jh_r}^{(j+1)h_r-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|$$

$$\leq \frac{i+1}{n}h_r\varepsilon \leq \frac{2ih_r\varepsilon}{n} \quad (i \geq 1)$$

$\dfrac{h_r}{n} \leq 1$ için ve $\dfrac{ih_r}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \leq 2\varepsilon$$

dır. Böylece $\{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$ dır. Bu taktirde

$$\{A_k\} \overset{[WN]_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \Rightarrow \{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\} \tag{5.1}$$

elde edilir.

$\{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|d(x,A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-d(x,A)| < \varepsilon, \quad m=1,2,...$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı ve $A \subset X$ olacak şekilde boş kümeden farklı kapalı bir A kümesi vardır. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x,A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-d(x,A)| < \varepsilon$$

yazabiliriz. Böylece, $\{A_k\} \overset{[WN]_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\}$ elde edilir. O halde

$$\{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\} \Rightarrow \{A_k\} \overset{[WN]_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \tag{5.2}$$

dır. (5.1) ve (5.2) 'den

$$\{A_k\} \overset{[WN]_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \Leftrightarrow \{A_k\} \overset{[WV]_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$$

elde edilir.

□

Lemma 5.6 (X,ρ) bir metrik uzay, A_k ve B_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. $\varepsilon_1 > 0$, her $\varepsilon > 0$, her $n \geq n_0$ ve her $m \geq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde n_0 ve m_0 sayıları varsa $\{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$ dır.

İspat: $\varepsilon_1 > 0$ olsun. Her $\varepsilon > 0$, her $n \geq n_0^{'}$ ve her $m \geq m_0$ için m'ye göre düzgün olarak,

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

olacak şekilde $n_0^{'}$ ve m_0 seçelim. $n \geq n_0^{''}$ ve $0 \leq m \leq m_0$ için

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

olacak şekilde $n_0^{''}$ var olduğunu ispatlamak yeterlidir.
$n_0 = \max(n_0^{'}, n_0^{''})$ alınırsa, $n \geq n_0$ ve bütün m'ler için

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

eşitsizliğini sağlar. $0 \leq m \leq m_0$ m_0 tamsayı olup, yerine koyulursa;

$$K = |\{0 \leq k \leq m_0 - 1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}|$$

elde edilir.
Şimdi $0 \leq m \leq m_0$ ve $n \geq m_0$ alınırsa ve

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| < \frac{\varepsilon_1}{2}$$

eşitsizliği ile

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq m_0 - 1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$+ \frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{1}{n}|\{m_0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m_0)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2}$$

elde edilir ve n yeterince büyük alınırsa,

$$\leq \frac{K}{n} + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1$$

elde edilir.

5.2 Küme Dizilerinin Lacunary İnvaryant Denkliği

Tanım 5.7 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $x \in X$ için, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) = L$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik lacunary invaryant denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WN^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir.

Tanım 5.8 (X, ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $x \in X$ için, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı kuvvetli asimptotik lacunary invaryant denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir.

Tanım 5.9 (X,ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi olsun. A_k ve B_k, X in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olmak üzere eğer, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için, m ye göre düzgün olarak

$$\lim_r \frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, $\{A_k\}$ ve $\{B_k\}$ dizilerine *L katlı asimptotik lacunary invaryant istatistiksel denktirler (Wijsman anlamında)* denir ve

$$\{A_k\} \overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$$

ile gösterilir.

Teorem 5.10 (X,ρ) bir metrik uzay ve θ bir lacunary dizisi, A_k ve B_k X'in boş kümeden farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer her $x \in X$ için,

(i) $\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ ise $\{A_k\} \overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$

(ii) Her $x \in X$ için $\sup_{k,m} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)})| < \infty$ ve $\{A_k\} \overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ ise $\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$

dır.

İspat.

(i) $\varepsilon > 0$ ve $\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için, m'ye göre düzgün olarak,

$$\sum_{k\in I_r} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| = \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x;_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon}} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| + \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x;A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)})-L|<\varepsilon}} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L|$$

olup,

$$\begin{aligned}\sum_{k\in I_r} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| &\geq \sum_{\substack{k\in I_r \\ |d(x;A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon}} |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \\ &\geq \varepsilon. \left|\{k \in I_r : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}\right|\end{aligned}$$

bulunur. Yani,

$$\sum_{k\in I_r} |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon.\left|\{k\ I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada her iki taraf pozitif $\dfrac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r\to\infty$ iken limite geçilirse

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada $\{A_k\} \overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafının $r\to\infty$ iken limiti 0 dır. Böylece

$$\varepsilon.\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right| \leq 0$$

ise

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right| = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{A_k\} \overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ olduğunu gösterir.

(ii) Kabul edelim ki $\sup_{k,m}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})| < \infty$ ve $\{A_k\} \overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim} \{B_k\}$ olsun. Bu taktirde her $x\in X$ ve her k ve $m\geq 1$ için

$$\left|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L\right| \leq M$$

olacak şekilde bir $M>0$ sayısı vardır. Buradan $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| &= \frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon}}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \\
&\quad+\frac{1}{h_r}\sum_{\substack{k\in I_r\\ |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|<\varepsilon}}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \\
&\leq \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right| \\
&\quad+\varepsilon.\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma(m)^k},B_{\sigma^k(m)})-L| < \varepsilon\}\right| \\
&= \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \geq \varepsilon\}\right| + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \leq \frac{M}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon$$

olur. Burada her iki tarafın $r\to\infty$ iken limiti alınırsa

$$\begin{aligned}\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r} & |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L| \\ & \leq \lim_{r\to\infty}\left(M.\frac{1}{h_r}\left|\{k\in I_r : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}\right|+\varepsilon\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

bulunur. $\{A_k\}\overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim}\{B_k\}$ olduğundan (5.3) eşitsizliğinin sağ tarafındaki limit değeri ε a eşittir. Böylece

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\leq\varepsilon \Rightarrow \lim_{r\to\infty}\frac{1}{h_r}\sum_{k\in I_r}|d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|=0$$

elde ederiz ki bu $\{A_k\}\overset{[WN]^L_{\sigma\theta}}{\sim}\{B_k\}$ olması demektir. □

Teorem 5.11 (X,ρ) bir metrik uzay, θ bir lacunary dizisi, A ve $A_k$lar X in boş kümeden farklı kapalı altkümeleri olsun. Her θ lacunary dizisi ve her $x\in X$ için

$$\{A_k\}\overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim}\{B_k\}\Leftrightarrow\{A_k\}\overset{WS^L_{\sigma}}{\sim}\{B_k\}$$

dır.

İspat. $\{A_k\}\overset{WS^L_{\sigma\theta}}{\sim}\{B_k\}$ olsun. $\varepsilon_1>0$, $r\geq r_0$ için $u\geq 0$, $m=k_{r-1}+1+u$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r}|\{0\leq k\leq h_r-1 : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}|\leq\varepsilon_1$$

olacak şekilde bir r_0 sayısı vardır. $n\geq h_r$ olsun. i bir tamsayı ve t $0\leq t<h_r$ aralığında seçildiğinde $n=ih_r+t$ yazılır. $n\geq h_r$ ve $i\geq 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq n-1 : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}|$$

$$\leq\frac{1}{n}|\{0\leq k\leq (i+1)h_r-1 : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}|$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{1}|\{jh_r\leq k\leq (j+1)h_r-1 : |d(x;A_{\sigma^k(m)},B_{\sigma^k(m)})-L|\geq\varepsilon\}|$$

$$\leq \frac{1}{n}(i+1)h_r\varepsilon_1 \leq 2i\frac{h_r}{n}\varepsilon_1$$

$(i \geq 1)$ $\dfrac{h_r}{n} \leq 1$ için ve $\dfrac{ih_r}{n} \leq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{n}|\{0 \leq k \leq n-1 : |d(x; A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - L| \geq \varepsilon\}| \leq 2\varepsilon_1.$$

dır. Böylece $\{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$dır. Bu taktirde

$$\{A_k\} \overset{WS_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \Rightarrow \{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\} \tag{5.4}$$

elde edilir.

$\{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$ olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$, herbir $x \in X$ ve $n > N$ için,

$$\frac{1}{n}|\{k \leq n : |d(x, A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq \varepsilon\}| < \varepsilon_1, \quad m = 1, 2, ...$$

olacak şekilde $N > 0$ sayısı ve $A \subset X$ olacak şekilde boş kümeden farklı kapalı bir A kümesi vardır. θ bir lacunary dizisi olduğundan $r \geq R$ iken $h_r > N$ olacak şekilde $R > 0$ sayısı seçebiliriz. Dolayısıyla,

$$\frac{1}{h_r}|\{k \in I_r : |d(x, A_{\sigma^k(m)}, B_{\sigma^k(m)}) - d(x, A)| \geq\}| < \varepsilon_1$$

yazabiliriz. Böylece, $\{A_k\} \overset{WS_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\}$ elde edilir. O halde

$$\{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\} \Rightarrow \{A_k\} \overset{WS_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \tag{5.5}$$

dır. (5.4) ve (5.5) 'den

$$\{A_k\} \overset{WS_{\sigma\theta}^L}{\sim} \{B_k\} \Leftrightarrow \{A_k\} \overset{WS_\sigma^L}{\sim} \{B_k\}$$

elde edilir. $\square$

6 KAYNAKLAR

Ahmad, Z. U., Mursaleen, M. and Khan, Q. A. (1994). Invariant means and some matrix transformations. *Indian J. Pure Appl. Math.* , **25:** 353-359.

Aiyub, M. and Khan, Q. A. (2010). On a sequence space related to invariant means and matrix transformations. *Inter. Math. F.*, **5:** 2465-2470.

Attouch, H., Lucchetti, R. and Wets, R. J.-B (1991). The topology of the $\rho-$ Hausdorff distance. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, **160:** 303-320.

Aubin, J.-P. and Frankowska, H. (1990). Set-valued analysis. Birkhauser, Boston.

Aze, D. and Penot, J.-P. (1990). Operations on convergent families of sets and functions. *Optimization*, **21:** 521-534.

Banach S. (1932). Theorie des operations linearies. Warswaza.

Baronti, M. and Papini, P. (1986). Convergence of sequences of sets. In: Micchelli, C. A., Pai, D. V., Methods of functional analysis in approximation theory ISNM 76, Birkhauser-Verlag, Basel, 133-155.

Beer, G. (1985). On convergence of closed sets in a metric space and distance functions. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **31:** 421-432.

Beer, G. (1987). Metric spaces with nice closed balls and distance functions for closed sets. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **35:** 81-96.

Beer, G. (1989). Support and distance functionals for convex sets. *Numer. Func. Anal. Optim.*, **10:** 15-36.

Beer, G. (1993). Topologies on closed and closed convex sets. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Beer, G. (1994). Wijsman Convergence: A survey. *Set-Valued Var. Anal.*, **2:** 77-94.

Beer, G. (1994). Wijsman convergence of convex sets under renorming. *Nonlinear Anal. Theor. Math. App.*, **22:** 207-216.

Beer, G. (2002). On the compactness theorem for sequences of closed sets. *Mathematica Balkanica*, **16:** 327-338.

Beer, G. and Di concilio, A. (1991). Uniform continuity on bounded sets and the Attouch-Wets topology. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **112:** 235-243.

Beer, G. and Lucchetti, R. (1993). Weak topologies for the closed subsets of a metrizable space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **335:** 805-822.

Bell, E. T. (1929). Certain invariant sequences of polinamials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **31:** 405-421.

Borwein, J. M. and Vanderwerff, J. (1994). Dual Kadec-Klee norms and the relationship between Wijsman, slice and Mosco convergence. *Michigan Math. J.*, **41:** 371-387.

Boss, J. (2000). Classical and Modern Methods in Summability. Oxford University Press Inc., New York.

Boss, J. and Seydell D. (1999). Some remarks an invariant means and almost convergence. *J. Anal.*, **7:** 21-30.

Buck, R. C. (1953). Generalized asymptotic density. *Amer. J. Math.*, **75:** 335-346.

Connor, J. S. (1988). The statistical and strong $p-$Cesàro convergence of sequences. *Analysis*, **8:** 47-63.

Connor, J. S. (1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Canad. Math. Bull.*, **32:** 194–198.

Das, G. and Mishra, S. K. (1983). Banach limits and lacunary strongly almost convergence. *J. Orissa Math. Soc.*, **2:** 61-70.

Das, G. and Patel, B. K. (1989). Lacunary distribution of sequences. *Indian J. Pure*, **20:** 64-74.

Edely, O. H. H. and Mursaleen, M. (2009). On statistical $A-$summability. *Math. Comput Modelling,* **49:** 672-680.

Effros, E. G. (1965). Convergence of closed subsets in a topological space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16:** 929-931.

Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloq. Math.,* **2:** 241-244.

Freedman, A. R., Sember, J. J. and Raphael, M. (1978). Some Cesàro type summability spaces. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **37:** 508-520.

Freedman, A. R. and Sember, J. J. (1981). Densities and summability. *Pacific J. Math.*, **95:** 293-305

Freedman, A. R. and Sember, J. J. (1981). On summing sequences of 0's and 1's. *Rocky Mountain J. Math.*, **11:** 419-426.

Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, **5:** 301-313.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical convergence. *Pacific J. Math.,* **160:** 43-51.

Fridy, J. A. and Orhan, C. (1993). Lacunary statistical summability. *J. Math. Anal. Appl.,* **173:** 497-504.

Gümüş, H. and Connor, J. (2011). Asymptotic ΔI Equivalent Sequences. *Istanbul Commerce University Journal of Science,* **10:** 37-50.

Hardy, G. H. (1949). Divergent series. Clarendon Press, Oxford.

Karakaya, V. (2004). On lacunary σ-statstical convergence. *Information Sciences*, **166:** 271-280.

Karakaya, V. and Şimşek, N. (2003). On lacunary invariant sequence spaces defined by a sequence of modulus functions. *Studia Univ. Babeş-Bolyai Mathematica* **48:** 43-47.

Karakaya V. and Şimşek N. (2004). On lacunary invariant sequence spaces defined by a sequence of modulus functions. *Appl. Math. Computation*, **156:** 597-603.

Lechicki, A. and Levi, S. (1987). Wijsman convergence in the hyperspace of a metric space. *Boll. Un. Mat. Ital.*, **7:** 439-452.

Li, J. (1997). Asymptotic equivalence of sequences and summability. *Internat. J. Math., Math. Sci.*, **20:** 749-758.

Lorentz, G. G. (1948). A contribution to the theory of divergent sequences. *Acta Math.*, **80:** 167-190.

Lucchetti, R. (1985). Convergence of sets and of projections. *Boll. Un. Mat. Ital.*, **4:** 477-483.

Maddox, I. J. (1967). Spaces of strongly summable sequences. *Q. J. Math.*, **18:** 345-355.

Maddox, I. J. (1970). Elements of functional analysis. Cambridge University Press, Cambridge.

Maddox, I. J. (1978). A new type of convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **83:** 61-64.

Maddox, I. J. (1979). On strongly almost convergence. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **85:** 345-350.

Maddox, I. J. (1980). Infinite matrices of operators. In: Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York.

Maddox, I. J. (1986). Sequence spaces defined by a modulus. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **100:** 161-166.

Marouf, M. (1993). Asymptotic equivalence and summability. *Internat. J. Math. Sci.*, **16:** 755-762.

Miller, H. (1973). A class of non-rate invariant sequence transformations. *Akad Nauka Umjet Bosne i Hercegovine Rad Odjelj. Prir. Math. Nauka*, **12:** 41-43.

Miller, H. (1995). A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Transactions of the American Mathematical Society.*, **347:** 1811-1819.

Mursaleen, M. (1979). On infinite matrices and invariant means. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **10:** 457-460.

Mursaleen, M. (1983). On some new invariant matrix methods of summability. *Quart J. Math. Oxford*, **34:** 77-86.

Mursaleen, M. and Alotaibi, A. (2011). Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem. *Ann. Univ. Ferrara*, **57:** 373-381.

Mursaleen, M. and Edely, O. H. H. (2009). On invariant mean and statistical convergence. *Appl. Math. Lett.*, **22:** 1700-1704.

Nakano, H. (1953). Concave modulars. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, **1:** 29-49.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition, New York.

Nuray, F. (1997). $\theta-$almost summable sequences. *Int. J. Math. Math. Sci.*, **20:** 741-744.

Nuray, F. and Rhoades, B. E. (2012). Statistical convergence of sequences of sets. *Fasc. Math.*, **49:** 87-99.

Nuray, F. and Ruckle W. H. (2000). Generalized statistical convergence and convergence free spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, **245:** 513-527.

Nuray, F. and Savaş, E. (1993). Some new sequence spaces defined by a modulus function. *Indian J. Pure Appl. Math*, **24:** 657-663.

Nuray, F. and Savaş, E. (1994). Invariant statistical convergence and A-invariant statistical convergence. *Indian J. Pure Appl. Math*, **25:** 267-274.

Patterson, R. F. (2009). On asymptotically statistical equivalent sequences. *Demonstratio Mathematica*, **36:** 149-153.

Patterson, R. F. and Savaş, E. (2006). On asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Thai J. Math.*, **4:** 267-272.

Pehlivan, S. (1989). Sequence space defined by a modulus function. *Erciyes Univ. Fen Bil. Der.*, **5:** 875-880.

Pehlivan, S. and Fisher, B. (1994). On some sequence spaces. *Indian J. Pure Appl. Math*, **25:** 1067-1071.

Pehlivan, S. and Fisher, B. (1995). Some sequence spaces defined by a modulus. *Math. Slovaca*, **45:** 275-280.

Pobyvanets, I. P. (1980). Asymptotic equivalence of some linear transformations, dened by a nonnegative matrix and reduced to generalized equivalence in the sense of Cesàro and Abel. *Mat. Fiz.*, **123:** 83.87, MR 632482 (83h:40004).

Powel, R. E. and Shah, S. M. (1972). Summability theory and its applications. Van Nostrand-Rheinhold, London.

Raimi, R.A. (1959). On Banach's generalized limits. *Duke. Math. J.*, **26:** 17-28.

Raimi, R.A. (1963). Invariant means and invariant matrix methods of summability. *Duke. Math. J.*, **30:** 81-94.

Ruckle, W. (1973). FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded. *Can. J. Math.*, **25:** 973-978.

Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca*, **30:** 139-150.

Salinetti, G. and Wets, R.J.-B. (1979). On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions. *SIAM Review*, **21:** 18-33.

Savaş, E. (1989). Strongly σ-convergence sequences. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **81:** 295-300.

Savaş, E. (1989). Some sequence space involving invariant means. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **31:** 1-8.

Savaş, E. (1990). On lacunary strong σ-convergence. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **21:** 359-365.

Savaş, E. (1992). On strong almost A summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **23:** 217-222.

Savaş, E. (1999). On some generalized sequence spaces defined by a modulus. *Indian J. Pure Appl. Math.*, **30:** 459-464.

Savaş, E. and Nuray, F. (1993). On σ statistically convergence and lacunary σ statistically convergence. *Math. Slovaca*, **43:** 309-315.

Savaş, E. and Patterson, R. (2006). σ asymptotically lacunary statistical equivalent sequences. *Cent. Eur. J. Math.*, **4:** 648-655.

Savaş, E. and Rhoades, B. E. (2002). On some new sequences space of invariant means defined by orlicz functions. *Mathematical Inequalities and Appl.*, **5:** 271-281.

Savaş, E. and Savaş, R. (2003). On some sequence spaces and lacunary σ statistical convergence. *Mathematical and Compu. Appl.*, **8:** 165-172.

Schaefer, P. (1972). Infinite matrices and invariant means. *Prog. Amer. Math. Soc.*, **36:** 104-110.

Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly*, **66:** 361-375.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1993). Set convergences. An attempt of classification, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340:** 199-226.

Sonntag, Y. and Zalinescu, C. (1994). Convergences for sequences of sets and linear mappings. *J. Math. Anal. Appl.*, **188:** 487-490.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2012). Lacunary statistical convergence of sequences of sets. *Prog. Appl. Math.*, **4:** 99-109.

Ulusu, U. and Nuray, F. (2013). On asymptotically lacunary statistical equivalent set sequences. *Journal of Mathematics.*, dx.doi.org/10.1155/2013/310438.

Volkov, I. I. (2001). Cesàro summation methods. In: Hazewinkel, M., (Eds.), Encyclo-pedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4.

Wijsman, R. A. (1964). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70:** 186-188.

Wijsman, R. A. (1966). Convergence of Sequences of Convex Sets, Cones and Functions II. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **123:** 32-45.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Nimet PANCAROĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 25/06/1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: npancaroglu@aku.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Zafer Lisesi, 2004
Lisans	: On Dokuz Mayıs Üniversitesi, 2008
Yüksek Lisans	: Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2010

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü, 2012-...

Yayınları (SCI ve Diğer)

Pancaroğlu, N. and Nuray, F. (2014). Invariant Statistical Convergence of Sequences of Sets With Respect to a Modulus Function, *Abstract and Applied Analysis*, dx.doi.org/10.1155/2014/818020.

Pancaroğlu, N. and Nuray, F. (2013). On Invariant Statistically Convergence and Lacunary Invariant Statistical Convergence of Sequences of Sets, *Progress in Applied Mathematics*, **5**(2)**:** 23-29.

Pancaroğlu, N. and Nuray, F. (2013). Statistical Lacunary Invariant Summability Sequences, *Theoretical Mathematics Applications*, **3**(2)**:** 71-78.