EPİ-YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Şükrü TORTOP

DANIŞMAN

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EPİ-YAKINSAKLIK

Şükrü TORTOP

DANIŞMAN
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2014

TEZ ONAY SAYFASI

Şükrü TORTOP tarafından hazırlanan "Epi-Yakınsaklık" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 02/06/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Murat Peker
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER
: Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./....... tarih ve
......./....... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Yılmaz YALÇIN
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

12/06/2014

Şükrü Tortop

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

EPİ-YAKINSAKLIK

Şükrü TORTOP
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu çalışma, beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmı için ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışma için gerekli kavramların tanımları ve bazı teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik yakınsaklık kavramları verilmiş, bu yakınsaklık çeşitlerinin birbirleri ile ve epi-yakınsaklık ile olan ilişkileri verilmiş, bu yakınsaklık türlerinin hangi şartlar altında epi-yakınsaklık ile örtüşeceği örneklerle anlatılmıştır. Dördüncü bölümde, tamamen epi-yakınsaklık ve epigraflar hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde ise, küme yakınsaklığı üzerinde durulmuş ve bu bölümün en son kısmında da epi-yakınsaklık ve epigraflar ile küme yakınsaklığı arasındaki ilişki verilmiştir.

2014, vi+51 sayfa

Anahtar Kelimeler : Epi-yakınsaklık, epi-limit, epigraf, küme yakınsaklığı, seviye kümeleri, Painleve-Kuratowski yakınsaklık.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

EPI-CONVERGENCE

Şükrü TORTOP
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Fatih NURAY

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter includes main definitions and theorems that are necessary for the rest of the paper. In the third chapter, classical convergence types are introduced and the relation of those with epi-convergence is given. Moreover, it is discussed with examples that in which conditions classical convergence types imply epi-convergence. The fourth chapter is totally devoted to epi-convergence and epigraph of the functions and they are explained in detail. In the last chapter namely chapter five, set convergence is introduced and its relation with epi-convergence and epigraph of the functions is discussed.

2014, vi+51 pages

Key Words : Epi-convergence, epi-limit, epigraph, set convergence, level sets, Painleve-Kuratowski convergence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a ve hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Yurdal SEVER, Sayın Yrd. Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR, Sayın Yrd. Doç. Dr. Uğur ULUSU'ya ve ayrıca tez yazım aşamasındaki yardımlarından dolayı Sayın Doç. Dr. Başak KARPUZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Şükrü TORTOP

AFYONKARAHİSAR, 2014

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$x = (x_v)$	Reel sayı dizisi
$\sup$	En küçük üst sınır
$\inf$	En küçük alt sınır
$B(x_0, \delta)$	x_0 merkezli δ yarıçaplı açık yuvar
$\{f_v\}$	Fonksiyon dizisi
$\{A_v\}$	Küme dizisi
$e - \lim$	Epi limit
$p - \lim$	Noktasal limit
$\mathrm{epi} f$	f fonksiyonunun epigrafı
$\mathrm{hypo} f$	f fonksiyonunun hipografı
$\mathrm{dom} f$	f fonksiyonunun tanım kümesi
$\mathrm{argmin} f$	f fonksiyonunun minimum noktası
E_f	f fonksiyonunun küme değerli eşlemesi
$\mathrm{cl} A$	A kümesinin kapanışı
$\mathcal{N}_\infty$	Doğal sayıların bazı v indislerini içermeyen alt kümesi
$\mathcal{N}_\infty^\#$	Doğal sayıların bütün alt kümeleri
$d_C(x)$	x elemanının bir C kümesine olan uzaklığı
$\mathrm{gap}(C, D)$	Boş olmayan C ve D kümeleri arasındaki mesafe
$\rightarrow$	Yakınsaklık (adi anlamda)
$\rightarrow_p$	Noktasal yakınsaklık
$\rightarrow_e$	Epi yakınsaklık
$\rightarrow_h$	Hypo yakınsaklık

ŞEKİLLER DİZİNİ

1 GİRİŞ

Epi-yakınsaklık kavramı, 1960'ların sonunda bazı matematiksel problemlerin çözümünde ihtiyaç duyulan bir yakınsaklık çeşidi olarak ortaya çıkmıştır. Bu matematiksel problemler; istatistikteki zor problemlere yaklaşım, stokastik optimizasyon, varyas-yonel eşitsizlikler ve kontrol sistemlerinden oluşmaktadır. Bu alanlarda kullanılmak üzere geliştirilen bu yakınsaklık türü, konveks analizde, kısmi diferansiyel denklemlerde, varyasyonel problemlerde ve stokastik optimizasyon problemlerinde kolaylıklar sağlamaktadır. Hedy Attouch ve Roger Wets'in 1980'de yayınladıkları bir makalede detaylı bir şekilde incelenen bu konu, daha sonra Tyrrell Rockafellar ve Roger Wets'in 1997'de yayınladıkları Varyasyonel Analiz kitabında da ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve analizdeki diğer konularla ve yakınsaklık çeşitleriyle olan bağlantıları anlatılmıştır.

Bu tez çalışmasının birinci bölümü giriş için ayrılarak kalan kısmı aşağıdaki gibi organize edilmiştir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde, bu çalışma için gerekli olan bazı temel kavramların tanımlarına, bazı teoremlere ve bunlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir.

Tez çalışmasının üçüncü bölümünün ilk kısmında, epi-yakınsaklık kavramının optimizasyon problemleri ile olan ilişkisine değinilmiş ve diğer yakınsaklık çeşitleri ile kıyaslanarak, bu tür problemlerin çözümünde ne derece etkili olduğu incelenmiştir. Noktasal yakınsak olup epi-yakınsak olmayan ve epi-yakınsak olup noktasal yakınsak olmayan örnekler incelenmiş, noktasal yakınsaklığın hangi durumlarda epi-yakınsaklığı gerektireceği araştırılmıştır. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise, alttan yarı sürekliliğin epi-yakınsak-lık ile olan ilişkisi üzerinde durulmuş ve diğer klasik yakınsaklık çeşitlerinin alttan yarı süreklilik özelliği eklenmesi ile epi-yakınsaklığa hangi ek şartlar altında denk olacağı detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde, epi-yakınsaklık konusu daha detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Epi-yakınsaklık ile ilgili farklı yaklaşımlar ve tanımlar verilmiştir. Fonksiyon dizilerinin epigrafları ve hipografları tanımlanmış, bu tanımlar üzerinden epi-yakınsaklık tanımı grafiksel olarak tekrar yorumlanmıştır. Verilen bir fonksiyon dizisinin bir fonksiyona epi-yakınsak olması daha da özel bir hale getirilip, sadece bir noktadaki epi-yakınsaklık tanımı üzerinde de durulmuştur. Bölümün ilerleyen kısımlarında, epi-yakınsaklığı diğer yakınsaklıklardan ayıran minimum noktalar ve bu noktalarda fonksiyon dizilerinin aldığı değerler ile aynı değerlerin yakınsanan fonksiyondakilerle kıyaslanması ve aralarındaki ilişki de ortaya konulmuştur. Son olarak epigraflar ve yarı süreklilik ile olan ilişkiye bakılmış, alttan yarı sürekli fonksiyonların epigraflarının neden kapalı olması gerektiği ispatıyla birlikte verilmiştir.

Çalışmanın son bölümünde küme yakınsaklığı üzerinde durulmuştur. İç ve dış limitler ile küme yakınsaklığının temel özellikleri verilmiş, Painleve Kuratowski yakınsaklığının tanımı yapılmıştır. Ayrıca bu yakınsamanın epigraflar üzerinden nasıl yapılacağı üzerinde durulmuş ve fonksiyon dizilerinin epigrafının ve bu dizilerin epi-yakınsak olduğu fonksiyonun epigrafının Kuratowski yakınsaklığı ile olan ilişkisi anlatılmıştır. Çalışmada kullanılan kaynaklar ise, kaynaklar bölümünde verilmiştir.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilecektir.

2.1 Genel Tanımlar

Tanım 2.1.1 A ve B iki küme olmak üzere, A'dan B'ye bir f bağıntısı,
(i) $\forall x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde $\exists y \in B$ var,
(ii) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f$ ise $y = z$.
özelliklerine sahipse f'ye A'dan B'ye bir *fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.2 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye *reel terimli dizi*, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi olan diziye *rasyonel terimli dizi* adı verilir. Dizi $x = (x_v) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.3 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(v) = x_v$ dizisi verilmiş olsun.

$$k : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ k(v) = k_v$$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere,

$$(xok) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

bileşke fonksiyonuna x dizisinin bir *alt dizisi* adı verilir ve,

$$(xok)(v) = x(k(v)) = x(k_v) = x_{k_v}$$

şeklinde gösterilir (Balcı, 1999).

Tanım 2.1.4 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $K = \{x : |x - a| < \varepsilon,\ x \in \mathbb{R}\}$ kümesine a'nın ε *komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.5 (x_v) bir reel sayı dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $v > v_0$ olduğunda $|x_v - a| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı bir v_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_v) dizisi a'ya *yakınsaktır* denir ve,

$$\lim x_v = a \text{ veya } (x_v) \to a$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6 (x_v) bir dizi olsun. Her $v \in \mathbb{N}$ için $|x_v| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_v) dizisine *sınırlı dizi* denir.

Tanım 2.1.7 (x_v) bir reel terimli dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, v \geq v_0$ olduğunda $|x_m - x_v| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $v_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_v) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.8 (x_v) bir reel terimli dizi olsun. (x_v) dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

Tanım 2.1.9 $(x_v) \subset \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. a noktasının her $\delta-$ komşuluğunda (x_v) dizisinin a'dan farklı en az bir elemanı varsa bu a noktasına (x_v) dizisinin bir *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.1.10 (x_{v_k}), (x_v) dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{v_k}) yakınsak ve limiti s ise, bu s noktasına (x_v) dizisinin bir *limit noktası* denir.

Tanım 2.1.11 $A \subset \mathbb{R}, f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.
Her $\varepsilon > 0$ için $|x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ varsa f fonksiyonu a noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.1.12 $A \subset \mathbb{R}$ ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.
Her $\varepsilon > 0$ için $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ varsa f fonksiyonu A üzerinde *düzgün süreklidir* denir.

Tanım 2.1.13 $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$ da A üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların kümesi olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

şeklinde tanımlanan s fonksiyonuna bir *fonksiyon dizisi* adı verilir (Balcı, 1997).

Tanım 2.1.14 $\forall \varepsilon > 0$, herbir $x \in A$ için $v > v_0$ olduğunda $|f_v(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_v) dizisi A üzerinde f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.15 $\forall \varepsilon > 0$ ve her $x \in A$ için $v \geq v_0$ olduğunda $|f_v(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (f_v) dizisi f fonksiyonuna A üzerinde *düzgün yakınsaktır* denir.

Tanım 2.1.16 $X \neq \emptyset$ olsun. $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için,

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

M3) $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

şartları sağlanıyorsa d ye X de bir metrik ve d ile birlikte X e *metrik uzay* denir. Bu genellikle (X, d) veya X_d ile gösterilir (Bayraktar 2000).

Tanım 2.1.17 X bir metrik uzay olsun. X kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer,

$$X \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *örtüsü* denir. Eğer her $i \in I$ için, A_i kümeleri X kümesinin açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir *açık örtüsü* denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne, X kümesinin *sonlu örtüsü* denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye, X kümesinin bir *alt örtüsü* denir (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.18 (X, d) metrik uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, (X, d) metrik uzayına *kompakt metrik uzay* denir (Yüksel 2002).

Tanım 2.1.19 (X, d) bir metrik uzay ve (x_v) bu uzayda bir dizi olsun. Verilmiş herhangi bir $\varepsilon > 0$ için $m, v > v_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_v) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $v_0 = v_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_v) dizisine Cauchy dizisi denir. X deki her (x_v) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak ise yani $x_v \to x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına *tam metrik uzay* veya kısaca tam denir.

Tanım 2.1.20 $(a_1, a_2, ..., a_n), \mathbb{R}^n$ de bir sabit nokta ve $\varepsilon > 0$ olsun.

$$D(a, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < \varepsilon\}$$

kümesine a merkezli $\varepsilon-$ yarıçaplı *açık yuvar* adı verilir.

Tanım 2.1.21 $A \cap B = \emptyset$ ise A ile B kümeleri *ayrıktır* denir.

Tanım 2.1.22 $X \neq \emptyset$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere,

$$f : \mathbb{N} \to P(X)$$

şeklinde tanımlı fonksiyon $\forall v \in \mathbb{N}$ için $P(X)$ de bir

$$f(v) = A_v \in P(X)$$

kümesi belirler. Bu f fonksiyonunun değer kümesini oluşturan $A_1, A_2, A_3, ...$ kümelerinin oluşturduğu diziye *küme dizisi* denir.

Tanım 2.1.23 (X, ρ) bir metrik uzay olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve boş kümeden farklı herhangi bir $A \subset X$ kümesi için, x noktası ile A kümesi arasındaki uzaklık

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.24 (X, ρ) bir metrik uzay ve $\{A_v\}$ bu metrik uzayda bir küme dizisi olsun.

$$\text{Liminf} A_v = \{x \in X : \ \exists (a_v) \subset \{A_v\}, \ a_v \to x\}$$

ve

$$\text{Limsup} A_v = \{x \in X : \ \exists (v_i), \ \exists (a_{v_i}) \subset \{A_{v_i}\}, \ a_{v_i} \to x\}$$

olmak üzere eğer,

$$A = \text{Liminf} A_v = \text{Limsup} A_v = \text{Lim} A_v$$

oluyorsa, $\{A_v\}$ dizisi A kümesine *yakınsaktır* veya $\{A_v\}$ dizisi A kümesine *Kuratowski yakınsaktır* denir ve

$$A_v \to A \ \text{ veya } \ A_v \xrightarrow{K} A \ \text{ ya da sadece } \ K - \lim A_v = A$$

ile gösterilir (Baronti and Papini 1986).

Yukarıdaki tanımda, X in boş kümeden farklı A_v altkümelerinin $\{A_v\}$ dizisi için,

$$\text{Liminf} A_v = \left\{ x \in X : \ \limsup_{v \to \infty} d(x, A_v) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ x \in X : \ \lim_{v \to \infty} d(x, A_v) = 0 \right\}$$

ve

$$\text{Limsup} A_v = \left\{ x \in X : \ \liminf_{v \to \infty} d(x, A_v) = 0 \right\}$$

olarak da verilebilir.

Tanım 2.1.25 (X,d) metrik uzayından (Y,ρ) metrik uzayına sürekli fonksiyonların oluşturduğu $C(X,Y)$ uzayını göz önüne alalım. Bir $K \subset C(X,Y)$ alt uzayı, her $f \in K$ fonksiyonu için verilen her $\epsilon > 0$ sayısına karşı gelen, f'den bağımsız bir $\delta(\epsilon, x) > 0$ sayısı $d(x,y) < \delta$ alındığında $\rho(f(x), f(y)) < \epsilon$ olacak şekilde bulunuyorsa $x \in X$ noktasında *eşsürekli*'dir denir. Fonksiyon dizisi eğer her $x \in X$ noktasında eşsürekli ise K alt uzayı *eşsürekli* olur. $\delta = \delta(\epsilon)$ ise K alt uzayına *düzgün eşsürekli* denir (Giulio Ascoli 1880).

Tanım 2.1.26 X ayrılabilir bir tam metrik uzay ve f fonksiyonu da bu uzay üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer x'e yakınsayan her $\{x_v\}$ dizisi için, f fonksiyonu,

$$\limsup_{v\to\infty} f(x_v) \leq f(x)$$

şartını sağlıyorsa, f fonksiyonu x noktasında *üstten yarı sürekli*'dir denir. Benzer şekilde, f fonksiyonu için,

$$\liminf_{v\to\infty} f(x_v) \geq f(x)$$

şartını sağlıyorsa, ya da $-f$ üstten yarı sürekliyse, o zaman f fonksiyonuna x noktasında *alttan yarı sürekli*'dir denir (Hinderer 1970).

Örnek 2.1.27 $y = f(x)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 1/2, & x > 1. \end{cases}$$

Verilen fonksiyon $x = 1$ noktasında üstten yarı süreklidir.

Önerme 2.1.28 X ayrılabilir bir tam metrik uzay olsun.

a. Eğer f ve g fonksiyonları X üzerinde üstten yarı sürekli ise, $f + g$ fonksiyonu da X üzerinde üstten yarı süreklidir.

b. Eğer $f \geq 0$ ve $g \geq 0$ fonksiyonları X üzerinde üstten yarı sürekli ise, $f.g$ fonksiyonu da X üzerinde üstten yarı süreklidir.

c. Eğer $f \geq 0$ alttan yarı sürekli ve $g \leq 0$ üstten yarı sürekli ise (X üzerinde), $f.g$ fonksiyonu da X üzerinde üstten yarı süreklidir.

d. Eğer $\{f_v\}$ dizisi X üzerinde, üstten yarı sürekli fonksiyonların pozitif olmayan ve azalan bir dizisi ise, $\lim_{v\to\infty} f_v$ fonksiyonu da X üzerinde üstten yarı süreklidir.

e. $\{f_v\}$ dizisi X üzerinde üstten yarı sürekli fonksiyonların sınırlı bir dizisi olsun ve f_v dizisi, f'ye düzgün olarak yakınsasın. Bu durumda f fonksiyonu, X üzerinde üstten yarı süreklidir (Maitra 1968).

Tanım 2.1.29 Reel sayıların bir X kümesi için, $\xi = \sup X$, X kümesinin *supremumu* (ya da X kümesinin en küçük üst sınırı) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. Bütün $x \in X$ elemanları için, $x \leq \xi$,

2. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için, öyle bir x vardır ki, $x > \xi - \epsilon$.

Benzer şekilde X kümesi için, $\zeta = \inf X$, X kümesinin *infumumu* (ya da X kümesinin en büyük alt sınırı) aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. Bütün $x \in X$ elemanları için, $x \geq \zeta$,

2. Herhangi bir $\epsilon > 0$ için, öyle bir x vardır ki, $x < \zeta - \epsilon$ (Hazewinkel 2001)

Tanım 2.1.30 Reel sayıların bir X kümesinde, (x_v) dizisinin *limit infimumu*,

$$\liminf_{v\to\infty} x_v := \lim_{v\to\infty} (\inf_{m\geq v} x_m)$$

veya,

$$\liminf_{v\to\infty} x_v := \sup_{v\geq 1}(\inf_{m\geq v} x_m) = \sup\{\inf\{x_m| \ m \geq v\} : \ v \geq 1\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde (x_v) dizisinin *limit supremumu*,

$$\limsup_{v\to\infty} x_v := \lim_{v\to\infty} (\sup_{m\geq v} x_m)$$

veya,

$$\limsup_{v\to\infty} x_v := \inf_{v\geq 1}(\sup_{m\geq v} x_m) = \inf\{\sup\{x_m| \ m \geq v\} : \ v \geq 1\}$$

olarak tanımlanır (Michiel, 2001). Şimdi limit infimum ve limit supremum ile ilgili bazı özelliklere göz atalım.

- $\liminf_{v\to\infty} x_v \leq \limsup_{v\to\infty} x_v$

- $-\liminf_{v\to\infty} x_v = \limsup_{v\to\infty}(-x_v)$
- $\limsup(x_v + y_v) \leq \limsup x_v + \limsup y_v$
- $\liminf(x_v + y_v) \geq \liminf x_v + \liminf y_v$
- $\lim_{v\to\infty} x_v = x$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $\liminf_{v\to\infty} x_v = \limsup_{v\to\infty} x_v$ olmasıdır.

3 OPTİMİZASYON VE YAKINSAKLIK

Son yıllarda epi-yakınsaklık kavramı üzerinde durulmakta, optimizasyon ve benzeri alanlardaki çalışmalarda bu yakınsaklık çeşidinden sık sık yararlanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı epi-yakınsaklık hakkında detaylı bilgi edinmek ve bu yakınsaklık çeşidinin diğer bilinen klasik yakınsaklık çeşitleri ile ilişkisini ortaya koymaktır.

3.1 Klasik Yakınsaklık Kavramları

Matematiksel programlamalarda genellikle,

$$\inf\{\phi(x) \mid \quad x \in \tau\} \tag{3.1}$$

biçimindeki problemler $\tau \in \mathbb{R}^n$ ve $\phi : \tau \to \mathbb{R}$ şartları altında çözülürler. (3.1) tipindeki problemlere çözüm üretmek için genellikle orjinal problem diziye dönüştürülerek yakınsama metodları kullanılır.

$$\inf\{\phi_v(x) \mid \quad x \in \tau_v\} \tag{3.2}$$

tipindeki problem ilkine göre daha çözülebilir bir haldedir. Örnek vermek gerekirse stokastik programlama problemlerinde kullanılan kesme düzlemi algoritması, ceza ve çözüm metodlarında bu tarz fonksiyon dizileri kullanılır. Daha basit anlatmak gerekirse,

$$f(x) = \begin{cases} \phi(x) & , \quad x \in \tau \\ +\infty & , \quad x \notin \tau \end{cases}$$

$$f_v(x) = \begin{cases} \phi_v(x) & , \quad x \in \tau_v \\ +\infty & , \quad x \notin \tau_v \end{cases}$$

olarak tanımlandığında, (3.1) ve (3.2) sırasıyla $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$ ve $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$ ifadelerine eşit olurlar. $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$'in optimum $\inf f_v$ değerlerinin ve x_v çözümlerinin, $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$' in optimum değeri ve çözümüne makul bir şekilde yaklaşabilmesini garanti altına alabilmek için f_v fonksiyonlarının f fonksiyonuna hangi makul yöntem altında yakınsayacağını bilmemiz gerekir. $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$ tarzı problemlerin x_v çözümleri her zaman tek olmak zorunda değildir, x_v değerlerinin her zaman yakınsayacağını bilemeyiz. Dolayısıyla bize gereken tek mantıklı şey, işimizi kolaylaştıracak bir yakınsaklık metoduna göre x_v değerlerinin herbir yığılma noktasını $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$'in çözümü olarak kabul etmek olacaktır. Bunu temin etmek için de yaklaşımımız klasik yakınsamalardan f_v'nin f'ye $\mathbb{R}^n$'nin her bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün yakınsaması olacaktır. Son yirmi yıldır, epi-yakınsaklığı kavramı tanımlanmış ve çeşitli araştırmalarda yığılma noktalarının belirlenmesi ve ispatına alternatif bir yöntem olarak kullanılmıştır. Bu çalışmanın amacı elementer düzeyde epi-yakınsaklıktaki argümanların klasik yakınsaklık çeşitleriyle ne kadar ilişkili olduğunu ortaya koymaktır. Düzgün yakınsaklıktaki yığılma noktaları ile ilgili argümanların bizi epi-yakınsaklığa nasıl götüreceğini inceleyeceğiz. Doğal olarak burada bahsedilecek ifade ve teoremler daha önce bulunmuş ve bir araya getirilmiş ifadelerdir fakat epi-yakınsaklığına buradaki yaklaşım biraz daha farklıdır ve bu yaklaşım fonksiyonel analiz alanının dışında çalışan araştırmacıların da ilgisini bu konuya çekecektir.

Bu bölümde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $f_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$ fonksiyonları kullanılacaktır.

(D) *Sürekli olan bir fonksiyona düzgün yakınsama:* f sürekli, D bir kompakt küme olmak üzere $D \subset \mathbb{R}^n$ üzerinde,

$$\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) : |f_v(x) - f(x)| < \epsilon \quad x \in D, \; v \geq N(\epsilon)$$

(S) *Sürekli yakınsaklık:* $\mathbb{R}^n$ üzerinde $f_v \to f$ sürekli yakınsasın, herhangi bir x için,

$$x \in \mathbb{R}^n, \; \forall\{x_v \to x\} : \quad f_v\{x_v\} \to f(x)$$

$(E\c{S})$ *(Hemen hemen)Eş sürekli fonksiyonların yakınsaklığı:* $\mathbb{R}^n$ üzerinde, $f_v \to f$ noktasal yakınsasın ve f_v fonksiyon dizileri (hemen hemen) eş sürekli fonksiyonlar olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ için x in öyle bir $U(x, \epsilon)$ komşuluğu ve $N(x, \epsilon)$ sayısı vardır ki,

$$|f_v(y) - f_v(x)| < \epsilon, \quad y \in U(x, \epsilon), \; v \geq N(x, \epsilon).$$

Burada bahsi geçen yakınsaklık çeşitleri için, sırasıyla (D), (S) ve $(E\c{S})$ kısaltmalarını kullanacağız.

Uyarı 3.1.1 Açık olarak (hemen hemen) eş sürekli fonksiyonların yakınsaklığı klasik anlamda bilinen eş sürekli fonksiyonların yakınsaklığının rahatlatılmış halidir.

Klasik anlamda f'ye noktasal olarak yakınsayan f_v eş sürekli fonksiyon dizilerinin her birisi aynı zamanda sürekli fonksiyonlardır. Fakat (hemen hemen) eş sürekli fonksiyonlar tanımında herbir fonksiyonun sürekli olması gerekmez. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar niteliktedir.

Örnek 3.1.2

$$f_v(x) = \begin{cases} \frac{1}{v}x & , \quad x \text{ rasyonel,} \\ 0 & , \quad \text{diğer.} \end{cases}$$

Eğer $\epsilon > 0$ seçersek,

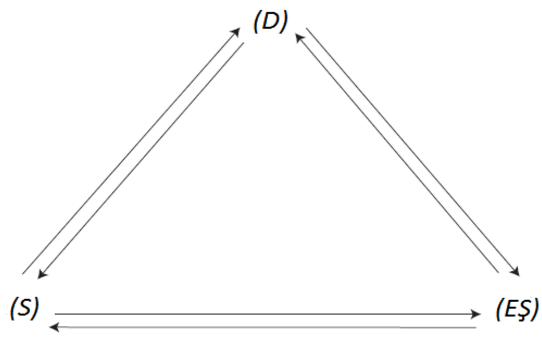
$$U(x,\epsilon) = \{y \mid \quad |y - x| < \frac{\epsilon}{2}\} \quad N(x,\epsilon) > \frac{|2x|}{\epsilon} \ ,$$

$y \in U(x,\epsilon)$ ve $v \geq N(x,\epsilon)$ olduğunda,

$$|f_v(x) - f_v(y)| < \epsilon \ ,$$

sağlanır. Burada f_v fonksiyonları (hemen hemen) eş sürekli yakınsak olmalarına rağmen, hiçbir f_v sürekli değildir.

Teorem 3.1.3 (D), (S) ve $(EŞ)$ yakınsaklık türlerinden herhangi birini sağlayan diğer ikisini de sağlar (Kall 1986).



Şekil 3.1: Yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişki

İspat $(D) \Rightarrow (S)$. $x \in \mathbb{R}^n$ için $\{x_v \to x\}$ olacak şekilde keyfi bir x_v dizisini alalım. $\{x_v\}$'yi ve x'i içeren kompakt bir D kümesi verilsin. (D)'yi varsayarak, f limitinin D üzerinde sürekli olduğunu bildiğimizden,

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \ |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in D : |x - y| < \delta(\epsilon).$$

$x_v \in D$ için f_v fonksiyonlarının D üzerinde düzgün yakınsaklığını bildiğimizden,

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N(\epsilon) : |f_v(x_v) - f(x_v)| < \epsilon \ \ \forall v > N(\epsilon),$$

ve böylece $x_v \to x$ olması da bir $M(\epsilon)$ un varlığını ortaya çıkaracaktır, $|x_v - x| < \delta(\epsilon), \ \ \forall v > M(\epsilon)$ için,

$$|f(x) - f_v(x_v)| \leq |f(x) - f(x_v)| + |f(x_v) - f_v(x_v)| < \epsilon + \epsilon,$$

$v >$ maks$[M(\epsilon), N(\epsilon)]$ alınırsa $f_v(x_v) \to f(x)$ olur.

$(S) \Rightarrow (E\c{S})$. (S)'nin sağlandığını varsayalım ve $x_v = x$ olarak alalım. $\forall v$ için $f_v(x) \to f(x)$ noktasal yakınsaklığını elde ederiz. Şimdi de $(E\c{S})$'in sağlanmadığını varsayalım. Öyle bir x ve $\epsilon > 0$ vardır ki bütün $U(x, 1/n), \ n = 1, 2, ...$ ve bütün N'ler $(N = 1, 2, ...)$ için $\exists y_n \in U(x, 1/n)$ ve $v_n > N$ olduğunda, v_n monoton artan dizisi için, $|f_{v_n}(y_n) - f_{v_n}(x)| \geq \epsilon$ olur ki bu da (S) ile çelişir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} f_{v_n}(y_n) = f(x).$$

$(E\c{S}) \Rightarrow (D)$. Kompakt bir D kümesi üzerinde rastgele bir x ve $\epsilon > 0$ için, $(E\c{S})$'i varsaydığımızda $U(x, \epsilon)$ komşuluğunda ve $N(x, \epsilon)$ sayısı için $|f_v(y) - f_v(x)| < \epsilon \ \forall y \in U(x, \epsilon), v \geq N(x, \epsilon)$ ve böylece $|f(y) - f(x)| \leq \epsilon \ \forall y \in U(x, \epsilon)$ olur, başka bir deyişle f süreklidir. D kompakt olduğundan, $x_1, ..., x_k \subset D$ ve $D \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \epsilon)$. Dolayısıyla eğer $y \in D$ ise $y \in U(x_j, \epsilon)$ olur $(j \in 1, ..., k)$ ve,

$$|f(y) - f_v(y)| \leq |f(y) - f(x_j)| + |f(x_j) - f_v(x_j)| + |f_v(x_j) - f_v(y)|$$

elde edilir. Ayrı ayrı bakacak olursak,
f'nin sürekliliğinden dolayı $\quad |f(y) - f(x_j)| \leq \epsilon,$
$\{f_v\}$'nin noktasal yakınsaklığından $\quad |f(x_j) - f_v(x_j)| < \epsilon \ \ \forall v \geq M_j,$
$\{f_v\}$'nin eşsürekliliğinden $\quad |f_v(x_j) - f_v(y)| < \epsilon \ \ \forall v \geq N(x_j, \epsilon),$
ve böylece,

$$|f(y) - f_v(y)| < 3\epsilon \ \ \forall v \geq max_{1 \leq i \leq k}[N(x_i, \epsilon); M_i].$$

D üzerinde $f_v \to f$ düzgün yakınsaklığını ispatlamış olur.

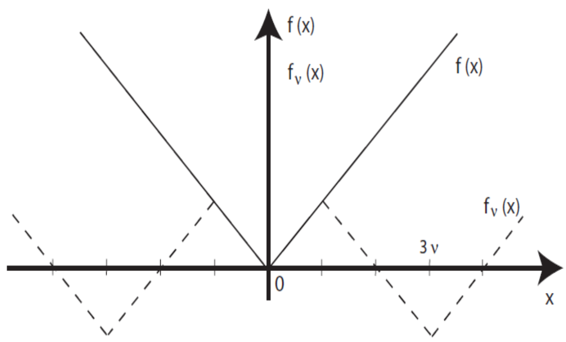
3.2 Minimizasyon Problemlerine Yaklaşım

Bu konuyu bir örnekle açıklamaya çalışalım. Amacımız f_v'nin f'ye yakınsadığı durumlarda $\inf f(x)$ ve $\inf f_v(x)$ değerlerini bulmaktır. $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$'e çözüm olacak $\hat{x}_v$ değerlerinin ve bu çözümler karşılığında elde ettiğimiz $\inf f_v$ değerlerinin nasıl davranacağını inceleyeceğiz. Yakınsaklığın sağlandığı durumlarda bile $\inf f_v \to \inf f$ sağlanmak zorunda olmadığını gösteren örneği inceleyelim.

Örnek 3.2.1 $x \in \mathbb{R}$ olarak seçelim.

$$f(x) = |x| \ ,$$

$$f_v(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \leq v, \\ 2v - |x|, & v < x \leq 3v, \\ |x| - 4v, & |x| > 3v. \end{cases}$$



Şekil 3.2: f ve $\{f_v\}$'nin grafiği

Açık olarak $x = 0$ olduğunda $\inf f(x) = 0$ ve $x_v = \pm 3v$ olduğunda $\inf f_v(x) = -v$ olur. Buradan anlaşılır ki, herbir kompakt kümede düzgün olarak $f_v \to f$ olmasına rağmen, $\inf f_v$ değeri $\inf f$'ye yakınsamaz.

Teorem 3.2.2 (D)'yi varsayalım. Bu durumda,

(a) $\limsup_v \inf f_v \leq \ \inf f$

(b) Eğer $\bar{x}_v$, $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$ için bir çözüm ise $(v = 1, 2, ...)$, ve $\bar{x}$ değeri $\bar{x}_v$'ler için bir yığılma noktası olursa, o zaman $\bar{x}$ değeri $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$ için bir çözüm olur. $\bar{x}$'e yakınsayan $\{\bar{x}_v\}$ dizileri için $\{\bar{x}_{v_k}\}$ bir alt dizi ise, $\lim_{k\to\infty}(\inf f_{v_k}) = \inf f$ olur.

İspat İspatı yapmak için, denk olduklarını bildiğimizden dolayı (D) yerine (S)'yi kullanacağız. $\phi = \inf f$ ve $\phi_v = \inf f_v$ olsun.
(a) $x \in \mathbb{R}^n$ ve $x_v \to x$. (S)'yi varsaydığımızdan,

$$f(x) = \lim f_v(x_v) = \limsup f_v(x_v) \geq \limsup \phi_v \ ,$$

$$f(x) \geq \limsup \phi_v. \tag{3.3}$$

İnfimumu alarak $\phi \geq \limsup_v \phi_v$ elde ederiz.
(3.3)'ü kullanarak her x için,

$$\exists z_v : z_v \to x \quad \text{ve} \quad \limsup f_v(z_v) \leq f(x),$$

elde edilir.
(b) (S)'yi kullanarak,

$$f(\bar{x}) \leq \liminf_k f_{v_k}(\bar{x}_{v_k}) = \liminf_k \phi_{v_k}.$$

Şimdi de (a)'daki ispatı ve bilinen $\liminf_k \phi_{v_k} \leq \limsup_k \phi_{v_k} \leq \limsup_k \phi_v$ eşitsizliklerini kullanarak,

$$f(\bar{x}) = \phi = \liminf_k \phi_{v_k} = \limsup \phi_v \ ,$$

$$\forall \{x_v \to x\} : \ f(x) \leq \liminf f_v(x_v).$$

Burada (D)'yi kullanmak yerine yeni tanımlayacağımız bir yakınsaklık çeşidinden faydalanarak, (a) ve (b)'yi elde edebiliriz,
(EP) *Epi-Yakınsaklık:* Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\text{öyle bir dizi vardır ki} \ \ y_v \to x, \ \ \limsup f_v(y_v) \leq f(x) \ ,$$

$$\text{bütün diziler için} \ \ \{x_v \to x\}, \ \ f(x) \leq \liminf f_v(x_v) \ ,$$

sağlandığında f_v fonksiyonları, f'ye epi-yakınsak olur. Ve böylece bir önceki teoremde belirtilen (a) ve (b) ifadelerine ulaşılabilir.

Sonuç 3.2.3 (EP)'yi varsayalım bu durumda,
(a) $\limsup_v \inf f_v \leq \inf f$.
(b) Eğer $\bar{x}_v$, $\inf_{\mathbb{R}^n} f_v(x)$ için bir çözüm ise $(v = 1, 2, ...)$, ve $\bar{x}$ değeri $\bar{x}_v$'ler için bir yığılma noktası olursa, o zaman $\bar{x}$ değeri $\inf_{\mathbb{R}^n} f(x)$ için bir çözüm olur. $\bar{x}$'e yakınsayan $\{\bar{x}_v\}$ dizileri için $\{\bar{x}_{v_k}\}$ bir alt dizi ise, $\lim_{k\to\infty}(\inf f_{v_k}) = \inf f$ olur.

3.3 Yakınsaklığın Değişen Kavramları

Bir önceki kısımda bahsedilen sürekli yakınsaklığın, noktasal yakınsaklığı gerektirdiği gösterilmişti. Benzer bir gerektirme, epi-yakınsaklık ve noktasal yakınsaklık arasında bulunmaz. Bu durumu bir örnekle inceleyelim.

Örnek 3.3.1 Bir $\{f_v\}$ fonksiyon dizisi alalım ($v = 1, 2, 3, ...$).

$$f_{2v}(x) = \begin{cases} 1/v, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 1 - 1/v, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$f_{2v+1}(x) = \begin{cases} 1 - 1/v, & x \text{ rasyonel ise,} \\ 1/v, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$\{f_{2v}\}$ ve $\{f_{2v+1}\}$ alt dizileri sırasıyla aşağıdaki fonksiyonlara yakınsarlar,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ rasyonel ise,} \\ 1 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ rasyonel ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Görüldüğü üzere $\forall x \in \mathbb{R}$ için $g(x) \neq h(x)$ olduğundan $\{f_v\}$ fonksiyon dizisi noktasal olarak herhangi bir fonksiyona yakınsamaz. Fakat diğer taraftan bu dizinin $f(x) = 0$ fonksiyonuna epi-yakınsak olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Bunu göstermek için, rastgele seçtiğimiz bir x'e yakınsayan ve özel olarak seçilen bir $\{y_v\}$ dizisini düşünelim.

y_{2v} rasyonel alıp $|y_{2v} - x| < 1/v$,

y_{2v+1} irrasyonel alıp $|y_{2v+1} - x| < 1/v$ dersek,

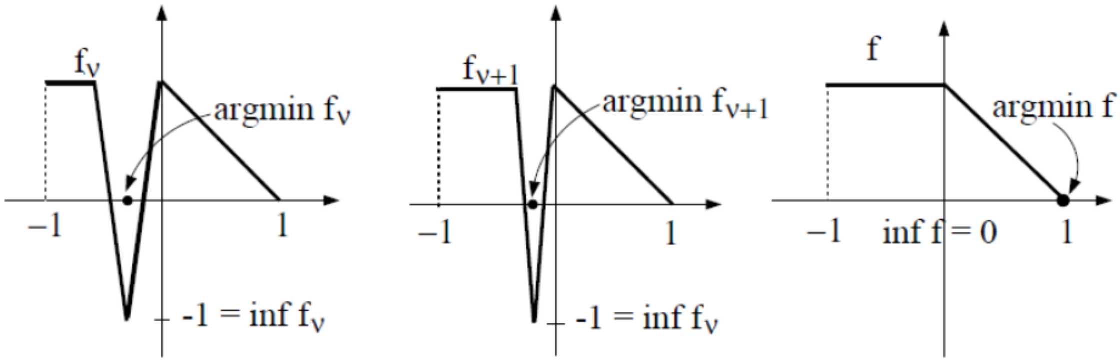
açık olarak $y_v \to x$ ve $f_v(y_v) \to 0$ ve böylece $\limsup f_v(y_v) \leq f(x) = 0$ sağlandığını görürüz ki bu da epi-yakınsaklığın ilk şartıdır. Diğer şarta gelince zaten $0 = f(x) \leq \liminf f_v(x_v)$ olması x'e yakınsayan bütün $\{x_v\}$ dizileri için açık olarak geçerlidir.

Burada epi-yakınsak olup noktasal yakınsak olmayan bir dizi örneği verildi. Benzer şekilde noktasal yakınsak olup, epi yakınsak olmayan örnekler de mevcuttur. Şimdi de bunlardan bir tanesine bakalım.

Örnek 3.3.2 dom$f_v = [-1, 1]$ ve $v \in \mathbb{N}$ olsun. Bu kapalı aralıkta $\{f_v\}$ fonksiyon dizisini,

$$f_v(x) = \min\{1 - x,\ 1,\ 2v|x + 1/v| - 1\}$$

olarak alırsak, $\{f_v\}$ fonksiyon dizileri alttan yarı sürekli olacaktır ve $x \in [-1, 1]$ için $f(x) = \min\{x,\ 1 - x\}$ fonksiyonuna noktasal olarak yakınsayacaktır.



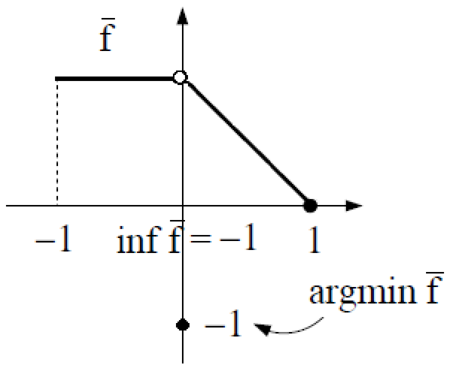
Şekil 3.3: $\{f_v\}$ fonksiyon dizileri ve yakınsadıkları f fonksiyonunun grafikleri

Grafiklerde de görüldüğü üzere, $\{f_v\}$ fonksiyon dizileri f fonksiyonuna noktasal olarak yakınsamasına rağmen bu diziler f fonksiyonuna epi-yakınsak değildir. Burada fonksiyonlar alttan yarı süreklidir fakat $\{f_v\}$ fonksiyonlarının minimum değeri ile f fonksiyonunun minimum değeri örtüşmez. $\{f_v\}$ fonksiyonları minimum değerini $x_v = -1/v$'de -1 olarak alırken, f fonksiyonu minimum değerini $x = 1$ noktasında 0 olarak alır. Bu da epi-yakınsaklık şartlarından birini sağlamaz.

Şimdi bu $\{f_v\}$ fonksiyonlarının epi-yakınsak olduğu fonksiyonu yazalım. Yine dom$\bar{f} = [-1, 1]$ aldığımızda, $[-1, 0)$ aralığında $\bar{f}(x) = 1$, $(0, 1]$ aralığında $\bar{f}(x) = 1 - x$ ve $\bar{f}(0) = -1$ olursa, $\{f_v\}$ fonksiyonları bu yeni $\bar{f}$ fonksiyonuna epi-yakınsak olur.

Lemma 3.3.3 Eğer $\{f_v\}$ fonksiyon dizisi f'ye epi-yakınsak ise, f fonksiyonu alttan yarı süreklidir.

İspat Bazı x değerleri için f alttan yarı sürekli olmasın. Bu durumda öyle bir $\epsilon > 0$ vardır ki, $U(x, 1/n) = \{z|\ \ \|z - x\| < 1/n\}$ komşuluğunda $\exists z_n \in U(x, 1/n)$



Şekil 3.4: $\{f_v\}$ fonksiyonlarının epi-yakınsak olduğu $\bar{f}$ fonksiyonu

$f(z_n) < f(x) - \epsilon$ sağlanır. f_v fonksiyon dizileri f'ye epi yakınsak olduğundan, monoton artan $\{v_n\}$ için,

$$\forall z_n \;\; \exists \xi_{v_n} : \|\xi_{v_n} - z_n\| < \frac{1}{n} \quad \text{ve} \quad f_{v_n}(\xi_{v_n}) < f(z_n) + \frac{1}{n}.$$

Böylece x'e yakınsayan $\{\xi_{v_n}\}$ serisi elde ederiz ve,

$$f_{v_n}(\xi_{v_n}) < f(z_n) + \frac{1}{n} < f(x) - \epsilon + \frac{1}{n}.$$

Böylece, $\liminf_n f_{v_n}(\xi_{v_n}) \leq f(x) - \epsilon$ elde ederiz ki bu da başta varsaydığımız epi-yakınsaklığa çelişki oluşturur ($f(x) \leq \liminf_n f_n(\xi_n) \quad \forall\{\xi_n \to x\}$). Dolayısıyla f alttan yarı süreklidir.

Yakınsaklık ilişkisi kurulurken genellikle ilk olarak $f_v \to f$ noktasal yakınsaklığın sağlanıp sağlanmadığına bakarız. Asıl problem, başka hangi şartlar altında noktasal yakınsaklığın epi-yakınsaklığı gerektirdiğidir. Epi-yakınsaklık bahsi geçen (S) sürekli yakınsaklığın esnek halidir ki sürekli yakınsaklığın (D) ve $(EŞ)$ yakınsaklıklarına eşit olduğunu biliyoruz. Şimdi hangi şartlar altında noktasal yakınsaklığın epi-yakınsaklığı gerektirdiğine bakalım.

(AD) *Alttan yarı sürekli bir fonksiyona alttan düzgün yakınsama:* f alttan yarı sürekli, $f_v \to f$ noktasal yakınsak ve bir D kompakt kümesi üzerinde f_v fonksiyon dizileri f'ye alttan düzgün yakınsak olsun ($D \in \mathbb{R}^n$),

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N(\epsilon) : f(x) - f_v(x) < \epsilon \quad \forall x \in D \quad v \geq n(\epsilon).$$

$(E\c{S}A)$ *(Hemen hemen) alttan yarı sürekli eş fonksiyonların yakınsaklığı:* $f_v \to f$ noktasal yakınsak ve f_v (hemen hemen) alttan yarı sürekli fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ için $U(x,\epsilon)$ komşuluğu ve $N(x,\epsilon)$ sayısı vardır ki,

$$f_v(y) > f_v(x) - \epsilon \quad \forall y \in U(x,\epsilon), \quad v \geq N(x,\epsilon).$$

Burada da yine (AD) ve $(E\c{S}A)$ kısaltmalarını bahsi geçen yakınsaklık çeşitleri için kullanacağız.

Teorem 3.3.4

(a) $(AD) \Rightarrow (EP)$

(b) $f_v \to f$ noktasal yakınsak ise, (EP) ve $(E\c{S}A)$ birbirine denktir.

İspat (a) $\{x_v\} \subset \mathbb{R}^n$, x'e yakınsayan rastgele seçilmiş bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_v\}$ bir $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt kümesi içinde yer alır. (AD)'yi varsaydığımızdan $\epsilon > 0$ ve bir $N(\epsilon)$ sayısı için,

$$f(y) - f_v(y) < \epsilon, \quad \forall y \in D, \quad v \geq N(\epsilon) \ ,$$

ve böylece,

$$f(x_v) < f_v(x_v) + \epsilon, \quad \forall v \geq N(\epsilon).$$

f alttan yarı sürekli ve $x_v \to x$ olduğundan,

$$\liminf_v f(x_v) \geq f(x) \ ,$$

ve böylece,

$$f(x) \leq \liminf_v f_v(x_v) + \epsilon \ .$$

Herhangi bir $\epsilon > 0$ için,

$$f(x) \leq \liminf_v f_v(x_v). \tag{3.4}$$

Diğer taraftan, (AD)'den gelen noktasal yakınsaklıktan dolayı bir $y_v \to x$ dizisinin varlığını biliyoruz ki, hatta $y_v = x$ seçersek,

$$\limsup_v f_v(y_v) \leq f(x). \tag{3.5}$$

Buradan da (3.3) ve (3.4) birlikte (EP) yakınsaklığını gösterir.

(b) Farzedelim ki $(EŞA)$ sağlanmasın, yani f_v fonksiyonları (hemen hemen) alttan yarı sürekli eş fonksiyonlar olmasın. Bu durumda, en az bir $x \in \mathbb{R}^n$ için, $\exists\epsilon > 0$: $\forall\ U(x, 1/n)\ \ \exists y_n \in U(x, 1/n)$ ve artan v_n dizisi için, $f_{v_n}(y_n) \leq f_{v_n}(x) - \epsilon$ aşağıdaki sonuca yol açar,

$$\liminf_n f_{v_n}(y_n) \leq \liminf_n f_{v_n}(x) - \epsilon = f(x) - \epsilon.$$

Bu da $f(x) \leq \liminf_v f_v(x_v)\ \ \forall\{x_v \to x\}$ ifadesi ile çelişir.

Böylece noktasal yakınsaklıkla birlikte epi-yakınsaklığı $(EŞA)$'yı gerektirir. Diğer taraftan, $(EŞA)$'yı varsayalım, bu durumda noktasal yakınsaklık sağlanır ve $y_v = x$ seçtiğimizde $\limsup_v f_v(y_v) \leq f(x)$ eşitsizliği de sağlanır.

Eğer $x_v \to x$ ve $\epsilon > 0$ olursa, $(EŞA)$'dan dolayı, bazı v'ler için $x_v \in U(x, \epsilon)$ ve böylece,

$$x_v \in U(x, \epsilon) \ \text{ ve } \ v \geq N(x, \epsilon) \text{ iken } \ f_v(x_v) > f_v(x) - \epsilon$$

$$f(x) = \liminf_v f_v(x) \leq \liminf_v f_v(x_v) + \epsilon$$

$\forall\epsilon > 0$ için sağlanır ve $(EŞA)$ bu koşullarda (EP)'yi gerektirir.

(EP_+) notasyonunu noktasal yakınsaklığı da içeren epi-yakınsaklığı için kullanacağız. Şimdi bir örnekte (EP_+), $(EŞA)$ ve (AD) arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Örnek 3.3.5

$$f_v(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 1, \\ 1 - x^v, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Açık olarak f_v'nin aşağıdaki alttan yarı sürekli f fonksiyonuna yakınsayacağı görülür.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Türevini alırsak,

$$f_v'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ve } x > 1, \\ -vx^{v-1}, & 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

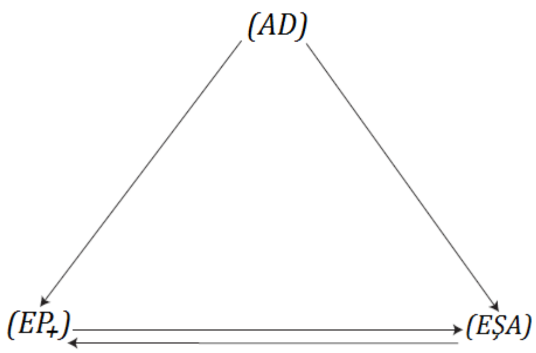
Buradan açıkça görülüyor ki, $(0,1)$ aralığında $f_v'(x) < 0$, yani $f_v(x)$ monoton azalıyor. Böylece herhangi bir $x \in (0,1)$ için $z_x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} < 1$ ve $x < y < z_x$ için,

$$f_v(y) \geq f_v(x) + (y-x)f_v'(z_x) = f_v(x) + (y-x)[-vz_x^{v-1}].$$

$v \to \infty$ olduğunda $vz_x^{v-1} \to 0$ olur ki bunu $vz_x^{v-1} < \epsilon$, $\forall v \geq N(x,\epsilon)$ olarak da yazabiliriz. Bunları kullanarak, $0 < y - x < 1$ için $f_v(y) > f_v(x) - \epsilon$,$\forall v \geq N(x,\epsilon)$ ya da $0 \leq y \leq x$ için $f_v(y) \geq f_v(x)$ olur.
Bu sebeple, f_v fonksiyonları alttan yarı sürekli eş fonksiyonlar olur ve $(EŞA)$'yı elde etmiş oluruz. Fakat bu (AD)'yi gerektirmez. Bunu görmek için, $x \in (0,1)$ düşünelim. (AD) için bir D kompakt kümesine sahip olmalıyız ki bunu $D = [0,1]$ aralığı seçelim. $f(x) - f_v(x) < \epsilon \; \forall x \in D,\; v \geq N(\epsilon)$ başka bir ifadeyle $x^v < \epsilon \; \forall x \in (0,1) \subset D,\; n \geq N(\epsilon)$. Logaritmasını alırsak,

$$v \log x < \log \epsilon \to v > \log \epsilon / \log x.$$

$\epsilon > 0$ ve x 1'e yaklaşırken, $v \to \infty$ olur, başka bir ifadeyle D için genel bir $N(\epsilon)$ yoktur ve (AD) yakınsaklığını sağlamaz. Bu örneğe bakılarak, (EP_+) veya $(EŞA)$'yı sağlamanın dışında başka özelliklere de ihtiyaç vardır ki (AD) sağlanabilsin.



Şekil 3.5: Yakınsaklık çeşitleri arasındaki ilişki

Sonuç 3.3.6 Eğer limit fonksiyonu f sürekli ise, $(EŞA) \Rightarrow (AD)$

İspat Herhangi bir kompakt D kümesi alalım. $y \in D$ seçelim, $(EŞ) \Rightarrow (D)$ ispatına benzer şekilde, bazı j'ler için $y \in U(x_j, \epsilon)$ olsun.

$$f(y) - f_v(y) = f(y) - f(x_j) + f(x_j) - f_v(x_j) + f_v(x_j) - f_v(y).$$

$D \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \epsilon)$ için ve $U(x_i, \epsilon) = V(x_i, \epsilon) \cap W(x_i, \epsilon)$ öyle ki $|f(y) - f(x_i)| < \epsilon \ \ \forall y \in V(x_i, \epsilon)$, f'nin sürekliliğinden ve $f_v(y) - f_v(x_i) > -\epsilon \ \ \forall y \in W(x_i, \epsilon), \ v \geq N(x_i, \epsilon)$. ($(EŞA)$'dan dolayı) Böylece,

$y \in U(x_j, \epsilon) \subset V(x_j, \epsilon)$ olduğundan $f(y) - f(x_j) < \epsilon$,

$\{f_v\}$'nin noktasal yakınsaklığından $\forall v \geq M_j$ için $f(x_j) - f_v(x_j) < \epsilon$,

$f_v(x_j) - f_v(y) < \epsilon \ \ y \in U(x_j, \epsilon) \subset W(x_j, \epsilon), \ \forall v \geq N(x_j, \epsilon)$,

$$f(y) - f_v(y) < 3\epsilon, \quad \forall v \geq \max_{1 \leq i \leq k} [N(x_i, \epsilon); M_i].$$

Sonuç 3.3.7 Eğer monoton artan alttan yarı sürekli fonksiyon dizisi $\{f_v\}$ noktasal olarak f sürekli fonksiyonuna yakınsarsa, bu durum (D)'yi gerektirir.

Sonuç 3.3.8 Monoton artan fonksiyon dizisi $\{f_v\}$ noktasal olarak f'ye yakınsasın. Eğer $\{f_v\}$ $(v = 1, 2, ...)$ ya da f'ten herhangi biri alttan yarı sürekli ise, bu durum (EP)'yi gerektirir.

İspat $\{f_v\}$ fonksiyon dizisi monoton artan olduğu için, $\text{epi} f_{v+1} \subset \text{epi} f_v, \ \ (v = 1, 2, ...)$ yazabiliriz. Buradan da $\lim_v \text{epi} f_v = \text{cl}\{\bigcap_{v=1}^{\infty} \text{epi} f_v\}$. Monotonluk ve yakınsaklıktan dolayı $\text{epi} f = \bigcap_{v=1}^{\infty} \text{epi} f_v$ olur. Son olarak varsaydığımız alttan yarı süreklilik $\text{epi} f$ ya da $\text{epi} f_v$'nin (ve dolayısıyla $\bigcap_{v=1}^{\infty} \text{epi} f_v$'nin) kapalı olmasını gerektirir ve bu yüzden $\text{epi} f = \lim_v \text{epi} f_v$ yani epi-yakınsaktır.

4 EPİ-YAKINSAKLIK

Bu bölümde amacımız epi-yakınsaklığı noktasal yakınsaklığa alternatif olarak kullanmak olacaktır. Noktasal yakınsaklığa ek olarak alttan yarı sürekliliğin sağlanmasının epi-yakınsaklıkla ne derece ilişkili olduğunu gördük. Şimdi bu tanımları vererek bunları geometrik olarak yorumlayıp limitleri özel kavramlarla açıklayıp f_v'lerin f'ye epigrafik olarak yakınsamasına değineceğiz. Şimdi basit bir gözlemden başlayalım.

Tanım 4.0.9 (alt ve üst epi-limit) $\mathbb{R}^n$ üzerindeki herhangi bir $\{f_v\}_{v\in\aleph}$ fonksiyon dizisi için, $e - \liminf_v f_v$ nin alt epi-limiti, epif_v küme dizisinin dış limitine eşittir.

$$\mathrm{epi}(e - \liminf_v f_v) := \limsup_v(\mathrm{epi} f_v)$$

Benzer şekilde $e - \limsup_v f_v$ nin üst epi-limiti de,

$$\mathrm{epi}(e - \limsup_v f_v) := \liminf_v(\mathrm{epi} f_v)$$

olarak tanımlanır. Genel olarak $e - \liminf_v f_v \leq e - \limsup_v f_v$ olduğunu biliyoruz. Bu iki fonksiyon eşit olduğunda epi-limit fonksiyonu $e - \lim_v f_v$'nin varolduğu ortaya çıkar. $e - \lim_v f_v := e - \liminf_v f_v = e - \limsup_v f_v$. Bu durumda f_v fonksiyonlarının f fonksiyonuna epi-yakınsak olduğu söylenir.

$$f_v \to_e f \iff \mathrm{epi} f_v \to \mathrm{epi} f.$$

Bu tanım, küme yakınsaklığını direkt olarak epigraflara uygulamanın kapısını açar. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu üzerinde,

$$E_f : x \to \{\alpha \in \mathbb{R} | \ \ \alpha \geq f(x)\}$$

olarak tanımlanırsa, gphE_f = epi$f$ olur. Görüldüğü gibi fonksiyon dizilerinin epigrafik limitleri tanımladığımız eşleme dizilerinin grafiksel limitlerine karşılık gelir.

$$f_v \to_e f \iff E_{f_v} \to_g E_f,$$

$$\mathrm{epi}(e - \liminf_v f_v) = \mathrm{gph}(g - \limsup_v E_{f_v}),$$
$$\mathrm{epi}(e - \limsup_v f_v) = \mathrm{gph}(g - \liminf_v E_{f_v}).$$

bu tanımdan sık sık yararlanacağız. Bu geometrik tanımı, hesaplamaları hızlandırmak adına, fonksiyon limitleri ile ilgili diğer ifadelerle tamamlamalıyız.

Önerme 4.0.10 $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde herhangi bir fonksiyon dizisi ve x, $\mathbb{R}^n$'de herhangi bir nokta olmak üzere,

$$(e-\liminf_v f_v)(x)=\min\{\alpha\in\overline{\mathbb{R}}|\ \exists x_v\to x\quad \liminf_v f_v(x_v)=\alpha\},$$

$$(e-\limsup_v f_v)(x)=\min\{\alpha\in\overline{\mathbb{R}}|\ \exists x_v\to x\quad \limsup_v f_v(x_v)=\alpha\}.$$

Böylece, $f_v\to_e f$ olması için gerek ve yeter şart herbir x noktasında,

$$\begin{cases}\liminf_v f_v(x_v)\geq f(x), & \forall x_v\in\mathbb{R}^n\ \ x_v\to x\ ,\\ \limsup_v f_v(x_v)\leq f(x), & \exists x_v\in\mathbb{R}^n\ \ x_v\to x\ ,\end{cases}\tag{4.1}$$

sağlanmasıdır.

İspat $\alpha\in\mathbb{R}$ değerlerinin $\alpha\geq(e-\liminf_v f_v)(x)$ eşitsizliğini sağlaması için gerek ve yeter şart seçilen $N\in\mathcal{N}_\infty^\#$ indeks kümesine göre $x_v\to x$ ve $\alpha_v\to\alpha$ olduğunda $\alpha_v\in\mathbb{R}$ için $\alpha_v\geq f_v(x_v)$ olmasıdır. Aynı ifadeler $\mathbb{R}$ yerine $\overline{\mathbb{R}}$ için de geçerlidir.

(4.1)'de belirtilen eşitsizlik çiftleri, epi-yakınsaklığını doğrulamak için kullanılan en kullanışlı yöntemlerden biridir. Bir x noktasında ilk eşitsizliği kurabilmek için indeks kümesi $N\in\mathcal{N}_\infty^\#$ seçildiğinde $x_v\to x$ ve $f_v(x_v)\to\alpha$ olduğunda $f(x)\leq\alpha$'nın sağlanması gerekecektir. Bir kez bu sağlandığında ise ikinci eşitsizliğin sağlanması için de $x_v\to x$ iken $f_v(x_v)\to f(x)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.
Epi-yakınsaklık nasıl ki epigrafların yakınsaklığı ile örtüşüyorsa, hypo-yakınsaklık da hipografların yakınsaklığı ile örtüşür. Epi-yakınsaklık ile ilgili benzer kurallar hypo-yakınsaklık için de geçerli olduğu için bu konuda söylenebilecek çok fazla şey yoktur ancak notasyon olarak $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizilerinin üstten ve alttan limitleri için $h-\limsup_v f_v$ ve $h-\liminf_v f_v$ kullanılır. Bu ikisi aynı f fonksiyonuna eşit olduklarında ise $f=h-\lim_v f_v$ veya $f_v\to_h f$ yazılır. Epi-yakınsaklık için bilinen kriterlere paralel olarak $f_v\to_h f$ olması için gerek ve yeter şart,

$$\begin{cases}\liminf_v f_v(x_v)\geq f(x) & \exists x_v\in\mathbb{R}^n\ \ x_v\to x\ ,\\ \limsup_v f_v(x_v)\leq f(x) & \forall x_v\in\mathbb{R}^n\ \ x_v\to x\ ,\end{cases}$$

sağlanmasıdır.

Bu noktada temel fikir, f_v'lerin f'ye hypo-yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $-f_v$'lerin $-f$'ye epi-yakınsak olmasıdır. Epi-yakınsaklık alttan yarı sürekliliği gerektirirken, hypo-yakınsaklık ise üstten yarı sürekliliği gerektirir. Epi-yakınsaklık epigrafik eşlemelerin grafiksel yakınsaklığına karşılık gelirken, hypo-yakınsaklık hipografik eşlemelerin grafiksel yakınsaklığına karşılık gelir.

$$H_f : x \to \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \quad \alpha \leq f(x)\}$$

$$f_v \to_h f \iff H_{f_v} \to_g H_f,$$

Pratikte, epi-yakınsaklık durumlarına bakmak ve epigrafik değişkenleri tanımlamak adına genelleştirilmiş bir notasyon kullanmak faydalı olacaktır. Bu amaçla aşağıdakileri yazmamız mümkündür.

$$(e - \liminf_v f_v)(x) = \liminf_{v\to\infty} -\text{epi}_{x'\to x} f_v(x')$$
$$(e - \limsup_v f_v)(x) = \limsup_{v\to\infty} -\text{epi}_{x'\to x} f_v(x')$$

Daha önceki epi tanımlarında fonksiyon dizilerinin epi-limiti olan yine bir fonksiyondan bahsedilmişti. Bu defa $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisindeki bir x noktasının üstten ve alttan epi-limit değerine bakıldı. Dolayısıyla $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin bir x noktasında epi-limitinin varolabilmesi için, bu x noktasında alttan ve üstten epi-limit değerlerinin örtüşmesi gerekecektir.

$$\begin{aligned}\lim_{v\to\infty} -\text{epi}_{x'\to x} f_v(x') :&= \liminf_{v\to\infty} -\text{epi}_{x'\to x} f_v(x') \\ &= \limsup_{v\to\infty} -\text{epi}_{x'\to x} f_v(x').\end{aligned}$$

Başka bir deyişle, x noktasında epi-limitin varolması için gerek ve yeter şart, $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ için,

$$\begin{cases} \liminf_v f_v(x_v) \geq \alpha & , \quad \forall x_v \in \mathbb{R}^n \quad x_v \to x \ , \\ \limsup_v f_v(x_v) \leq \alpha & , \quad \exists x_v \in \mathbb{R}^n \quad x_v \to x \ , \end{cases}$$

sağlanmasıdır. Bu yaklaşım bize yakınsaklık özelliklerini yerel olarak inceleme imkanı verir. Diğer tüm noktalarda epi-yakınsak olup olmadığını düşünmeksizin f_v fonksiyonlarının sadece bir x noktasında epi-yakınsak olup olmadığına bakabiliriz ve $e - \lim_v f_v$ limit fonksiyonunun varlığı ile ilgilenmeyiz.

Önerme 4.0.11 Aşağıdaki özellikler $\mathbb{R}^n$ üzerindeki herhangi bir $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi için sağlanır.

(a) $e-\lim_v f_v$ varolduğu sürece $e-\lim_v f_v,\ \ e-\liminf_v f_v,\ \ e-\limsup_v f_v$ fonksiyonlarının hepsi alttan yarı süreklidirler.

(b) $e-\lim_v f_v$ ve $e-\liminf_v f_v$ fonksiyonları sadece $\{\mathrm{cl}f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisine bağlıdırlar. Dolayısıyla eğer $\mathrm{cl}f_v = \mathrm{cl}g_v$ olursa, o zaman $e-\liminf_v f_v = e-\liminf_v g_v$ ve $e-\limsup_v f_v = e-\limsup_v g_v$ sağlanır.

(c) Eğer $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi artan değilse ($f_v \geq f_{v+1}$), $e-\lim_v f_v$ vardır ve $\mathrm{cl}[\inf_v f_v]$'ye eşittir.

(d) Eğer $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi azalan değilse ($f_v \leq f_{v+1}$), $e-\lim_v f_v$ vardır ve $\sup_v[\mathrm{cl}f_v]$'ye eşittir.

(e) Eğer f_v bütün v'ler için pozitif homojen ise aynı şekilde $e-\liminf_v f_v$ ve $e-\limsup_v f_v$ fonksiyonları da pozitif homojen fonksiyonlardır.

(f) C_v ve C, $\mathbb{R}^n$'nin altkümeleri olsun. $C = \liminf_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_C = e-\limsup_v \delta_{C_v}$ olmasıdır. Benzer şekilde $C = \limsup_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_C = e-\liminf_v \delta_{C_v}$ olmasıdır.

f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı olsun. Bu fonksiyonun epigrafını,

$$\mathrm{epi}f = \{(x,a) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ f(x) \leq a\},$$

olarak tanımladığımızda, f'nin tanım kümesi,

$$\mathrm{dom}f = \{x \mid \ f(x) < +\infty\},$$

olur ve f'nin hipografı $\{(x,a) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \ a \leq f(x)\}$ olarak alınabilir ya da başka bir ifadeyle $\{(x,a) \mid \ (x,-a) \in \mathrm{epi}(-f)\}$ şeklinde de belirtilebilir. Epi$f$ kapalı bir küme ise, f fonksiyonu alttan yarı süreklidir. Ya da bu ifadeye denk olarak, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ için, x'in bir V komşuluğundaki bütün y'ler,

$$f(y) \geq f(x) - \epsilon,$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f alttan yarı süreklidir. $-f$ alttan yarı sürekli ise f üstten yarı süreklidir.

$\{f_v, v \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli fonksiyon dizisi olsun. Alt e-limit, $e - \liminf f_v$ şeklinde gösterilen ve $x \in \mathbb{R}^n$ için alınan,

$$(e - \liminf f_v)(x) = \inf_{\{x_\mu \to x,\ \mu \in M\}} \liminf_{\mu \in M} f_\mu(x_\mu)\ ,$$

fonksiyonu ile tanımlanır ve gösterilir. Burada M, N'nin sayılabilir bir alt kümesidir. Benzer şekilde, üst e-limit, $e - \limsup f_v$,

$$(e - \limsup f_v)(x) = \inf_{\{x_v \to x,\ v \in N\}} \limsup_{v \in N} f_v(x_v).$$

$\liminf \leq \limsup$ olduğundan,

$$e - \liminf f_v \leq e - \limsup f_v$$

olur.

Ayrıca, $\{x_v = x,\ v \in N\} \subset \{x_v \to x,\ v \in N\}$ olduğundan,

$$(e - \liminf f_v)(x) \leq \liminf f_v \quad \text{ve} \quad (e - \limsup f_v)(x) \leq \limsup f_v\ ,$$

yazabiliriz. Burada $\liminf f_v$, $\{f_v, v \in N\}$ fonksiyon dizilerinin alt noktasal limitidir.

$$(e - \liminf f_v)(x) = \liminf_{v \in N} f_v(x)\ ,$$

ve benzer şekilde $\limsup f_v$, $\{f_v, v \in N\}$ fonksiyon dizilerinin üst noktasal limitidir.

$$(e - \limsup f_v)(x) = \limsup_{v \in N} f_v(x)\ ,$$

ve nihayet,

$$\text{epi}(e - \liminf f_v) = \limsup\ \text{epi} f_v\ ,$$

$$\text{epi}(e - \limsup f_v) = \liminf\ \text{epi} f_v\ ,$$

$$\liminf\ \text{epi} f_v = \{(x,a) = \lim_{v \in N}(x_v, a_v) \mid\ a_v \geq f_v(x_v)\}\ ,$$

$$\limsup\ \text{epi} f_v = \{(x,a) = \lim_{\mu \in M}(x_\mu, a_\mu) \mid\ a_\mu \geq f_\mu(x_\mu),\ M \subset N\}.$$

Buradaki limit kümelerinin kapalı olduğunu hatırlatmakta fayda vardır. Yani $e - \liminf f_v$ ve $e - \limsup f_v$ kümeleri kapalı epigraflara sahiptir ve başka bir deyişle alttan yarı süreklidirler. Eğer $\{f_v, v \in N\}$ fonksiyon dizileri bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ise, $f_v \to_p f$,

$$\limsup f_v \leq f \leq \liminf f_v \ ,$$

eğer f fonksiyonuna epi-yakınsak ise, $f_v \to_e f$,

$$e - \limsup f_v \leq f \leq e - \liminf f_v \ ,$$

ya da başka bir ifadeyle,

$$e - \limsup f_v = f = e - \liminf f_v \ ,$$

şeklinde yazılır. Bu durumda,

$$\limsup \ \mathrm{epi} f_v = \mathrm{epi} f = \liminf \ \mathrm{epi} f_v$$

f'nin epigrafı, epigrafların limitine eşit olur. Bu yakınsaklık tipi epi-yakınsaklıktır.

Yoğunlaştığımız nokta, epi-yakınsaklık ile anlatılmak istenen minimuma yakınsamadır. Bu noktaya biraz daha açıklık getireceğiz.

$$A_v = \mathrm{argmin} f_v = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f_v(x) = \inf f_v\} \ ,$$

ve $A = \mathrm{argmin} f$ olarak tanımlandığında, eğer $f_v \to_e f$ ise,

$$\limsup \ A_v \subset A \ ,$$

olmuş olur. Bu eşitlik $\limsup \ A_v$ kümesi boş küme olduğunda zaten sağlanmış olur. Diğer durumlarda her zaman sağlandığını göstermek için, $M \subset N$ alalım,

$$x_\mu \in A_\mu \text{ ve } x_\mu \to x \ ,$$

olsun. Burada $x \in A$ olduğunu göstermemiz gerekecektir. Aksine olacak şekilde, $f(\bar{x}) \leq f(x)$ sağlayan bir $\bar{x}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda epi-yakınsaklık gereği,

$$(\limsup f_v)(\bar{x}) = f(\bar{x}) < f(x) = (e - \liminf f_v)(x) \leq \liminf f_\mu(x_\mu).$$

Böylece $\{\bar{x}_v, v \in N, \bar{x} \to x\}$ dizileri ve yeterince büyük μ için,

$$f_\mu(\bar{x}_\mu) < f_\mu(x_\mu) \ ,$$

olur ki bu da $x_\mu \in A_\mu$ ile çelişir.

$\epsilon > 0$ için, argmin$f$'nin görüntüsü olan m değerlerinin ϵ komşuluğunda olan f'lere giden x'leri, $\epsilon - A$ olarak tanımlayalım.

$$\epsilon - A = \{x \mid \ f(x) - \epsilon \leq m\}.$$

Benzer şekilde,

$$m_v = \inf f_v \ ,$$

$$\epsilon - A_v = \{x \mid \ f_v(x) - \epsilon \leq m_v\}.$$

Eğer $f_v \to_e f$ ve $m_v \to m$ olursa bu durumda,

$$\liminf(\epsilon - A_v) \subset \limsup(\epsilon - A_v) \subset \epsilon - A \ ,$$

ve ne zaman m sonlu olursa,

$$A = \bigcap_{\epsilon > 0} \liminf(\epsilon - A_v).$$

Açık bir şekilde $\liminf(\epsilon - A_v) \subset \limsup(\epsilon - A_v) \subset \epsilon - A$ sağlandığını göstermek için, sadece $\limsup(\epsilon - A_v) \subset \epsilon - A$ kısmını göstermek yeterli olacaktır. Farzedelim ki $x \in \limsup(\epsilon - A_v)$ olsun. lim sup tanımından dolayı, öyle bir $M \subset N$ vardır ki, $\{x_\mu \to x, \mu \in M\}$ olduğunda,

$$f_\mu(x_\mu) \leq m_\mu + \epsilon.$$

Buradan ve hipotezden,

$$f(x) \leq (e - \liminf f_\mu)(x) \leq \liminf_{\mu \in M} f_\mu(x_\mu) \leq \lim m_\mu + \epsilon = m + \epsilon$$

ve sonuç olarak $x \in \epsilon - A$

$\liminf(\epsilon - A_v) \subset \limsup(\epsilon - A_v) \subset \epsilon - A$ bildiğimizden ve $A = \bigcap_{\epsilon>0} \epsilon - A$ sağlandığından, $A = \bigcap_{\epsilon>0} \liminf(\epsilon - A_v)$ göstermek için $A \subset \bigcap_{\epsilon>0} \liminf(\epsilon - A_v)$

ifadesinin doğruluğunu göstermek yeterli olacaktır. Eğer $A = \emptyset$ ise zaten ifade her durumda sağlanır. $x \in A \neq \emptyset$ olduğunda $f_v \to_e f$ olduğundan, öyle bir $\{(x_v, a_v) \in \text{epi} f_v,\ v \in N\}$ vardır ki, $(x_v, a_v) \to (x, m)$. Bu ifade $\epsilon > 0$ ve v yeterince büyük olduğunda sağlanır ($x_v \in \epsilon - A_v$ veya başka bir ifadeyle $a_v \leq m_v + \epsilon$). Tersine olarak, $\epsilon > 0$ için, öyle bir $M_\epsilon \subset N$ vardır ki, bütün $\mu \in M_\epsilon$ için,

$$m_\mu + \epsilon < f_\mu(x_\mu) \leq a_\mu \ ,$$

buradan da,

$$\lim m_\mu + \epsilon = m + \epsilon \leq m = \lim a_\mu \ ,$$

olur ki bu da hipotezimizle çelişir.

Burada şunu belirtmekte fayda var, epi-yakınsaklık daima $\limsup\ A_v \subset A$ ifadesini gerektirse de, genel itibariyle $m_v \to m$ olmasını (bütün değerler sonlu, $\{f_v, v \in N\}$ ve f konveks ve sürekli fonksiyonlar olsa bile) her zaman gerektirmeyebilir. Sıradaki örnek, bu durumu detaylı bir şekilde gösterecektir.

Örnek 4.0.12

$$f_v(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -v \ , \\ v^{-1}x, & -v \leq x \leq 0 \ , \\ x, & x \geq 0 \ , \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \ , \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Bu durumda $m_v \equiv -1 \not\to m = 0$ ve $\limsup\ A_v = \emptyset \subset A =]-\infty, -v]$ olur.

(Bu örneğin bir değişiği olarak f_v değerlerini $x \leq 0$ olduğu yerlerde v^{-1} olarak aldığımızda, aynı f fonksiyonuna epi-yakınsak olacaktır ama bu kez $m_v \equiv -\infty \not\to m = 0$ olur.)

A boş kümeden farklı ve m sonlu değerli olduğunda, epi-yakınsaklık daima,

$$m \geq \limsup m_v \ ,$$

durumunu gerektirir. Bunu görebilmek için, $(x, m) \in \text{epi} f$ ise, öyle bir $\{(x_v, a_v) \in \text{epi} f_v, v \in N\}$ vardır ki, $(x_v, a_v) \to (x, m)$ olur. Bütün $v \in N$ için, $a_v \geq m_v$ olacağından, iki tarafın da lim sup değerini aldığımızda $m \geq \limsup m_v$ eşitsizliğini elde ederiz.

$A = \liminf \ A_V$ eşitliğine ek olarak, $A = \bigcap_{\epsilon>0} \liminf(\epsilon - A_v)$ eşitliği de sağlandığı takdirde, $m = \lim m_v$ olur. $A = \bigcap_{\epsilon>0} \liminf(\epsilon - A_v)$ eşitliğinden ve lim inf tanımından dolayı, $\forall x \in A$ ve $\epsilon > 0$ için x'e yakınsayan bir dizi $\{x_v \in \epsilon - A_v, \ v \in N\}$ daima vardır. Böylece,

$$m = f(x) = (e - \liminf f)(x) \leq \liminf_{v \in N} f_v(x_v) \leq \epsilon + \liminf_{v \in N} m_v \ ,$$

ifadesi ile birlikte $m \geq \limsup m_v$ eşitsizliği $m = \lim m_v$ eşitliğini gerektirir.

Buraya kadar anlatılanların bir özeti olarak şunu söyleyebiliriz ki, m sonlu olduğunda, $f_v \to_e f$ iken $m_v \to m$ olabilmesi ancak ve ancak $A = \bigcap_{\epsilon>0} \liminf(\epsilon - A_v)$ eşitliğinin sağlanmasına bağlıdır.

4.1 Epigraflar ve Yarı Süreklilik

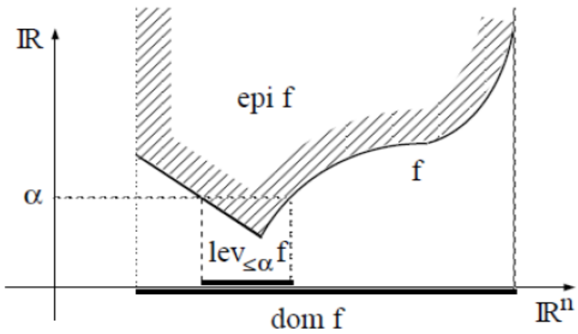
Geometrik kavramlar zamanla fonksiyonların ve eşleştirmelerin grafiklerine uygulanmaya başlamıştır. Varyasyonel analizde grafikler, vektör değerli fonksiyonlara da aynı amaç çerçevesinde uygulanır, fakat genelleştirilmiş reel değerli fonksiyonlarda durum biraz daha farklıdır. Bu tarz bir fonksiyonun $\mathbb{R}^n$'deki grafiği, $\mathbb{R}^{n+1}$'den ziyade, $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$'nin bir altkümesi olacaktır ki bu durum $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$'nin bir vektör uzayı olmayışından dolayı elverişli değildir. Genelleştirilmiş değerler konu dışı olsa bile, grafiklerin geometrisi, amaçlarımız için kritik olan özellikleri taşımayabilir. Dolayısıyla 'grafikler' kavramı 'epigraflar' ile yer değiştirilmelidir.

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, f'nin epigrafını tanımlamıştık. Epigraf, $\mathbb{R}^{n+1}$'deki f fonksiyonun üzerindeki ve yukarısındaki bütün noktaları içerir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, epi$f$'nin sadece $\mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}}$'nin değil, $\mathbb{R}^{n+1}$'in de alt kümesi olmasıdır. epi$f$'nin görüntüsü, $(x, \alpha) \to x$ altında dom$f$'tir. $f(x) = \infty$ olmasını sağlayan x'ler, epi$f$'yi ıskalayan $(x, \mathbb{R}) := \{x\} \times \mathbb{R}$ dikey doğrusudur. $f(x) = -\infty$ olmasını sağlayan x'ler ise epi$f$ tarafından içerilen doğru üzerindeki x'lerdir.

f fonksiyonu için geçerli olan her özelliğin epi$f$'de de bir karşılığı bulunur. Çünkü epi$f$ ile f fonksiyonu arasında birebir örtüşme vardır. Birçok özelliğin içinde doğal olarak f'nin seviye kümeleri de yeralır. Genel olarak aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

$$\begin{aligned}
\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) \leq \alpha\},\\
\mathrm{lev}_{<\alpha} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) < \alpha\},\\
\mathrm{lev}_{=\alpha} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) = \alpha\},\\
\mathrm{lev}_{>\alpha} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) > \alpha\},\\
\mathrm{lev}_{\geq\alpha} f &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f(x) \geq \alpha\}.
\end{aligned}$$

Bunlardan minimizasyon bağlamında kullanılmak üzere en önemlisi $\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f$'dir. α sonlu iken, değerler epi$f$'nin yatay kesmelerine eşittir. $\alpha = \inf f$ iken, $\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f = \mathrm{lev}_{=\alpha} f = \mathrm{argmin} f$. Şimdi bu konudaki çok önemli problemlerden birine gelelim. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunu ele aldığımızda, f'nin hangi özelliği $\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f$ kümelerinin kapalı olmasını sağlar? Bunun cevabı tek taraflı bir limit konseptinde yatıyor. Buna alttan yarı süreklilik diyoruz ve aşağıdaki gibi tanımlıyoruz.



Şekil 4.1: Fonksiyonun epigrafı ve tanım kümesi

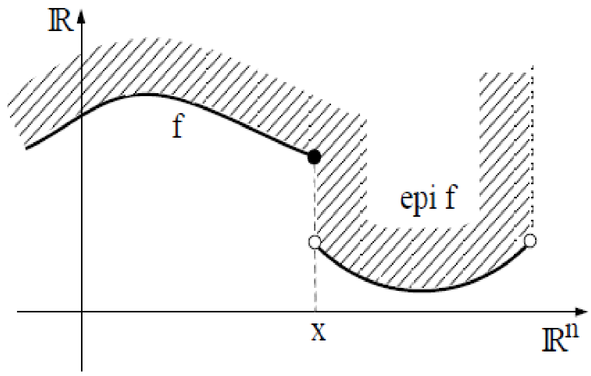
Tanım 4.1.1 (Alt limitler ve alttan yarı süreklilik) $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun bir $\overline{x}$ noktasında alttan limiti,

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to\overline{x}} f(x) : &= \lim_{\delta\to 0}[\inf_{x\in B(\bar{x},\delta)} f(x)]\\
&= \sup_{\delta>0}[\inf_{x\in B(\bar{x},\delta)} f(x)]\\
&= \sup_{V\in N(x)}[\inf_{x\in V} f(x)].
\end{aligned}$$

Eğer $\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$ veya denk olarak $\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ olursa, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında alttan yarı süreklidir. Eğer bu bütün $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$'ler için sağlanırsa, f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde süreklidir denir. $\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) \geq f(\bar{x})$ ve $\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$ ifadeleri birbirleri ile örtüşürler çünkü bütün $\delta > 0$'lar için $\inf\{f(x)|\ \ x \in B(\bar{x},\delta)\} \leq f(\bar{x})$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple aşağıdaki eşitlik daima sağlanır.

$$\liminf_{x\to\bar{x}} f(x) \leq f(\bar{x}).$$

Teorem 4.1.2 Aşağıdaki özellikler $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için birbirine denktir.
(a) f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde alttan yarı süreklidir.
(b) epi$f$ kümesi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$'de kapalıdır.
(c) $\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f$ tipindeki seviye kümeleri $\mathbb{R}^n$'de kapalıdır.



Şekil 4.2: Alttan yarı sürekliliğin sağlanmadığı durum

İspat

(a)⇒(b) Sonlu bir α için, $(x_v, \alpha_v) \in$ epi$f$ alalım ve $(x_v, \alpha_v) \to (\bar{x}, \alpha)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $x_v \to \bar{x}$ ve $\alpha_v \to \alpha$ olduğunu ve $\alpha_v \geq f(x_v)$ sağladığını biliyoruz. Göstermemiz gereken şey $\alpha \geq f(\bar{x})$ ve böylece $(\bar{x}, \alpha) \in$ epi$f$ olacaktır. $\{f(x_v)\}$ dizisi en az bir $\beta \in \overline{\mathbb{R}}$ yığılma noktasına sahiptir. Yani $f(x_v) \to \beta$ olur. Bu durumda, $\alpha \geq \beta$ ve ayrıca $\beta \geq \liminf_{x\to\bar{x}} f(x)$ sağlanır. Alttan yarı süreklilik gereği $\alpha \geq f(\bar{x})$ olduğu açıktır.

(b)⇒(c) epi$f$ kapalı olduğunda, herbir α için $[\text{epi}f] \cap (\mathbb{R}^n, \alpha)$ kesişimi de kapalıdır. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ içindeki bu kesişim geometrik olarak $\mathbb{R}^n$'deki $\mathrm{lev}_{\leq\alpha} f$ kümesine karşılık gelir ki bu küme de kapalıdır. $\text{lev}_{\leq -\infty} f = \text{lev}_{=-\infty} f$ kümesi de, α değerleri $\mathbb{R}$ üzerinde değer aldıkça bu kapalı kümelerin kesişimidir ve yine kapalıdır.

(c)⇒(a) Herhangi bir $\bar{x}$ noktasını sabitleyip $\bar{\alpha} = \liminf_{x \to \bar{x}} f(x)$ olduğunu kabul edelim. f'nin $\bar{x}$ noktasında alttan yarı sürekli olduğunu göstermek için $f(\bar{x}) \leq \bar{\alpha}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\bar{\alpha} = \infty$ olması eşitsizliği zaten sağlar, $\bar{\alpha} < \infty$ durumuna bakalım. $x_v \to \bar{x}$ ve $f(x_v) \to \bar{\alpha}$ olduğunu düşündüğümüzde, $\alpha > \bar{\alpha}$ olduğunda $f(x_v) \leq \alpha$ olacaktır. Başka bir deyişle x_v değerleri $\text{lev}_{\leq \alpha} f$'ye aittir. $x_v \to \bar{x}$ olduğundan, bu seviye kümesi kapalıdır ve $\bar{x}$'i içerir. Böylece her $\alpha > \bar{\alpha}$ için, $f(\bar{x}) \leq \alpha$ olacaktır. Bu da $f(\bar{x}) \leq \bar{\alpha}$ olmasıdır.

Lemma 4.1.3 (Alt limitlerin karakterizasyonu)

$$\liminf_{x \to \bar{x}} f(x) = \min\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \ \exists x_v \to \bar{x} \ \ f(x_v) \to \alpha\}.$$

(Burada $x_v \equiv \bar{x}$ sabit dizisi kabul edilmiş ve bu da $\alpha = f(\bar{x})$.)

İspat $\bar{\alpha} = \liminf_{x \to \bar{x}} f(x)$ alalım. İlk olarak $x_v \to \bar{x}$ ve $f(x_v) \to \alpha$ olduğunu farzedip, bunun $\alpha \geq \bar{\alpha}$ ifadesini gerektirdiğini göstereceğiz. Herhangi bir $\delta > 0$ için, artan v'leri düşündüğümüzde x_v'lerin bir yerden sonra $B(\bar{x}, \delta)$ yuvarının içinde olacağını biliyoruz. Bundan dolayı $f(x_v) \geq \inf\{f(x) | \ \ x \in B(\bar{x}, \delta)\}$ elde ederiz. Bu eşitsizlikte v'ye göre limit alıp δ'yı sabitlediğimizde, $\alpha \geq \inf\{f(x) | \ \ x \in B(\bar{x}, \delta)\}$ elde ederiz ve böylece $\alpha \geq \bar{\alpha}$ olmuş olur.
Şimdi de $x_v \to \bar{x}$ varlığını göstereceğiz ki bu da $f(x_v) \to \bar{\alpha}$ olması demektir. $\delta_v \to 0$ için $\alpha = \inf\{f(x) | \ \ x \in B(\bar{x}, \delta_v)\}$ alalım. $\bar{\alpha}$ için alttan limit tanımı $\bar{\alpha}_v \to \bar{\alpha}$ olması demektir. Herbir v için, $x_v \in B(\bar{x}, \delta_v)$ bulmak mümkündür ki bu da $f(x_v)$'yi $\bar{\alpha}_v$'ye yaklaştırır, yani $[\bar{\alpha}_v, \alpha_v]$ aralığına düşürür. (α_v'ler $\alpha_v > \bar{\alpha}_v$ eşitsizliğini sağlaması ve $\alpha_v \to \bar{\alpha}$ olması için seçilmişti) Böylece açık olarak $x_v \to x$ ve $f(x_v)$'lerin $\bar{\alpha}_v$'ler yani $\bar{\alpha}$'lar ile aynı limite sahip olduğunu göstermiş olduk.

4.2 Minimuma Ulaşma

Bu başlık altında başka bir soruya cevap vereceğiz. Hangi şartlar altında $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir x noktasında minimuma ulaşır ve $\text{argmin} f$ kümesi boş kümeden farklıdır. Bu konu, minimizasyon problemlerinin temel sorusu olduğundan önem arz eder.

Kompakt bir küme içerisinde sürekli bir fonksiyonun minimum değeri mevcuttur. Aynı şekilde bu küme içerisinde maksimum değeri de mevcuttur. Bu ifade maksimum ve minimum için simetriktir. Yalnız, daha elastik bir yaklaşıma ihtiyacımız var, yani her zaman kompakt bir küme alamayız ve bu tarz sınırlamalar her zaman olmayabilir. Bütün mesele minimize edilmek istenen f fonksiyonunun belli bir bölgede ∞ değerler alıp almadığı ile ilgilidir. Diğer mesele, üzerinde çalıştığımız fonksiyonun süreklilik şartlarını sağlamaktan uzak olmasıdır. Örneğin şekildeki fonksiyon sürekli olmadığı halde minimum değere mevcuttur. Bu konu ile ilgili önemli özelliklerden bahsedeceğiz.

Tanım 4.2.1 Herbir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\text{lev}_{\leq\alpha} f$ kümesi sınırlıysa, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu alttan seviye sınırlı fonksiyondur.

Burada α'nın sonlu değerlerinden bahsedildiği unutulmamalıdır. Seviye sınırlılığı özelliği $|x| \to \infty$ iken $f(x) \to \infty$ durumuna karşılık gelir.

Teorem 4.2.2 $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu alttan yarı sürekli, seviye sınırlı ve tam olsun. O zaman $\inf f$ değeri sonlu ve $\text{argmin} f$ kümesi de boştan farklı ve kompakt olur.

İspat $\overline{\alpha} = \inf f$ alalım, f tam olduğundan, $\overline{\alpha} < \infty$ olur. $\alpha \in (\overline{\alpha}, \infty)$ için, $\text{lev}_{\leq\alpha} f$ kümesi boştan farklı ve kapalıdır, çünkü f alttan yarı sürekli ve sınırlıdır (f seviye sınırlı). $\alpha \in (\overline{\alpha}, \infty)$ için $\text{lev}_{\leq\alpha} f$ kümesi kompakt ve iç içedir ($\alpha < \beta$ iken $\text{lev}_{\leq\alpha} f \subset \text{lev}_{\leq\beta} f$). Bu küme ailesinin kesişimi, $\text{lev}_{\leq\bar{\alpha}} f = \text{argmin} f$, boştan farklı ve kompakttır. f hiçbir yerde $-\infty$ değerini almadığından, $\bar{\alpha}$ değerinin sonlu olacağını söyleyebiliriz. Bu şartlar altında da $\inf f$ değeri, $\min f$ olarak da yazılabilir.

Sonuç 4.2.3 (Alt sınırlar) Eğer $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ve tam ise, o zaman bu fonksiyon $\mathbb{R}^n$'nin her sınırlı altkümesi için de alttan sınırlıdır ve bu alt kümelere bağlı olarak bir minimuma ulaşır.

Örnek 4.2.4 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun boştan farklı kapalı $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde minimize etmeyi düşünelim. Eğer her küme,

$$\{x \in C \mid \; f_0(x) \leq \alpha\} \quad \alpha \in \mathbb{R} \;,$$

şeklinde kapalı olursa, bu durumda C üzerinde f_0 fonksiyonunun minimumu sonlu olur ve buna C'nin boştan farklı kompakt bir altkümesinde ulaşılır.

Bu kriter, C sınırlı olduğunda veya f_0 fonksiyonu seviye sınırlı olduğunda karşılanır. Özellikle ikinci şart, $C = \mathbb{R}^n$ olması durumunda bile etkilidir.

4.3 Süreklilik, Kapanış ve Büyüme

Buraya kadar minimizasyon üzerine elde edilen sonuçlar genişletilerek maksimizasyon için de kullanılabilir. f'nin $\bar{x}$ noktasındaki alt limiti yerine, maksimizasyon için aynı fonksiyonun üst limiti kullanılır.

$$\begin{aligned} \limsup_{x \to \bar{x}} f(x) : &= \lim_{\delta \to 0} [\sup_{x \in B(\bar{x},\delta)} f(x)] \\ &= \inf_{\delta > 0} [\sup_{x \in B(\bar{x},\delta)} f(x)] \\ &= \inf_{V \in N(x)} [\sup_{x \in V} f(x)]. \end{aligned}$$

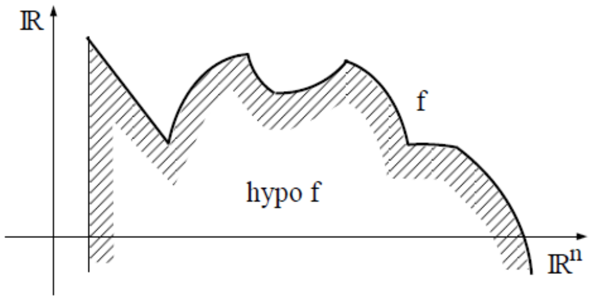
f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında $f(\bar{x})$ değerine eşitse üstten yarı süreklidir. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki her noktada üstten yarı süreklilik geometrik olarak f'nin hipograflarının kapalı olmasıdır.

$$\text{hypo} f := \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \; \alpha \leq f(x)\}.$$

Bu kapalılık üst seviye kümeleri olan $\text{lev}_{\geq \alpha} f$'ler için de geçerlidir. Daha önce bahsedilen alt limit formülüne benzer burada da üst limit formülü aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\limsup_{x \to \bar{x}} f(x) = \max\{\alpha \in \overline{\mathbb{R}} \mid \; \exists x_v \to \bar{x} \;\; f(x_v) \to \alpha\}.$$

Burada f'nin sürekliliğinin $x \to \bar{x}$ iken $f(x) \to f(\bar{x})$ olduğunu hatırlayarak, sürekliliği alttan yarı süreklilik ve üstten yarı süreklilik ile ilişkilendirelim.



Şekil 4.3: Fonksiyonun hipografı

Örnek 4.3.1 (fonksiyonların sürekliliği) Bir $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun sürekli olabilmesi için ancak ve ancak hem alttan yarı sürekli hem de üstten yarı sürekli olması gerekir.

Bir f fonksiyonunun alt ve üst limit değerleri epi$f$'nin kapanışının ve içerisinin tanımlanmasına da hizmet eder.Bunları şu şekilde göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}C &= \{x \mid \ \forall V \in N(x), V \cap C \neq \phi\}, \\ \mathrm{int}C &= \{x \mid \ \exists V \in N(x), V \subset C\}. \end{aligned}$$

Örnek 4.3.2 (epigrafların kapanışı ve içerisi) Herhangi bir f fonksiyonu, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ve $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ elemanları için,

(a) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{epi}f) \iff \bar{\alpha} \geq \liminf_{x \to \bar{x}} f(x)$

(b) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \in \mathrm{int}(\mathrm{epi}f) \iff \bar{\alpha} > \limsup_{x \to \bar{x}} f(x)$

(c) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \notin \mathrm{cl}(\mathrm{epi}f) \iff (\bar{x}, \bar{\alpha}) \in \mathrm{int}(\mathrm{hypo}f)$

(d) $(\bar{x}, \bar{\alpha}) \notin \mathrm{int}(\mathrm{epi}f) \iff (\bar{x}, \bar{\alpha}) \in \mathrm{cl}(\mathrm{hypo}f)$

$f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun yarı süreklilik özellikleri belli bir yere kadar etkilidir. f fonksiyonu alttan yarı sürekli olmadığında, bu fonksiyonun epigrafı kapalı değildir. Fakat $E := \mathrm{cl}(\mathrm{epi}f)$ kümesi sadece kapalı değil, aynı zamanda başka bir fonksiyonun da epigrafıdır. Bu fonksiyon ise alttan yarı sürekli ve g yarı sürekli fonksiyonları ($g \leq f$) arasında da en büyüğüdür. Bunu 'alttan kapanış' olarak adlandıracağız ve cl$f$ olarak göstereceğiz.

$$\mathrm{epi}(\mathrm{cl}f) := \mathrm{cl}(\mathrm{epi}f).$$

cl$f$ için direkt formül aşağıda verilmiştir.

$$(\mathrm{cl}f)(x) = \liminf_{x' \to x} f(x').$$

cl$f \leq f$ eşitsizliğinin daima sağlanacağı açıktır.

Benzer şekilde f fonksiyonunun 'üstten kapanışı' da hypo$f$'nin kapanışı olarak tanımlanır ki bu da f'nin her x noktasında üst limitini almak demektir. cl$f$ nasıl ki alttan kapanışı temsil ediyorsa, $-\mathrm{cl}(-f)$ de üstten kapanışı temsil eder. Eğer bir x noktasında bu iki kapanış da örtüşüyorsa bu durumda f fonksiyonunun bu x noktasında sürekli olacağı aşikardır.

5 KÜME YAKINSAKLIĞI

Bu başlık altında, şimdiye kadar bilinen klasik yakınsaklıklardan olan noktasal yakınsaklığın optimizasyon için yeterli olmayacağı ve bunun ötesinde bir geometrik yaklaşıma gidileceği anlatılacaktır. Bu geometrik yaklaşımın gelişimi, optimizasyon, stokastik işlemler ve benzer alanlardan destek alır ve küme dizilerinin yakınsaklığı bu konunun özünü içerir. Optimizasyon konusunda bir problemle karşılaşıldığında, bu noktada ilgili kümelerin davranışları ve optimum değerleri önem arz etmektedir. Verilen problemde bu değerlerin verilere ne kadar yaklaştığı temel husustur. Burada bizi sınırlayan özellikler, verilen fonksiyon dizilerinin sürekli olmaması ve tanım aralıklarıdır.

Küme yakınsaklığı teorisi, küme değerli fonksiyonların ve epigrafların grafiklerinin yakınsaklığı için çeşitli yollar ortaya koyar. C_v küme dizileri $\mathbb{R}^n$ üzerinde hangi şartlar altında ve ne şekilde bir C kümesine yakınsar? Bunun üzerinde durmadan önce $\mathbb{N}$'nin altkümeleri olan küme ailelerini tanımlayalım.

$$\mathcal{N}_\infty := \{N \subset \mathbb{N} \mid \ \mathbb{N} \backslash N \text{ sonlu}\}$$

$$\mathcal{N}_\infty^\# := \{N \subset \mathbb{N} \mid \ N \text{ sonsuz}\}$$

$\mathcal{N}_\infty$ kümesi ∞ komşuluğunda bazı v indislerini filtreler. $\mathcal{N}_\infty^\#$ ise bu kümenin tamamlanışı gibi düşünülebilir. Burada açık olarak, $\mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{N}_\infty^\#$. $\{x_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ dizisinin alt dizileri $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ olmak üzere $\{x_v\}_{v\in N}$ formatındadır. Ya da benzer şekilde $N \in \mathcal{N}_\infty$ olmak üzere $\{x_v\}_{v\in N}$ formatındadır.

Bu başlık altında yapılanlar altkümeler ile çok yakından ilgili olacağından bu tanımlar üzerinde yoğunlaşmak faydalı olacaktır. Daha önce tanımlamış olduğumuz bu indis kümeleri arasındaki doğal dualiteyi aşağıda ifade edelim.

$$\mathcal{N}_\infty^\# = \{N \subset \mathbb{N} \mid \ \forall N' \in \mathcal{N}_\infty, \ N \cap N' \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{N}_\infty = \{N \subset \mathbb{N} \mid \ \forall N' \in \mathcal{N}_\infty^\#, \ N \cap N' \neq \emptyset\}$$

5.1 İç ve Dış Limitler

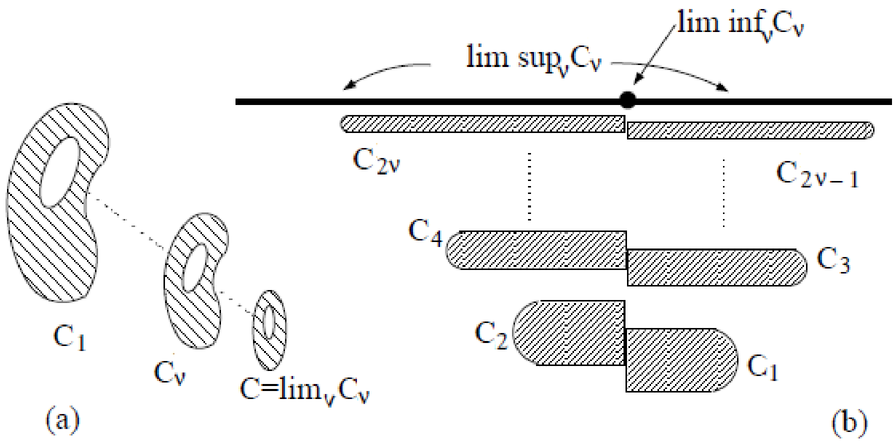
$\mathbb{R}^n$'nin altkümelerinin limitinin olabilmesi, birazdan tanımlayacağımız iki farklı yarı limit değerlerinin incelenmesine bağlıdır.

Tanım 5.1.1 (İç ve dış limitler) $\mathbb{R}^n$'nin altkümeleri olan $\{C_v\}_{v\in N}$ küme dizilerinin dış limiti,

$$\begin{aligned}\limsup_{v\to\infty} C_v &: = \{x \mid \ \exists N \in \mathcal{N}_\infty^{\#},\ \exists x_v \in C_v(v \in N),\ x_v \to x\} \qquad (5.1)\\ &= \{x \mid \ \forall V \in N(x), \exists N \in \mathcal{N}_\infty^{\#},\ \forall v \in N:\ C_v \cap V \neq \emptyset\}\ ,\end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Bu küme dizilerinin iç limiti ise,

$$\begin{aligned}\liminf_{v\to\infty} C_v &: = \{x \mid \ \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\ \exists x_v \in C_v(v \in N),\ \ x_v \to Nx\} \qquad (5.2)\\ &= \{x \mid \ \forall V \in N(x),\ \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\ \forall v \in N:\ C_v \cap V \neq \emptyset\}\end{aligned}$$



Şekil 5.1: (a) Yakınsak bir küme dizisi (b) Yakınsak olmayan bir küme dizisi

Bir küme dizisinin limitinin olabilmesi için iç ve dış limit kümelerinin birbirine eşit olması gerekir:

$$\lim_{v\to\infty} C_v := \limsup_{v\to\infty} C_v = \liminf_{v\to\infty} C_v.$$

Bir $\{C_v\}_{v\in N}$ küme dizisinin, limiti olmasa bile, iç ve dış limiti daima vardır. Bunlar boş küme dahi olabilir. Bütün v'ler için $C_v \neq \emptyset$ olduğunda, $\liminf_v C_v$ limiti, $x_v \in C_v$ şartını sağlayan bütün $\{x_v\}_{v\in N}$ dizilerinin olası limit noktalarından oluşur. $\limsup_v C_v$ limiti ise bu $\{x_v\}_{v\in N}$ dizilerinin bütün olası yığılma noktalarından oluşur.

Ne olursa olsun, $\mathcal{N}_\infty \subset \mathcal{N}_\infty^\#$ olduğundan, $\liminf_v C_v \subset \limsup_v C_v$ durumu daima sağlanır.

(5.1.1) numaralı tanımda bahsedilen V'nin komşulukları, $B(x,\epsilon)$ şeklinde alınabilir. Buradan, $B(x,\epsilon) \cap C_v \neq \emptyset$ şartı yerine $x \in C_v + \epsilon B$ yazılabilir. Bu ifadelere göre tanımları yeniden düzenlersek iç ve dış limitler için aşağıdakiler yazılabilir.

$$\liminf_{v\to\infty} C_v = \{x \mid \ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N}_\infty,\ \forall v \in N:\ x \in C_v + \epsilon B\}$$

$$\limsup_{v\to\infty} C_v = \{x \mid \ \forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathcal{N}_\infty^\#,\ \forall v \in N:\ x \in C_v + \epsilon B\}$$

İç ve dış limitler aynı zamanda uzaklık fonksiyonu olarak ya da kesişim veya birleşim işlemleri ile de ifade edilebilir. Bir x noktasının bir C kümesine olan uzaklığının $d_C(x)$ şeklinde, veya alternatif olarak $d(x,C)$ şeklinde yazılabileceğini hatırlayalım. $C = \emptyset$ olduğunda açık olarak $d(x,C) \equiv \emptyset$ olur. d_C fonksiyonu heryerde sonlu ve sürekli olduğunda,

$$d_C(x') \leq d_C(x) + |x' - x| \ ,$$

yazılabilir. Bunu yazabilmemizin sebebi $\forall y \in C$ için $|y - x'| \leq |y - x| + |x - x'|$ şeklinde bilinen üçgen eşitsizliğidir.

Örnek 5.1.2

(a) $\liminf_{v\to\infty} C_v = \{x \mid \ \limsup_{v\to\infty} d(x, C_v) = 0\}$,
$\limsup_{v\to\infty} C_v = \{x \mid \ \liminf_{v\to\infty} d(x, C_v) = 0\}$,
(b) $\liminf_{v\to\infty} C_v = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty^\#} \mathrm{cl} \bigcup_{v\in N} C_v$,
$\limsup_{v\to\infty} C_v = \bigcap_{N\in\mathcal{N}_\infty} \mathrm{cl} \bigcup_{v\in N} C_v$,
(c) $\liminf_{v\to\infty} C_v = \bigcap_{\epsilon>0}[\bigcup_{v=1}^\infty \bigcap_{k=v}^\infty (C_k + \epsilon B)]$.

5.2 Painleve-Kuratowski Yakınsaklık

Daha önceki başlıkta belirtildiği üzere, $\lim_v C_v$ mevcut olduğunda ve bu limit değeri C kümesine eşit olduğunda, $\{C_v\}_{v\in N}$ küme dizisi C'ye yakınsaktır diyoruz ve bunu,

$$\lim_{v\to\infty} C_v = \limsup_{v\to\infty} C_v = \liminf_{v\to\infty} C_v, \tag{5.3}$$

$$C_v \to C$$

şeklinde gösteriyoruz. Bu anlamdaki küme yakınsaklığına Painleve-Kuratowski yakınsaklık denir. Küme limitleri ile ilgili birkaç noktaya daha değinelim.

- $B(x_v, \rho_v)$ küme yuvarlarından oluşan bir dizinin $B(x, \rho)$ yuvarına yakınsak olabilmesi için $x_v \to x$ ve $\rho_v \to \rho$ olması gerekir. Eğer $\rho_v \to \infty$ olursa, o zaman bu yuvarlardan oluşan dizi $\mathbb{R}^n$'ye yakınsar.

- $D_1, D_2 \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, bir küme dizisinin elemanlarının D_1 ve D_2 kapalı kümeleri arasında sıra ile değiştiğini varsayalım. Mesela v tek olduğunda $C_v = D_1$ ve v çift olduğunda $C_v = D_2$ olsun. Bu küme dizisinin limiti yoktur. Ancak iç limiti vardır ve $D_1 \cap D_2$ kesişimine eşittir, aynı şekilde dış limiti vardır ve bu da $D_1 \cup D_2$ birleşimine eşittir.

- $D \subset \mathbb{R}^n$ ve cl$D = \mathbb{R}^n$ olsun. Aynı zamanda $D \neq \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda sabit $C_v \equiv D$ dizisi $C = \mathbb{R}^n$ kümesine yakınsar.

Örnek 5.2.1

(a) C_v artan bir küme dizisi ise $(C_v \subset C_{v+1} \subset ...)$ $\lim_v C_v = \mathrm{cl} \bigcup_{v \in N} C_v$,

(b) C_v azalan bir küme dizisi ise $(C_v \supset C_{v+1} \supset ...)$ $\lim_v C_v = \bigcap_{v \in N} \mathrm{cl} C_v$,

(c) $C'_v \subset C_v \subset C''_v$ iken $C'_v \to C$ ve $C''_v \to C$ olursa, o zaman $C_v \to C$ olur.

Önerme 5.2.2 (Limitlerin kapalılığı) Herhangi bir $C_v \subset \mathbb{R}^n$ küme dizisi için, $\liminf_v C_v$ iç limiti de $\limsup_v C_v$ dış limiti de kapalıdır. Daha da ötesinde, $\lim C_v$ varolduğunda bu limit de kapalıdır.

Sonuç 5.2.3 (Noktasal yakınsaklık ve uzaklık fonksiyonu) $C_v,\ C \in \mathbb{R}^n$ ve C kümesi kapalı olsun. $C_v \to C$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için $d(x, C_v) \to d(x, C)$ olmasıdır. Ayrıca,

(a) $C \subset \liminf_v C_v$ için gerek ve yeter şart, her x için $d(x, C) \geq \limsup_v d(x, C_v)$ olmasıdır.

(b) $C \supset \limsup_v C_v$ için gerek ve yeter şart, her x için $d(x, C) \leq \liminf_v d(x, C_v)$ olmasıdır.

İspat C_v küme dizileri ve C' kümesi kapalı olsun.

$$d(x, C') < \alpha \iff C' \cap \mathrm{int}B(x, \alpha) \neq \emptyset,$$
$$d(x, C') > \beta \iff C' \cap B(x, \beta) = \emptyset,$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Örnek 5.2.4 $C_v \in \mathbb{R}^n$ küme dizileri için, $\liminf_v d(x, C_v) = d(x, \limsup_v C_v)$ eşitliği ve $\limsup_v d(x, C_v) \leq d(x, \liminf_v C_v)$ eşitsizliği daima geçerlidir.

Küme yakınsaklığı 'mesafe' denilen bir kavram ile de tasvir edilebilir. İki boş olmayan küme arasındaki mesafe,

$$\begin{aligned} \mathrm{gap}(C, D) :&= \inf\{|x - y| \mid x \in C, y \in D\} \\ &= \inf_z \{d(z, C) + d(z, D)\} \ , \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Sadece bir $\{x\}$ elemanı için $\mathrm{gap}(C, \{x\}) = d(x, C)$ olarak yazılır. Daha genel olarak herhangi bir $\rho \in (0, \infty)$ için, $\mathrm{gap}(C, B(x, \rho)) = \max[d(x, C) - \rho, 0]$. Buradan şu çıkarımı yapabiliriz. C_v küme dizilerinin C kapalı kümesine yakınsaması için gerek ve yeter şart $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ve $\rho > 0$ için $\mathrm{gap}(C_v, B(x, \rho)) \to \mathrm{gap}(C, B(x, \rho))$ olmasıdır.
Sadece uzaklıklar değil, projeksiyonlar da küme yakınsaklığını nitelendirmek için kullanılır.

Önerme 5.2.5 (Projeksiyonlar üzerinden küme yakınsaklığı) $\mathbb{R}^n$ içinde kapalı ve boş olmayan C_v ve C kümelerini alalım. $C_v \to C$ olabilmesi için gerek ve yeter şart, $\limsup_v d(0, C_v) < \infty$ olması ve P_{C_v} projeksiyon eşlemelerinin her x için aşağıdaki özelliği sağlamasıdır.

$$\limsup_v P_{C_v}(x) \subset P_C(x).$$

Eğer C_v ve C kümeleri konveks kümeler ise, daha basitçe $C_v \to C$ olabilmesi için gerek ve yeter şart, bütün x'ler için $P_{C_v}(x) \to P_C(x)$ olmasıdır.

İspat $C_v \to C$ olduğunu varsayalım. Bu durumda bütün x'ler için, $d(x, C_v) \to d(x, C) < \infty$. Öyle bir $\bar{x}$ düşünelim ki $\bar{x} \in \limsup_v P_{C_v}(x)$ olsun. $N \in \mathcal{N}_\infty^\#$ olacak şekilde bir N indeks kümesi vardır ki $\bar{x}_v \in C_v$ ve $\bar{x} = \lim_{v \in N} \bar{x}_v$ şeklindeki $\bar{x}$'ler için $|\bar{x}_v - x| = d(x, C_v)$ eşitliğini yazabiliriz. Son olarak bu eşitlikte limit aldığımızda, $|\bar{x} - x| = d(x, C)$ elde ederiz ki burada $\bar{x} \in C$ ve dolayısıyla $\bar{x} \in P_C(x)$ olur.

$x \in \mathbb{R}^n$ alalım. $d(x, C_v) \to d(x, C)$ ifadesinin sağlandığını gösterirsek (daha önceden verilen teoremden) göstermeliyiz. $P_{C_v}(x)$ kümelerinin boş olmadığını biliyoruz bu yüzden her v ve $\bar{x} \in C_v$ için $\bar{x}_v \in P_{C_v}(x)$ seçebiliriz ki $|\bar{x}_v - x| = d(x, C_v)$ olur. Bu uzaklıklar sınırlı bir dizi oluşturur, çünkü $d(x, C_v) \leq d(0, C_v) + |x|$ ve $\limsup_v d(0, C_v) < \infty$. $\{d(x, C_v)\}_{v \in N}$ dizisinin herhangi bir birikme noktası $|\bar{x} - x|$ formatında olmak zorundadır. Burada $\bar{x}$ elemanı $\{\bar{x}_v\}_{v \in N}$ dizisinin birikme noktasıdır. Fakat böyle bir birikme noktası olan $\bar{x}$, varsayımımız gereği $P_C(x)$'e aittir ve bu yüzden $|\bar{x} - x| = d(x, C)$. Böylece $\{d(x, C_v)\}_{v \in N}$ sınırlı dizisinin tek birikme noktası $d(x, C)$ olur ve bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.2.6 C kapalı olmak üzere, $C_v, C \subset \mathbb{R}^n$ alt kümelerini alalım.

(a) $N \in \mathcal{N}_\infty$ indeks kümesinden alınan $v \in N$ sayıları için, $C \subset \liminf_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart, her $\rho > 0$ ve $\epsilon > 0$ için $C \cap \rho B \subset C_v + \varepsilon B$ olmasıdır.

(b) $N \in \mathcal{N}_\infty$ indeks kümesinden alınan $v \in N$ sayıları için, $C \supset \limsup_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart, her $\rho > 0$ ve $\epsilon > 0$ için $C_v \cap \rho B \subset C + \varepsilon B$ olmasıdır.

Böylece burada verilen iki durumun sağlanması için gerek ve yeter şart ise $C = \lim_v C_v$ olmasıdır. (a) ve (b)'de ifade edilen durumları farklı bir bakış açısıyla tekrar inceleyelim.

(a') $N \in \mathcal{N}_\infty$ indeks kümesinden alınan $v \in N$ sayıları için, $C \subset \liminf_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart, her $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $C \cap B(\bar{x}, \rho) \subset C_v + \varepsilon B$ olmasıdır.

(b') $N \in \mathcal{N}_\infty$ indeks kümesinden alınan $v \in N$ sayıları için, $C \supset \limsup_v C_v$ olması için gerek ve yeter şart, her $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için $C_v \cap B(\bar{x}, \rho) \subset C + \varepsilon B$ olmasıdır.

Teorem 5.2.7 X ayrılabilir bir metrik uzay ve $f, f_1, f_2, ...$ X üzerinde reel değerli alttan yarı sürekli fonksiyonlar olsun.

(1) Eğer $f = e - \lim f_v$ ise, herbir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha_v \to \alpha$ olduğunda $\text{lev}(f, \alpha) = \text{PK} - \lim \text{lev}(f_v, \alpha_v)$ olacak şekilde bir $\{\alpha_v\}$ reel dizisi vardır.

(2) $\text{lev}(f, \alpha) = \text{PK} - \lim \text{lev}(f_v, \alpha_v)$ ise herbir $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha_v \to \alpha$ olduğunda $f = e - \lim f_v$ olacak şekilde bir $\{\alpha_v\}$ reel dizisi vardır.

İspat (1) Sabit bir $\alpha \in \mathbb{R}$ seçelim. α'ya yakınsayan herhangi bir α_v dizisi için, $\text{Lslev}(f_v, \alpha_v) \subset \text{lev}(f, \alpha)$ olduğunu biliyoruz. $x \in \text{Lslev}(f_v, \alpha_v)$ alalım. Artan $v_1 < v_2 < v_3 < ...$ indisleri için bir $x_{v_k} \in \text{lev}(f_{v_k}, \alpha_{v_k})$ alt dizisinin x'e yakınsayacağını söyleyebiliriz. $v \neq \{v_k \mid \quad k \in \mathbb{Z}^+\}$ için $x_v = x$ olarak alalım. Bu durumda $x_v \to x$ olacaktır ve epi-yakınsaklık gereği,

$$f(x) \leq \liminf_v f_v(x_v) \leq \liminf_k f_{v_k}(x_{v_k}) \leq \liminf_k \alpha_{v_k} = \alpha$$

eşitsizliği yazılabilir ve bu da $x \in \text{lev}(f, \alpha)$ olduğunu kanıtlar. Şimdi $\text{lev}(f, \alpha)$ içinde $\{x_i\}$ dizisi alalım ve bu dizinin yığılma noktaları da yine $\text{lev}(f, \alpha)$ içinde olsun. $\text{epi} f \subset \text{Liepi} f_v$ olduğunu bildiğimizden, herbir pozitif m tamsayısı için N_m tamsayısı bulunabilir ve $\forall v \geq N_m$ olduğunda $\text{epi} f_v$ içinde $\{(w_{in}^{(m)}, \alpha_{in}^{(m)}) : \ i = 1, 2, 3, ..., m\}$ şeklinde öyle noktalar vardır ki herbir $i \in \{1, 2, ..., m\}$ için $d(w_{in}^{(m)}, x_i) < 1/m$ ve $|\alpha_{in}^{(m)} - \alpha| < 1/m$ elde edilir. N_m monoton artan bir dizi olsun. Şimdi α_v dizisini tanımlayalım. $v < N_1$ olduğunda $\alpha_v = \alpha + 1$ ve $N_m \leq v < N_{m+1}$ olduğunda da $\alpha_v = \alpha + 1/m \ \ (m = 1, 2, 3, ...)$ olsun. Şimdi bu tanımları da kullanarak $\text{lev}(f, \alpha) \subset \text{Lilev}(f_v, \alpha_v)$ olduğunu göstereceğiz. V kümesi X'in açık bir alt kümesi olmak üzere, $\text{lev}(f, \alpha) \cap V \neq \emptyset$ olsun. $\varepsilon > 0$ için, $S_\varepsilon[x] \subset V$ olacak şekilde $x \in \text{lev}(f, \alpha) \cap V$ seçelim. x_i'nin yığılma noktası x olduğundan, $k \in \mathbb{Z}^+$ için, $1/k < \varepsilon/2$ ve $d(x_k, x) < \varepsilon/2$ olacaktır. $v \geq N_k$ olacak şekilde sabitleyelim, bu durumda $v \geq N_m$ olacak şekilde en büyük m sayısı vardır. Buradan, $d(w_{kv}^{(m)}, x_k) < 1/m$ ve $|\alpha_{kv}^{(m)} - \alpha| < 1/m$ elde edilir. $f_v(w_{kv}^{(m)}) \leq \alpha_{kv}^{(m)} < \alpha + 1/m = \alpha_v$ olduğundan $w_{kv}^{(m)} \in \text{lev}(f_v, \alpha_v)$ elde edilir. Ayrıca,

$$d(w_{kv}^{(m)}, x) \leq d(w_{kv}^{(m)}, x_k) + d(x_k, x) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

yazarız ve böylece $w_{kv}^{(m)} \in V$ olur. Bu ise, herbir $v \geq N_k$ için, $V \cap \text{lev}(f_v, \alpha_v) \neq \emptyset$ olması anlamına gelir. Dolayısıyla $\text{lev}(f, \alpha) \subset \text{Lilev}(f_v, \alpha_v)$ olduğunu göstermiş olduk. Sonuç olarak $\text{lev}(f, \alpha) = \text{PK} - \lim \text{lev}(f_v, \alpha_v)$ gösterilmiş oldu.

(2) $\text{lev}(f,\alpha) \subset \text{Lilev}(f_v,\alpha_v)$ durumu herbir $\alpha \in \mathbb{R}$ ve bu α'ya yakınsayan $\{\alpha_v\}$ dizileri için geçerlidir ve bu da $\text{epi}f \subset \text{Liepi}f_v$ ifadesini gerektirir.

$\text{Liepi}f_v \subset \text{epi}f$ ifadesini kanıtlamak için, aksini varsayalım. Öyle bir $(x,\beta) \in \text{Lsepi}f_v$ alalım ki aynı zamanda $(x,\beta) \notin \text{epi}f$ olsun. Bu da $\beta < f(x)$ olmasıdır. $(x_k,\beta_k) \to (x,\beta)$ olacak şekilde $(x_k,\beta_k) \in \text{epi}f_{v_k}$ ve artan $v_1 < v_2 < v_3 < ...$ diziler mevcuttur. β ve $f(x)$ arasında bir α seçelim. $\{\alpha_v\}$ dizisi bu α'ya yakınsasın ve $\text{lev}(f,\alpha) = \text{PK} - \lim \text{lev}(f_v,\alpha_v)$ olsun. Yeterince büyük k için, $\beta_k < \alpha_{v_k}$ olur. Bütün bu k'lar için, $x_k \in \text{lev}(f,\alpha)$ geçerlidir ve $\text{Lslev}(f_v,\alpha_v) \subset \text{lev}(f,\alpha)$ şartı sağlanır. Bu da $x \in \text{lev}(f,\alpha)$ olmasıdır. Dolayısıyla $f(x) > \alpha$ ile çelişir. Sonuç olarak $f = e - \lim f_v$ olur.

5.3 Epi-Yakınsaklık ve Kuratowski Yakınsaklık

Şimdi de epi-yakınsaklık ile küme dizileri arasındaki bağlantıya bakalım. Bir f fonksiyonuna epi-yakınsak olan f_v fonksiyon dizilerinin epigraflarının da aynı şekilde f fonksiyonunun epigrafına yakınsayacağı aşikardır. Bu yakınsamanın ne şekilde olacağı ve hangi şartlarda gerçekleşeceği önemli noktalardan bir tanesidir. Sıradaki teorem bu duruma açıklık getirecektir.

Teorem 5.3.1 $\{f_v\}_{v\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi, (X,τ) topolojik uzayından reel sayılara tanımlı olsun. $\liminf_v(\text{epi}f_v)$ ve $\limsup_v(\text{epi}f_v)$ limit kümeleri için aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\liminf_v(\text{epi}f_v) = \text{epi}(e - \limsup f_v) \tag{5.4}$$

$$\limsup_v(\text{epi}f_v) = \text{epi}(e - \liminf f_v) \tag{5.5}$$

İspat Önce (5.4)'ün ispatından başlayalım. $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x,\lambda) \in \liminf_v(\text{epi}f_v)$ alalım. Bu durumda, $\forall V \in N_\tau(x)$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için, $\forall k > v$ olduğunda,

$$V \times (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \ \cap \ \text{epi}f_k \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $v \in \mathbb{N}$ vardır. Epigrafların geometrik özelliklerinden dolayı, bu ifadeyi tekrar yorumlayalım. $\forall V \in N_\tau(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ için, $\forall k > v$ olduğunda,

$$\lambda + \varepsilon > f_k(x_k)$$

olacak şekilde bir $v \in \mathbb{N}$ sayısı ve $x_k \in V$ dizisi vardır. Bunu da,

$$\lambda > \sup_{V \in N_\tau(x)} \inf_{v \in \mathbb{N}} \sup_{k>v} \inf_{u \in V} f_k(u),$$

$$\lambda > \sup_{V \in N_\tau(x)} \limsup_{v \to \infty} \inf_{u \in V} f_v(u) = (e - \limsup f_v)(x)$$

şeklinde yazarız. Sonuç olarak $(x, \lambda) \in (e - \limsup f_v)$ olur ve

$$\liminf_v (\mathrm{epi} f_v) = \mathrm{epi}(e - \limsup f_v)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi de (5.5)'i ispat edelim. $x \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $(x, \lambda) \in \limsup_v (\mathrm{epi} f_v)$ alalım. Bu durumda, $\forall V \in N_\tau(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall v \in \mathbb{N}$ için,

$$V \times (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \ \cap \ \mathrm{epi} f_k \neq \emptyset$$

olacak şekilde bir $k > v$ sayısı vardır. Yine epigrafların özelliklerinden bunu şöyle yazabiliriz. $\forall V \in N_\tau(x)$, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall v \in \mathbb{N}$ için,

$$\lambda + \varepsilon > f_k(x_k)$$

olacak şekilde bir $k > v$ sayısı ve $x_k \in V$ dizisi vardır. Bunu da,

$$\lambda > \sup_{V \in N_\tau(x)} \sup_{v \in \mathbb{N}} \inf_{k>v} \inf_{u \in V} f_k(u),$$

$$\lambda > \sup_{V \in N_\tau(x)} \liminf_{v \to \infty} \inf_{u \in V} f_v(u) = (e - \liminf f_v)(x)$$

şeklinde yazarız. Sonuç olarak $(x, \lambda) \in (e - \liminf f_v)$ olur ve

$$\limsup_v (\mathrm{epi} f_v) = \mathrm{epi}(e - \liminf f_v)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi de daha önce Kuratowski yakınsaklığı için verdiğimiz (5.1) , (5.2) ve (5.3) tanımlarını kullanarak, $\mathrm{epi} f_v$ küme dizilerinin bir $\mathrm{epi} f$ kümesine yakınsadığını varsayalım ve bunun sonucuna bakalım.

$$\liminf_v (\mathrm{epi} f_v) = \limsup_v (\mathrm{epi} f_v) = \lim_v (\mathrm{epi} f_v) = \mathrm{epi} f, \tag{5.6}$$

$$\mathrm{epi}(e - \limsup_v f_v) = \mathrm{epi}(e - \liminf_v f_v) = \mathrm{epi}(e - \lim_v f_v). \tag{5.7}$$

(5.2.8) teoreminden, (5.6) ve (5.7)'de geçen ifadelerin birbirine eşit olduğunu biliyoruz.

$$\text{epi}(e - \lim_v f_v) = \lim_v(\text{epi} f_v) = \text{epi} f.$$

Buradan da $\text{epi}(e - \lim_v f_v) = \text{epi} f$ olduğunu yazabilir ve,

$$e - \lim_v f_v = f, \tag{5.8}$$

sonucuna ulaşırız. Yani bu da $f_v \rightarrow_e f$ olmasıdır. Sonuç olarak ilk başta $\text{epi} f_v$ küme dizilerinin bir $\text{epi} f$ kümesine yakınsak olduğunu varsaydık (bu yakınsama (5.3) gereği Kuratowski yakınsaklıktır) ve bu varsayımımızın sonucunda f_v fonksiyon dizilerinin f fonksiyonuna epi-yakınsak olduğunu gördük. (5.8) eşitliğinde verilen ifadenin her iki tarafının da epigrafı alınarak adımlar ters tarafa doğru atılabilir. Dolayısıyla f_v fonksiyon dizilerinin bir f fonksiyonuna epi-yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\text{epi} f = \text{PK} - \lim \text{epi} f_v$ olmasıdır.

$$f_v \rightarrow_e f \iff \text{epi} f = \text{PK} - \lim_v \text{epi} f_v.$$

6 KAYNAKLAR

Attouch, H. and Wets, R.J.-B. (1981). Approximation and Convergence in Nonlinear Optimization. NLP 4. Mangasarian, Meyer and Roginson (Eds.). *Academic Press, New York,* 367-394.

Birge, J. and Wets, R.J.-B. (1983). Designing Approximation Schemes for Stochastic Optimization Problems, in Particular for Stochastic Programs with Resource. IIASA-Working Paper WP-83-111.

Burkholder, D., and R. Wijsman. (1963). Optimum Properties and Admissibility of Sequential Tests. *Ann. Math. Statist.* **34**: 1-17.

Fiacco, A., and G. McCormik. (1967). The sequential unconstrained minimization technique without parameters. *Operations Research* **15**: 820-827.

Kanniappan, P. and Sastry, S.M.A. (1983). Uniform Convergence of Convex Optimization Problems. *J. Math. Anal. Appl.* **96**: 1-12.

Kosmol, P. (1974). Algorithmen zur konvexen Optimierung. *Methods Oper. Res.* **18**: 176-186.

Lions, J-L., and G. Stampacchia. (1967). Variational Inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.* **20**: 493-519.

Meyer, G. (1979). Asymptotic properties of sequences iteratively generated by point-to-set maps. *Mathematical programming study* **10**: 115-127.

Mosca, U. (1967). Approximation of the Solutions of Some Variational Inequalities. *Ann. Scoula Normale Sup. Pisa* **21**: 373-394; ibiol 765.

Mosco, U. (1969). Convergence of Convex Sets and of Solutions of Variational Inequalities. *Adv. in Math* **3**: 510-585.

Römisch, W. (1981). An Approximation Method for Stochastic Optimization and Control. Preprint, Humboldt-Univ., Berlin.

Robert, R. (1974). Convergence de Fonctionelles Convexes. *J. Math. Anal. Appl.* **45**: 533-535.

Robinson, S. (1975). Stability Theory for Systems of Linear Inequalities, Part 1: Linear Systems. *Siam. J. Numer. Anal.* **12**: 754-769.

Robinson, S. (1979). Generalized Equations and Their Solutions, Part 1: Basic Theory. *Mathematical Programming Study* **10**: 128-141.

Salinetti, G. and Wets, R.J.-B. (1977). On the Relations between Two Types of Convergence for Convex Functions. *J. Math. Anal. Appl.* **60**: 211-226.

Spingarm, J. (1980). Fixed and Variable Constraints in Sensitivity Analysis. *Siam. J. Control and Optimiz.* **18**: 297-310.

Tishadhigama S., E. Polak and R. Klessig (1979). A comparative study of several general convergence conditions for algorithms modeled by point-to-set maps. *Mathematical Programming Study* **10**: 172-190.

Wets, R.J.B. (1980). Convergence of Convex Functions. Variational Inequalities and Convex Optimization Problems. *Variational Inequalities and Complementarity Problems.* R. Cottle, F. Giannessi and J.-L. Lions (Eds.), Wiley and Sons, New York, 375-403.

Wijsman, R.A. (1966). Convergence of Sequences of Convex Sets, Cones and Functions. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **123**: 32-45.

Zolezzi, T. (1978). Characterization of Some Variational Perturbations of the Abstract Linear-quadratic Problem. *Siam J. Control and Optimiz.* **16** 106-121.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Şükrü Tortop
Doğum Yeri ve Tarihi	: Afyonkarahisar, 01/01/1987
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 0 505 774 13 84, stortop@aku.edu.tr

Eğitim Durumu

Lise	: Afyon Anadolu Öğretmen Lisesi, 2001–2005
Lisans	: Boğaziçi Üniversitesi, 2005–2011
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, 2012–2014

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

İstanbul Eğitim Bilimleri Dershaneleri, 2007-2009

İstanbul Eduway Dershanesi, 2009-2011

İstanbul İstek Koleji, 2011-2012