STOKASTİK SÜREÇLERDE HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE φ- KONVEKS FONKSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Betül BODUR

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak, 2016

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

STOKASTİK SÜREÇLERDE HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER VE φ- KONVEKS FONKSİYONLAR

Betül BODUR

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Betül BODUR tarafından hazırlanan "Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipli Eşitsizlikler ve φ- Konveks Fonksiyonlar" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Başkan : Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üni., Fen Edebiyat Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

………………………………….
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15/01/2016

Betül Bodur

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STOKASTİK SÜREÇLERDE HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

VE

φ -KONVEKS FONKSİYONLAR

Betül BODUR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tezde, konveks fonksiyonlar içerisinde önemli bir yer tutan s- konveks fonksiyonlara yeni bir perspektiften bakıldı ve böylece yeni bir tanıma ulaşıldı. Ayrıca bu tanım üzerine yeni teoremler inşa edildi. Bu amaçla çalışmanın ikinci bölümünde matematikte yer alan bazı temel tanım ve teoremler, bazı konveks fonksiyon sınıfları, birinci ve ikinci anlamda stokastik süreçlerde s- konveks için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliği ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. Ayrıca bulgular ve tartışma kısmında φ- konveks fonksiyonlar için stokastik süreçlerde Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ele alınmıştır.

2016, v + 38 sayfa

Anahtar Kelimeler: s- Konveks Fonksiyonlar, Birinci Anlamda Stokastik Süreçlerde s- Konveks Fonksiyonlar, İkinci Anlamda Stokastik Süreçlerde s- Konveks Fonksiyonlar, φ Konveks Fonksiyonlar

ABSTRACT

M.Sc Thesis

HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR STOCHASTIC PROCESSES

AND

φ- CONVEX FUNCTIONS

Betül Bodur

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

In this thesis, which holds an important place in convex functions it is viewed from a new perspective to s- convex functions and thus reached a new recognition. Also depending on given definition new theorems were given. For his purpose, in the second part of the study, some basic definitions and theorems in mathematics, some convex function classes and some basic concepts related to first and second sense s- convex functions about Hermite-Hadamard type inequalities for stochastic processes are given.In addition to findings and discussion Hermite-Hadamard type inequalities in stochastic processes for φ- convex functions are discussed.

2016, v + 38 pages

Key Words: *s*- Convex Functions, *s*- Convex Stochastic Processes In The First Sense, s- Convex Stochastic Processes In The Second Sense, φ- Convex Functions

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, yanında çalışmaktan onur duyduğum, ihtiyacım olduğu her anda sabır ve anlayış ile yardımlarını esirgemeyen, bu araştırmanın konusu, yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı değerli tez danışmanım Yard. Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ'e teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme ve dostlarıma göstermiş oldukları sabır ve duydukları güven için sonsuz teşekkür ederim.

Betül BODUR

AFYONKARAHİSAR, 2016

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\int$	İntegral Operatörü
$\sum$	Toplam Operatörü
$L[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\int_a^b$	Belirli İntegral
$\frac{d}{dt}$	Türev
$\in$	Elemanıdır
N	Doğal Sayılar Kümesi
R	Reel Sayılar Kümesi
R^n	*n* boyutlu Öklid uzayı
$\lim$	Limit
$\limsup$	Limit Supremum
$\liminf$	Limit İnfimum
I	R içinde bir aralık
I^o	I nin içi

1. GİRİŞ

Konveks fonksiyonların araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır. Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir (52'inci sırada). Konvekslik; geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır. Sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik, matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar. Son yüzyılda gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi olarak yer almıştır.

Çoğu matematikçi farklı konveks fonksiyon sınıfları (quasi-convex fonksiyonlar, fonksiyonların Godunova-Levin sınıfı, log-convex ve r-convex fonksiyonlar, p-convex fonksiyonlar, vb.) ve özel ortalamalar (p- logarithmic ortalamalar, identric ortalama, Stolarsky ortalamalar, vb.) için onu uygulamaya, genişletmeye, sadeleştirmeye ve genelleştirmeye çalışmaktadır. Bununla birlikte eşitsizlikler, yaygın olarak uygulamalı matematiğin çeşitli dallarında sıklıkla kullanıldığından eşitsizlikler konusunda oldukça hızlı bir gelişim gösterilmiştir. Özellikle son on yıldan fazladır matematiğin birçok farklı alanlardaki uygulamalara büyük bir katkı sağlandığı açıkça görülmektedir. Örneğin, Cebysev, Grüss, Yamuk, Ostrowski, Hadamard ve Jensen eşitsizlikler ile ilgili birçok uygulama literatürde çok önemli bir yere sahiptir.

Hardy vd. (1934) tarafından yazılan "Inequalities" adlı eser, eşitsizlikler teorisi için temel başvuru kaynaklarından birisi olarak dikkat çekmektedir. Bununla birlikte, Beckenbach ve Bellman (1965) "Inequalities" ve Mitrinovic (1970)'in yazdığı "Analytic Inequalities" adlı eserler de temel başvuru kaynaklarının arasındaki yerini almıştır.

Daha sonra konveks fonksiyonlar ile ilgili daha kapsamlı bir şekilde, hazırlanan "Convex Functions" adlı eser literatürdeki yerini almıştır (Roberts and Varberg 1974). Ayrıca okuyucu çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımını "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulabilir (Dragomir and Pearce 2000).

Konvekslik ve eşitsizlikler konusunda Nikodem (1980) tarafından yapılan çalışmada, stokastik süreçlerdeki konvekslik tanımı verilmiştir. Skowronski (1995) tarafından stokastik süreçlerdeki konvekslikle ilgili olarak yeni sonuçlar sunulmuştur. Ayrıca stokastik süreçlerin konveksliği için bazı Hermite-Hadamard tipi eşitsizlikleri türetilmiş, stokastik süreçlerde kuvvetli konvekslik bize tanıtılmış ve konveks fonksiyonları ile ilgili Hermite-Hadamard eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Kuhn ve Bernstein-Doetsch teoremi gibi tanınmış bazı sonuçlar genişletilmiştir (Kotrys *et al.* 2011, 2012). Bununla birlikte stokastik süreçlerde konvekslik ve eşitsizlikler konusunda son zamanlarda yapılan çalışmalardan bazıları da Maden vd. (2014), birinci anlamda s-konvekslik yardımıyla stokastik süreçlerde Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikleri için yapılan çalışmayla ikinci anlamda s-konvekslik yardımıyla stokastik süreçlerde Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler hakkında yapılan çalışmalar olarak sıralanabilir.

Son yıllarda klasik konvekslik tanımından daha genel konveks fonksiyon çeşitleri oluşturulmaktadır. Bunlardan birisi de Breckner (1978) tarafından "Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen" adlı çalışmasında tanıtılan s-konveks fonksiyonlardır. s-konvekslik ile ilgili bazı özelliklere "Some remarks on s-convex functions" adlı çalışmada yer verilmiştir (Hudzik and Maligranda 1994).

Bir diğeri de Youness (1999) tarafından tanıtılan φ konveks fonksiyonlardır. Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir φ konveks fonksiyondur, ancak bunun tersinin her zaman doğru olmadığını gösteren örnekler verilmiştir (Youness and Cristescu 2002). Ayrıca Cristescu (2002) bu fonksiyonlar ile ilgili birçok özellikler vererek ispatlayıp daha sonra φ konveks fonksiyonlar için ilk kez Hermite-Hadamard integral eşitsizliğini vermiştir.

Bu tezde, birinci ve ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar kullanılarak stokastik süreçlerde s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler incelenmiş ve stokastik süreçlerde φ konvekslik tanımı yapılarak yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir.

1.1 Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 1.1.1: Bir deneyin mümkün sonuçlarının kümesine örnek uzay denir (Cengiz 1984).

Tanım 1.1.2: Bir örnek uzayın her bir alt kümesine olay denir (Cengiz 1984).

Tanım 1.1.3: Bir örnek uzaydaki her olaya sayısal değer atayan bir fonksiyona rassal değişken denir. Rassal değişkenler X, Y, Z ... gibi büyük harflerle gösterilir. Bir X rassal değişkeninin mümkün değerlerinin sayısı sayılabilir ise X'e kesikli rassal değişken denir. Bir X rassal değişkeninin mümkün değerleri bir aralıktan ya da aralıkların birleşiminden oluşuyorsa X'e sürekli rassal değişken denir (Cengiz 1984).

Tanım 1.1.4: X sürekli bir rassal değişken olsun. Özel bir X=x noktasındaki olasılığı $P(X = x)$ ile gösterelim. X rassal değişkeninin a ve b değerleri arasında olma olasılığı

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{1.1}$$

integraliyle tanımlanır. Buradaki f fonksiyonuna X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Bir f fonksiyonunun, bir X rassal değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için şu şartlar sağlanmalıdır. Her x için;

$$f(x) \geq 0$$

ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

(Cengiz 1984).

Tanım 1.1.5: Bir rassal değişkenin veya fonksiyonun bütün olası değerleri üzerinden alınan ortalama değerine beklenen değer denir. $f(x)$ ve $E(x)$, sırasıyla X'in olasılık yoğunluk fonksiyonu ve beklenen değeri olmak üzere;

X kesikli rassal değişken ise

$$E(x) = \sum_x xf(x) \tag{1.2}$$

X sürekli rassal değişken ise

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \tag{1.3}$$

biçiminde tanımlanır (Cengiz 1984).

Tanım 1.1.6: Bir rassal değişkenin yoğunluğunun kesin biçimini belirleyen büyüklüklere moment denir. Bir X rassal değişkeninin $x = a$ noktası etrafında r-inci momenti

X kesikli rassal değişken ise

$$\mu_r(a) = \sum_x (x-a)^r f(x) \tag{1.4}$$

X sürekli rassal değişken ise

$$\mu_r(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^r f(x)dx \tag{1.5}$$

biçiminde tanımlanır (Cengiz 1984).

$E(x) = \mu$ olsun. $x = \mu$ beklenen değeri etrafındaki birinci ve ikinci momentlere bakalım.

$$\mu_1(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^1 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - \mu\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mu - \mu = 0$$

$$\mu_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2\mu\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + \mu^2$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 = Var(X)$$

olur. Görüldüğü gibi beklenen değer etrafındaki ikinci moment varyansı verir.

Tanım 1.1.7: Her $u, v \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$f(tu + (1-t)v) \leq tf(u) + (1-t)f(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $f: I \subset R \to R$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak t (0,1) aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır.

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir.

a) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için, $f(x) - f(c)/(x-c)$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

b) $f: (a, b) \to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $c, x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t)dt$$

olacak şekilde $g: (a, b) \to R$ artan fonksiyonun olmasıdır.

c) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

d) f'' , (a, b) de mevcut olsun. Bu durumda f nin konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

e) $f : (a,b) \to \mathrm{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a, b)$ için f fonksiyonun en az bir support doğrusuna sahip olmasıdır. Yani $\forall x \in (a, b)$ için

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_{-}(x_0) \neq f'_{+}(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_{-}(x_0), f'_{+}(x_0)]$ dir.

f) $f: (a, b) \to R$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta ve olmak üzere, PQ, PR ve QR doğrularının eğimleri arasında

$$m_{PQ} \leq m_{PR} \leq m_{QR}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıda konveks fonksiyonlar ile ilgili iyi bilinen bazı özellikler verilmiştir:

i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.

ii. $f: I \to R$ konveks fonksiyon ise, I° (I nın içi) inde herhangi bir $[a, b]$ kapalı aralığında Lipschitz şartını sağlar. Bu nedenle f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında da mutlak sürekli ve I° de süreklidir.

iii. $f: I \to R$ konveks fonksiyon ise, I° de $f'_{-}(x)$ ve $f'_{+}(x)$ vardır ve artandır.

iv. $f: I \to R$ fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde f' mevcuttur ve süreklidir.

v. k tane fonksiyon $R'' \to R$ de konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j f_j(k)\,, a_j > 0, (j = 1,2,3, \dots, k)$

fonksiyonu da konvekstir.

vi. $g: R \to R$ azalmayan ve konveks fonksiyon ayrıca $h: R'' \to R$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde; $f: R'' \to R$ $f(x) = (g \circ h)(x)$ olarak tanımlanan f bileşke fonksiyonu da konvekstir.

vii. $g: R'' \to R$ konveks ve $h: R^n \to R$ fonksiyonu $h(x) = Ax + B$ formunda konveks olmak üzere (Burada A uygun matristir.)

$$f(x) = g(h(x))$$

fonksiyonu konveks fonksiyondur.

Teorem 1.1.1 (Hermite - Hadamard Eşitsizliği) : $f: \mathrm{I} \subset R \to R$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ ve $a < b$ için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.6}$$

dir (Pecaric *et al.* 1992).

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Sağ taraftaki eşitsizliğin ispatı konveksliğin geometrik yorumundan açıktır. Yani

$x = a(1-t) + bt, t \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \int_0^1 f(a(1-t) + bt)dt \\ &\leq f(a)\int_0^1 (1-t)dt + f(b)\int_0^1 t dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned}$$

olur ve bu (1.6) eşitsizliğinin sağ tarafıdır. Şimdi sol tarafının ispatını verelim:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

integralini

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\right] \tag{1.7}$$

biçiminde yazıp, $x = a + t(b-a)/2$ değişken değiştirmesi yapılırsa son parantez içindeki ilk terim

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde ve (1.7) denkleminde son parantez içindeki ikinci terim için $x = b - t(b-a)/2$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx = -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

biçiminde yazılabilir. (1.7) de bu sonuçlar yazılır ve konveksliğin tanımı uygulanırsa;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)dt + \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)dt$$

$$\geq \int_0^1 f\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right)dt = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 1.1.2. $f : I^\circ \subset R \to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu, $[a,b]$ üzerinde konveks ise eşitsizlik elde edilir.

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{b-a}{8}(|f'(a)| + |f'(b)|) \tag{1.8}$$

Teorem 1.1.3. $f : I^\circ \subset R \to R$ fonksiyonu I° üzerinde diferansiyellenebilir, $a,b \in \mathrm{I}^\circ$, $a < b$ ve $p > 1$ olsun. Eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu, $[a,b]$aralığı üzerinde konveks ise,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+3|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}+\left(3|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}+|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right]$$

$$\leq \frac{b-a}{4}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \tag{1.9}$$

elde edilir.

Tanım 1.1.8: $0 < s \leq 1$ olsun. $f:[0,\infty) \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyonu ise $\forall u, v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{1.10}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_s^1 olarak bilinir (Matuszewska and Orlicz 1961, Musielak 1983).

Tanım 1.1.9: $0 < s \leq 1$ olsun. $f:[0,\infty) \to R$ fonksiyonu ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu ise $\forall u, v \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v) \tag{1.11}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu s-konveks fonksiyon sınıfı genellikle K_s^2 olarak bilinir (Maden *et al.* 2014).

2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde küme sınıfları ve fonksiyon sınıflarında aranan konveks fonksiyon ve konveks kümeler için birinci ve ikinci anlamda stokastik süreçlerde s-konveks fonksiyonları tanımlayacağız. Aşağıda verilen tüm sonuçlar Maden vd. (2014), tarafından verilen çalışmadan yararlanılmıştır.

2.1 Birinci Anlamda *s*-Konveks İçin Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Tanım 2.1.1: Keyfi olasılık uzayı (Ω, A, P) olsun. Eğer A sınırlıysa; $X: \Omega \to R$ fonksiyonu rastgele değişkeni olarak adlandırılır. $I \subset R$ aralığında $X: I \times \Omega \to R$ fonksiyonu vardır. Her $t \in I$ için bu fonksiyon $X(t,.)$ bir rastgele değişkendir. $X: I \times \Omega \to R$ stokastik süreci;

(i) Her $t_0 \in I$ için; $P - \lim_{t \to t_0} X(t,.) = X(t_0,.)$, I aralığı içinde sürekli olasılıklıdır. Burada $P -$lim, limit olasılığını belirtir.

(ii) Her $t_0 \in I$ için; $P - \lim_{t \to t_0} E[X(t,.) - X(t_0,.)] = 0$, I aralığı içinde sürekli kare ortalamasıdır. Burada $E[X(t.,)]$, $X(t,.)$ rastgele değişkeninin beklenen değerini belirtir.

(iii) Her $u, v \in I$ için artan(azalansa) öyle ki $u < v$ iken aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$X(u,.) \leq X(v,.)$, $(X(u,.) \geq X(v,.))$

(iv) Eğer monotonsa artan veya azalandır.

(v) Eğer $X'(t,.): \Omega \to R$ rastgele değişkeni $t \in I$ noktasında

$$X'(t,.) = P - \lim_{t \to t_0} \frac{X(t,.) - X(t_0,.)}{t - t_0}$$

türevlenebilirse I aralığında her sürekli noktada $X: I \times \Omega \to R$ stokastik süreci sürekli türevlenebilirdir (Kotrys 2013, Nikodem 1980, Skowronski 1992).

Tanım 2.1.2: (Ω, A, P) olasılık uzayı $I \subset R$ aralığında olsun. $X: I \times \Omega \rightarrow R$ stokastik süreci için şunlar söylenebilir (Skowronski *et al.* 1992, 1995).

(i) Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için konveks ise;

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .)$$

(ii) Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için λ-konveks ise; (λ, (0,1) aralığında sabit sayı)

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) \leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .)$$

(iii) Her $u, v \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Wright-konveks ise;

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) + X\big((1-\lambda)u + \lambda v, .\big) \leq X(u, .) + X(v, .)$$

(iv) Jensen-konveks ise;

$$X\left(\frac{u+v}{2}, .\right) \leq \frac{X(u, .) + X(v, .)}{2}$$

Şimdi Hermite-Hadamard tipi bazı eşitsizlikler ve birinci anlamda s-konveks fonksiyonların temel özelliklerini vereceğiz (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

Teorem 2.1.1: $f \in {K_s}^1$ olsun. $\forall u, v \in I$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^s + \beta^s \leq 1$ için ancak ve ancak $f(0, .) \leq 0$ olduğunda; $f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$ eşitsizliği sağlanır (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

İspat: *u*=*v*=*0* ve $\alpha = \beta = 0$ olarak alınırsa gereklilik açıkça sağlanır. Bunun için $R_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $u, v \in R_+, \alpha, \beta \geq 0$ ve $0 < \gamma = \alpha^s + \beta^s < 1$ olduğunu varsayalım. a=$\alpha\gamma^{-1/s}$ ve b=$\beta\gamma^{-1/s}$ koyalım. O zaman $\mathrm{a}^s + \mathrm{b}^s = \frac{\alpha^s}{\gamma} + \frac{\beta^s}{\gamma} = 1$ olur ve

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\mathrm{a}\gamma^{1/s}u + \mathrm{b}\gamma^{1/s}v) \\ &\leq \mathrm{a}^s f\big(\gamma^{1/s}u\big) + \mathrm{b}^s f(\gamma^{1/s}v) \\ &= \mathrm{a}^s f\big[\gamma^{1/s}u + (1-\gamma)^{1/s}0\big] + \mathrm{b}^s f[\gamma^{1/s}v + (1-\gamma)^{1/s}0] \\ &= \mathrm{a}^s \gamma f(u) + \mathrm{b}^s \gamma f(v) + (1-\gamma)f(0) \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)\,. \end{aligned}$$

Teorem 2.1.2: $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $K \in {K_{s_2}}^1$ ve $f(0) \leq 0$ ise o zaman $f \in {K_{s_1}}^1$ dir (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

İspat: Varsayalım ki $f \in K_{s_2}{}^1$ve $u, v \geq 0$ $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ olsun. O zaman $\alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ olur. Teorem 2.1.1 e göre;

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^{s_2} f(u) + \beta^{s_2} f(v) \leq \alpha^{s_1} f(u) + \beta^{s_1} f(v)$$

olur. Bu da $f \in K_{s_1}{}^1$ demektir.

Teorem 2.1.3: $f: I \to R$, $s \in (0,1)$ ile birinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Eğer $a < b$ ile $a, b \in I$ ise o zaman;

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

eşitsizliği vardır (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

İspat: Eğer birinci anlamda s-konveks tanımının içinde $\alpha = \frac{1}{2^{1/s}}$, $\beta = \frac{1}{2^{1/s}}$ seçersek $\alpha^s + \beta^s = 1$ olup $\forall x, y \in [0, \infty)$ için;

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{2^{1/s}} + \frac{y}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y)$$

$$f\left(\frac{x+y}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \ .$$

Bu eşitlikte $t \in [0,1]$ için $x = ta + (1-t)b$, $y = (1-t)a + tb$ alınırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{2} [f(\, ta + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\,\big)]$$

elde edilir. *f*, [a,b] üzerinde integrallenebilirdir. Eşitsizlik üzerinden *t* ye göre [0,1] üzerinde integral alırsak;

$$\int_0^1 f(\, ta + (1-t)b) dt = \int_0^1 f\big((1-t)a + tb\,\big) dt$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.4: $s \in (0,1)$ ile $f: I \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için $\psi(t) = \frac{1}{2}[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}]$ olarak alınırsa;

$$\int_0^1 f(ta + (1-t^s)^{1/s} b) \psi(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

olarak elde edilir (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

İspat: $t \in [0,1]$ ve $\alpha = t, \beta = (1-t^s)^{1/s}$ seçersek, birinci anlamda s-konveks tanımından $\alpha^s + \beta^s = 1$ olduğundan

$$f(ta + (1-t^s)^{1/s}b) \le t^s f(a) + (1-t^s)f(b)$$

olur. Benzer şekilde

$$f((1-t^s)^{1/s}a + tb) \le (1-t^s)f(a) + t^s f(b)$$

elde edilebilir. Yukarıdaki iki eşitsizlik eklenirse;

$$\frac{1}{2}\left[f(ta + (1-t^s)^{1/s}b) + f((1-t^s)^{1/s}a + tb)\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği [0,1] üzerinde *t* ye göre integre edersek

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta + (1-t^s)^{1/s}b)dt + \int_0^1 f((1-t^s)^{1/s}a + tb)dt\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad (2.1.1)$$

olur. İfadeyi göstermek için $u = (1-t^s)^{1/s}$ olsun. O zaman $t = (1-u^s)^{1/s}$ ve $dt = -(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du$ olur ve $u \in [0,1]$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\int_0^1 f((1-t^s)^{1/s}a + tb)dt = -\int_1^0 f(ua + (1-u^s)^{1/s}b)(1-u^s)^{\frac{1}{s}-1}u^{s-1}du$$

$$= \int_0^1 f(ta + (1-t^s)^{1/s}b)(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}dt \ .$$

(2.1.1) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 f(ta + (1-t^s)^{1/s}b)\left[\frac{1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}}{2}\right]dt \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

olur ve teorem ispatlanır.

Teorem 2.1.5: $s \in (0,1)$ ile $f: I \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. $t \in [0,1]$ olduğunda $\psi(t) = \frac{1}{2}[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}]$ olarak alınırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) \le \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right)[t + (1-t^s)^{1/s}]dt$$

$$\le \int_0^1 f(ta + (1-t^s)^{1/s}b)\psi(t)dt$$

eşitsizliği sağlanır (Musielak 1983).

İspat: $\frac{1}{s} > 1$ olduğunda $g: [0, \infty) \to R$ için $g(x) = x^{1/s}$ tanımlaması yapılırsa konvekslik özelliğinden;

$$\frac{(t^s)^{1/s} + (1 - t^s)^{1/s}}{2} \geq \left(\frac{t^s + 1 - t^s}{2}\right)^{1/s} = \frac{1}{2^{1/s}}$$

olur ve o zaman

$$\frac{a+b}{2^{1/s}} \cdot \frac{t + (1 - t^s)^{1/s}}{2} \geq \frac{a+b}{2^{1/s}} \cdot \frac{1}{2^{1/s}}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{a+b}{2^{1/s}} [t + (1 - t^s)^{1/s}] \geq \frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}$$

elde edilir. $f, (0, \infty)$ üzerinde monoton azalmayan olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için;

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}} [t + (1 - t^s)^{1/s}]\right) \geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right)$$

alabiliriz. Bu eşitsizliği [0,1] üzerinde integre edersek teoremin 1. eşitsizliğini elde ederiz.

f; birinci anlamda s-konveks olduğundan $\forall x, y \in [0, \infty)$ için $f\left(\frac{x+y}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ olduğunu biliyoruz. $x = ta + (1 - t^s)^{1/s} b$, $y = (1 - t^s)^{1/s} a + tb$ alınırsa bu eşitsizlik

$$\frac{1}{2}\left[f(ta + (1 - t^s)^{1/s} b) + f((1 - t^s)^{1/s} a + tb)\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}} [t + (1 - t^s)^{1/s}]\right)$$

Bu eşitsizliği [0,1] üzerinde t etrafında integre edip önceki teoremde kullanılan değişken değiştirmesini yaparsak istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 2.1.6: $s \in (0,1)$ ile $f: I \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks fonksiyon olsun. Aşağıdaki eşitsizlik vardır (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}} [t^{1/s} + (1 - t^s)^{1/s}]\right) dt \\ &\leq \int_0^1 f(t^{1/s} a + (1 - t^s)^{1/s} b) dt \\ &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Tanım 2.1.3: $0 < s \leq 1$ olsun. $X: I \times \Omega \to R$ fonksiyonu birinci anlamda stokastik süreçlerde *s*-konveks fonksiyonu ise $\forall u, v \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu *s*-konveks fonksiyon sınıfı genellikle ${C_s}^1$ olarak bilinir (Maden *et al.* 2014).

Uyarı 2.1.1: Birinci anlamda stokastik süreçlerde *s*-konveksliği s=1 için alırsak tanım 2.1.2 deki normal konvekslik kolayca elde edilir (Maden *et al.* 2014).

Uyarı 2.1.2: Birinci anlamda stokastik süreçlerde *s*-konveksliği $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ için alırsak tanım 2.1.2 deki normal konvekslik kolayca elde edilir (Maden *et al.* 2014).

Teorem 2.1.7: $X \in {C_s}^1$ olsun. $\forall u, v \in I$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta \leq 1$ için ancak ve ancak $X(0, .) \leq 0$ olduğunda; $f(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s f(u, .) + \beta^s f(v, .)$ eşitsizliği sağlanır (Maden *et al.* 2014).

İspat: *u=v=0* ve $\alpha = \beta = 0$ olarak alınırsa gereklilik açıkça sağlanır. Bunun için $u, v \in I$, $\alpha, \beta \geq 0$ ve $0 < \gamma = \alpha^s + \beta^s < 1$ olduğunu varsayalım. a=$\alpha\gamma^{-1/s}$ ve b=$\beta\gamma^{-1/s}$ koyalım. O zaman $\mathrm{a}^s + \mathrm{b}^s = \frac{\alpha^s}{\gamma} + \frac{\beta^s}{\gamma} = 1$ olur ve

$$\begin{aligned}
X(\alpha u + \beta v, .) &= X(\mathrm{a}\gamma^{1/s} u + \mathrm{b}\gamma^{1/s} v, .) \\
&\leq \mathrm{a}^s\, X\left(\gamma^{1/s} u, .\right) + \mathrm{b}^s X(\gamma^{1/s} v, .) \\
&= \mathrm{a}^s\, X\left[\gamma^{1/s} u + (1-\gamma)^{1/s} 0, .\right] + \mathrm{b}^s X[\gamma^{1/s} v + (1-\gamma)^{1/s} 0, .] \\
&= \mathrm{a}^s \gamma X(u, .) + \mathrm{b}^s \gamma X(v, .) + (1-\gamma) X(0, .) \\
&= \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .)\,.
\end{aligned}$$

Teorem 2.1.8: $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer $X \in {C_{s_2}}^1$ ve $X(0) \leq 0$ ise o zaman $X \in {C_{s_1}}^1$ dir (Maden *et al.* 2014).

İspat: Varsayalım ki $X \in {C_{s_2}}^1$ve $u, v \in I, \alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ olsun. O zaman $0 < \alpha^{s_2} + \beta^{s_2} \leq \alpha^{s_1} + \beta^{s_1} = 1$ olur. Teorem 2.1.7 ye göre;

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^{s_2} X(u, .) + \beta^{s_2} X(v, .) \leq \alpha^{s_1} X(u, .) + \beta^{s_1} X(v, .)$$

olur. Bu da $X \in {C_{s_1}}^1$ demektir.

Önerme 2.1.1: $X: I \times \Omega \rightarrow R$ integrallenebilir bir stokastik süreç olsun. O zaman;

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v,.)dt = \int_0^1 X\big((1-t)u+tv,.\big)dt$$

eşitsizliği vardır (Maden *et al.* 2014).

İspat: $t \in [0,1]$için $t^* = tu+(1-t)v$ alalım. $dt^* = (u-v)dt$ olur ve değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v,.)dt = \frac{1}{u-v}\int_v^u X(t^*,.)dt^* = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t^*,.)dt^*$$

olur. Benzer şekilde $t \in [0,1]$için $k^* = (1-t)u+tv$ alalım. $dk^* = (v-u)dt$ olur ve değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 X\big((1-t)u+tv,.\big)dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(k^*,.)dk^*$$

yazılır ve böylece eşitlik ispat edilir.

Teorem 2.1.9: $X: I \times \Omega \rightarrow R$, $s \in (0,1)$ ile birinci anlamda stokastik süreçte *s*-konveks fonksiyon olsun. Eğer $u < v$ ile $u, v \in I$ ise o zaman;

$$X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt$$

eşitsizliği vardır (Maden *et al.* 2014).

İspat: Eğer birinci anlamda stokastik süreçte *s*-konveks tanımının içinde $\alpha = \frac{1}{2^{1/s}}$ $\beta = \frac{1}{2^{1/s}}$ seçersek $\alpha^s + \beta^s = 1$ olup $\forall a, b \in I$ için;

$$X\left(\frac{a+b}{2^{1/s}},.\right) \leq \frac{X(a,.)+X(b,.)}{2}.$$

olur. Bu eşitlikte $t \in [0,1]$ için $a = tu+(1-t)v$, $b = (1-t)u+tv$ alınırsa;

$$X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}},.\right) \leq \frac{X(\,tu+(1-t)v,.)+X\big((1-t)u+tv,.\big)}{2}$$

elde edilir. X, $(0,1)$ üzerinde integrallenebilirdir. Eşitsizlik üzerinden *t* ye göre integral alırsak;

$$\int_0^1 X(\,tu+(1-t)v,.)dt = \int_0^1 X\big((1-t)u+tv,.\big)$$

$$= \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)\,dt$$

olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 2.1.10: $s \in (0,1)$ ile $X: I \times \Omega \to R$ fonksiyonu birinci anlamda stokastik süreçte s-konveks fonksiyon olsun. O zaman $t \in [0,1]$ için

$\psi(t) = \frac{1}{2}[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}]$ olarak alınırsa;

$$\int_0^1 X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .)\psi(t)dt \leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2}$$

eşitsizliği vardır (Maden *et al.* 2014).

İspat: $t \in [0,1]$ ve $\alpha = t, \beta = (1-t^s)^{1/s}$ seçersek, birinci anlamda s-konveks stokastik süreci tanımından $\alpha^s + \beta^s = 1$ olduğundan

$$X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .) \leq t^s X(u,.) + (1-t^s) X(v,.)$$

olur. Benzer şekilde

$$X((1-t^s)^{1/s} u + tv, .) \leq (1-t^s) X(u,.) + t^s X(v,.)$$

elde edilebilir. Yukarıdaki iki eşitsizlik eklenirse;

$$\frac{1}{2}\left[X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .) + X((1-t^s)^{1/s} u + tv, .)\right] \leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2}$$

elde edilir. Bu eşitsizliği $[0,1]$ üzerinde t ye göre integre edersek

$$\frac{1}{2}\left[\int_0^1 X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .)dt + \int_0^1 X((1-t^s)^{1/s} u + tv, .)dt\right] \leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2} \quad (2.1.2)$$

İfadeyi göstermek için $k = (1-t^s)^{1/s}$ olsun. O zaman $t = (1-k^s)^{1/s}$ ve

$dt = -(1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk$ olur ve $k \in (0,1]$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned}\int_0^1 X((1-t^s)^{1/s} u + tv, .)dt &= -\int_1^0 X(ku + (1-k^s)^{1/s} v, .)(1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk \\ &= \int_0^1 X(ku + (1-k^s)^{1/s} v, .)(1-k^s)^{\frac{1}{s}-1} k^{s-1} dk \\ &= \int_0^1 X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .)(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1} dt\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.2) eşitsizliği kullanılarak

$$\int_0^1 X(tu + (1-t^s)^{1/s} v, .)\left[\frac{1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}}{2}\right] dt \leq \frac{X(u,.) + X(v,.)}{2}$$

olur ve teorem ispatlanır.

Teorem 2.1.11: $s \in (0,1)$ ile $X: I \times \Omega \to R$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks stokastik süreci olsun. $t \in [0,1]$ olduğunda aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$\psi(t) = \frac{1}{2}[1 + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}]$ olarak alınırsa;

$$X\left(\frac{u+v}{2^{2/s}},.\right) \le \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}},.\right)[t + (1-t^s)^{1/s}]dt$$
$$\le \int_0^1 X(tu + (1-t^s)^{1/s}v)\psi(t)dt$$

olur (Maden *et al.* 2014).

İspat: $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s}} > 1$ olduğunda $g: I \to R$ konveks fonksiyonu için $g(t) = t^{1/s}$ denilirse;

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{t^s + (1-t^s)}{2}\right) \le \frac{g(t^s) + g(1-t^s)}{2}$$
$$\frac{1}{2^{1/s}} \le \frac{t + (1-t^s)^{1/s}}{2}$$

olur ve o zaman

$$\frac{u+v}{2^{1/s}} \cdot \frac{1}{2^{1/s}} \le \frac{t + (1-t^s)^{1/s}}{2} \cdot \frac{u+v}{2^{1/s}}$$

bulunur. Buradan

$$\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}} \le \frac{u+v}{2^{1/s}}[t + (1-t^s)^{1/s}]$$

elde edilir. X, I üzerinde monoton azalmayan olduğundan $\forall t \in [0,1]$ için;

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},.\right) \le X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}}\left[t + (1-t^s)^{1/s}\right],.\right)$$

alabiliriz. Bu eşitsizliği [0,1] üzerinde *t* ye göre integre edersek teoremin 1.eşitsizliğini elde ederiz.

f; birinci anlamda stokastik süreçte *s*-konveks olduğundan $\forall a, b \in I$ için

$$X\left(\frac{a+b}{2^{1/s}},.\right) \le \frac{X(a,.) + X(b,.)}{2}$$

olduğunu biliyoruz. $a = tu + (1-t^s)^{1/s}v$, $b = (1-t^s)^{1/s}u + tv$ alınırsa bu eşitsizlik

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t + (1-t^s)^{1/s}\right],.\right) \le \frac{1}{2}\left[X(tu + (1-t^s)^{1/s}v,.) + X((1-t^s)^{1/s}u + tv,.)\right].$$

yazılır. Bu eşitsizliği [0,1] üzerinde *t* ye göre integre edip önceki teoremde kullanılan değişken değiştirmesini yaparsak istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 2.1.12: $s \in (0,1)$ ile $X: I \times \Omega \to R$ fonksiyonu birinci anlamda stokastik süreçte *s*-konveks fonksiyonu olsun. Aşağıdaki eşitsizlik vardır (Maden *et al.* 2014).

$$X\left(\frac{u+v}{2^{\frac{2}{s}-1}},.\right) \leq \int_0^1 X\left(\frac{u+v}{2^{1/s}},.\right)[t^{1/s}+(1-t^s)^{1/s}]\,dt$$
$$\leq \int_0^1 X(t^{1/s}u+(1-t^s)^{1/s}v,.)dt$$
$$\leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{2}.$$

2.2 İkinci Anlamda *s*-Konveks İçin Stokastik Süreçlerde Hermite-Hadamard Tipi Eşitsizlikler

Tanım 2.2.1: (Ω, A, P) olasılık uzayı $I \subset R$ aralığında olsun. $X: I \times \Omega \to R$ stokastik süreci için şunlar söylenebilir.

(i) Her $s, t \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için konveks ise;

$$X(\lambda s+(1-\lambda)t,.) \leq \lambda X(s,.)+(1-\lambda)X(t,.)$$

Bu stokastik süreç sınıfının tanımı C'dir.

(ii) Her $s, t \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Wright-konveks ise;

$$X(\lambda s+(1-\lambda)t,.)+X\big((1-\lambda)s+\lambda t,.\big) \leq X(s,.)+X(t,.)$$

Bu stokastik süreç sınıfının tanımı ω'dır.

(iii) Jensen-konveks ise;

$$X\left(\frac{s+t}{2},.\right) \leq \frac{X(s,.)+X(t,.)}{2}$$

Bu stokastik süreç sınıfının tanımı $C_{1/2}$ 'dir (Skowronski *et al.* 1992,1995, Kotrys 2012).

Şimdi Hermite-Hadamard tipi bazı eşitsizlikler ve ikinci anlamda *s*-konveks fonksiyonların temel özelliklerini vereceğiz (Dragomir and Fitzpatrick 1998).

Önerme 2.2.1: Eğer $f \in {K_s}^2$ ise o zaman $f, [0,\infty)$ üzerinde negatif değildir (Hudzik and Maligranda 1994).

Teorem 2.2.1: $f \in {K_s}^2$ olsun. $R_+ = [0,\infty)$ olmak üzere $\forall\, u, v \in R_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha+\beta \leq 1$ için ancak ve ancak $f(0)=0$ için $f(\alpha u+\beta v) \leq \alpha^s f(u)+\beta^s f(v)$ eşitsizliği sağlanır (Hudzik and Maligranda 1994).

İspat: $\Rightarrow$ $u = v = \alpha = \beta = 0$ alınırsa $f(0) \leq 0$ elde edilir ve önermeden dolayı $f(0) \geq 0$ olur. Böylece $f(0) = 0$ eşitliği sağlanır.

$\Leftarrow$ $u, v \in R_+$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $0 < \gamma = \alpha + \beta < 1$ olsun. $\mathrm{a} = \frac{\alpha}{\gamma}$ ve $\mathrm{b} = \frac{\alpha}{\gamma}$ koyalım. O zaman $\mathrm{a} + \mathrm{b} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = 1$ ve buradan

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\mathrm{a}\gamma u + \mathrm{b}\gamma v) \\ &\leq \mathrm{a}^s f(\gamma u) + \mathrm{b}^s f(\gamma v) \\ &= \mathrm{a}^s f[\gamma u + (1-\gamma)0] + \mathrm{b}^s f[\gamma v + (1-\gamma)0] \\ &\leq \mathrm{a}^s[\gamma^s f(u) + (1-\gamma)^s f(0)] + \mathrm{b}^s[\gamma^s f(v) + (1-\gamma)^s f(0)] \\ &= \alpha^s \gamma^s f(u) + \mathrm{b}^s \gamma^s f(v) + (1-\gamma)^s f(0) \\ &= \alpha^s f(u) + \beta^s f(v). \end{aligned}$$

Teorem 2.2.2: Farzedelim ki $f: R^+ \to R^+$ ikinci anlamda *s*-konveks fonksiyonu, $s \in (0,1)$ ve $a, b \in R^+$ ile $a < b$ olsun. Eğer $f \in L_1[a, b]$ ise;

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği vardır (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

İspat: f ikinci anlamda *s*-konveks ise $\forall\ t \in [0,1]$ için

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitsizlik [0,1] üzerinde integre edilirse

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) \leq f(a) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s dt = \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

$x = (ta + (1-t)b)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) &= \frac{1}{a-b} \int_b^a f(x)dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \qquad (2.2.1) \end{aligned}$$

Eşitsizliğin ilk kısmını ispatlamak için (2.2.1) içinde $\forall x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2^s} \qquad (2.2.2)$$

Şimdi $x = (ta + (1-t)b)$ ile $y = ((1-t)a + tb)$ alalım. O zaman (2.2.2) den

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)}{2^s}$$

elde edilir. Eşitsizliğin [0,1] üzerinde integrali alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 2.2.3: Varsayalım ki f, $[a,b]$ üzerinde Lebesque integrali ve $H:[0,1]\to R$ için

$$H(t)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)dx$$

olduğunu düşünelim. $f: I\subseteq R_+\to R$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu, $s\in(0,1]$ ve $[a,b]\subseteq I$, $a<b$ üzerinde Lebesque integrali vardır. O zaman;

(i) H, $[0,1]$ üzerinde ikinci anlamda s-konvekstir.

(ii) $\forall\ t\in[0,1]$ için;

$$H(t)\geq 2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliği vardır.

(iii) $t\in(0,1]$ olduğunda

$$H_1(t)=t^s\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx+(1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2},.\right)$$

$$H_2(t)=\frac{X\left(tx+(1-t)\frac{a+b}{2},.\right)+X\left(tb+(1-t)\frac{a+b}{2},.\right)}{s+1}$$

için; $t\in[0,1]$, $H(t)\leq\min\{H_1(t),H_2(t)\}$ eşitsizliği vardır.

(iv) $t\in[0,1]$ için eğer $\widehat{H}(t,.)=\max\{H_1(t),H_2(t)\}$ ise

$$\widehat{H}(t)\leq t^s\frac{f(a)+f(b)}{s+1}+(1-t)^s\frac{2}{s+1}f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olarak hesaplanır (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

İspat: (i) $t_1,t_2\in[0,1]$ ve $\alpha,\beta\geq 0$ ile $\alpha+\beta=1$ olsun. Aşağıdaki ifade vardır.

$$\begin{aligned}H(\alpha t_1+\beta t_2)&=\frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\int_a^b f\left((\alpha t_1+\beta t_2)x+[1-(\alpha t_1+\beta t_2)]\frac{a+b}{2}\right)dx\\&=\frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\int_a^b f\left(\alpha\left[t_1x+(1-t_1)\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right]+\beta\left[t_2x+(1-t_2)\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right]\right)dx\\&\leq\frac{1}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}\int_a^b\left[\alpha^s f\left(t_1x+(1-t_1)\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right)+\beta^s f\left(t_2x+(1-t_2)\frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}\right)\right]dx\\&=\alpha^sH(t_1)+\beta^sH(t_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da bize H' nin ikinci anlamda s-konveks olduğunu gösterir.

(ii) $t\in(0,1]$ için $u=tx+(1-t)\frac{a+b}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$H(t)=\frac{1}{t(b-a)}\int_{ta+(1-t)\frac{a+b}{2}}^{tb+(1-t)\frac{a+b}{2}}f(u)du$$

$p = tb + (1-t)\frac{a+b}{2}$ ve $q = ta + (1-t)\frac{a+b}{2}$ için

$$H(t) = \frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du$$

olur. Birinci kısma Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa;

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \geq 2^{s-1} f\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir.

(iii) İkinci kısma Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa $\forall t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned}\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du &\leq \frac{f(p)+f(q)}{s+1} \\ &= \frac{f\left(ta + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) + f\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)}{s+1} \\ &= H_2(t)\end{aligned}$$

Eğer $t = 0$ yazılırsa;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = H(0) \leq H_2(0) = \frac{2}{s+1}\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

ile $\forall s \in (0,1)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq 0$ için $(s-1)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 0$ eşdeğer olduğu doğrudur.

Diğer taraftan $\forall\ t \in [0,1]$ ve $x \in [a,b]$ için;

$$f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğu açıktır. Bu eşitsizliğin [a,b] üzerinde integrali alınırsa $H_1(t)$ için

$$H_1(t) = t^s \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(iv) $\forall\ t \in [0,1]$ için;

$$\begin{aligned}H_2(t) &\leq \frac{t^s f(a) + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right) + t^s f(b) + (1-t)^s f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{s+1} \\ &= t^s \frac{f(a)+f(b)}{s+1} + (1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1}\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

Diğer taraftan biliyoruz ki;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

ve

$$(1-t)^s . f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq (1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olduğundan;

$$H_1(t) \leq t^s \frac{f(a)+f(b)}{s+1} + (1-t)^s \cdot \frac{2}{s+1} \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılırsa teorem ispatlanır.

Teorem 2.2.4: Varsayalım ki $f: [a,b] \to R$, $[a,b]$ üzerinde Lebesque integrali olsun.

$$F(t) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y) dx\, dy$$

$t \in [0,1]$ için olduğunu düşünelim. $f: I \subseteq R_+ \to R$ ikinci anlamda s-konveks fonksiyonu, $s \in (0,1]$ ve $a, b \in I$ ile $[a,b]$ üzerinde, $a < b$ olsun.

(i) Her $s \in [0, 1/2]$ için $F\left(s + \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2} - s\right)$

ve her $t \in [0,1]$ için $F(t) = F(1-t)$ dir.

(ii) F, [0,1] üzerinde ikinci anlamda *s*-konvekstir.

(iii) Her $t \in [0,1]$ için;

$$2^{1-s} F(t) \geq F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$$

eşitsizliği vardır.

(iv) Her $t \in [0,1]$ için;

$$F(t) \geq 2^{s-1} H(t) \geq 4^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitsizliği vardır.

(v) Her $t \in [0,1]$ için;

$$F(t) \leq min \left\{ \begin{array}{c} [t^s + (1-t)^s] \dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x) dx \\ \dfrac{f(a) + f(ta + (1-t)b) + f\big((1-t)a + tb\big) + f(b)}{(s+1)^2} \end{array} \right\}$$

eşitsizliği vardır (Hudzik and Maligranda 1994).

İspat:

(i) İntegral özellikleri sebebiyle her $t \in [0,1]$ için $F(t) = F(1-t)$ dir. Bu sebepten dolayı her $s \in [0, 1/2]$ için $F\left(s + \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2} - s\right)$ dir.

(ii) Teorem 2.2.3'te açıkça gösterilmiştir.

(iii) Her $t \in [0,1]$ ve $x, y \in [a,b]$ için f, I üzerinde ikinci anlamda s-konveks olduğundan;

$$\frac{f(tx+(1-t)y)+f((1-t)x+ty)}{2^s} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

elde edilir. $[a,b]^2$ üzerinde bu eşitsizliği integre edersek

$$\frac{1}{2^s}\left[\int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy + \int_a^b \int_a^b f\big((1-t)x+ty\big)dxdy\right]$$

$$\geq \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dxdy$$

$\int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy = \int_a^b \int_a^b f\big((1-t)x+ty\big)dxdy$ ve

$\int_0^1 F(t)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$\frac{1}{2^{s-1}}\left(\int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)dxdy\right) \geq \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy$$

$$2^{1-s}F(x) \geq F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dxdy$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) İlk olarak; $F(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)dx\right]dy$ eşitliğini inceleyelim. $[a,b]$ içinde y sabiti için $H_y\colon [0,1] \to R$ eşlemesi tarafından verilen

$$H_y(t) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(tx+(1-t)y)dx$$

eşliğini düşünelim. Teorem 2.2.3 içinde gösterildiği gibi $t \in [0,1]$ için $p = tb + (1-t)y$, $q = ta + (1-t)y$ olduğunda;

$$H_y(t) = \frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du$$

eşitliği vardır. Burada $\forall t \in (0,1)$ve $y \in [a,b]$ için Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa;

$$\frac{1}{p-q}\int_q^p f(u)du \geq 2^{s-1}f\left(\frac{p+q}{2}\right) = 2^{s-1}f\left(t \cdot \frac{a+b}{2} + (1-t)y\right)$$

elde ederiz. [a,b] üzerinde y ye göre integre edilirse;

$F(t) \geq 2^{s-1}H(1-t)$ olduğu görülür. $F(t) = F(1-t)$ olup teorem 2.2.3 de (ii) den dolayı ispat tamamlanır.

$$H(t) \geq 2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$F(t) \geq 2^{s-1} H(t) \geq 4^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(v) İkinci anlamda *s*-konvekslik tanımı gereği $\forall\ x, y \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için;

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

olur. Bu eşitsizlik $[a, b]^2$ üzerinde integre edilirse eşitsizliğin ilk kısmı anlaşılır. İkinci kısımda $p = tb + (1-t)y$, $q = ta + (1-t)y$ için Hermite-Hadamard eşitsizliği uygulanırsa;

$$H_y(t) = \frac{1}{p-q} \int_q^p f(u) du \leq \frac{f(tb + (1-t)y\,) + \mathrm{f}(ta + (1-t)y)}{s+1}\ .$$

Bu eşitsizlik [a,b] üzerinde *y* etrafında integre edilirse;

$$F(t) \leq \frac{1}{s+1}\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb+(1-t)y\,)\mathrm{dy} + \frac{1}{b-a}\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(ta+(1-t)y)dy\right]$$

olup $r = b$, $l = tb + (1-t)a$ olduğunda basit bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(tb+(1-t)y\,)\mathrm{dy} &= \frac{1}{\mathrm{r}-l}\int_l^{\mathrm{r}} \mathrm{f(u)du} \\ &\leq \frac{f(r)+f(l)}{s+1} \\ &= \frac{f(b)+f(tb+(1-t)a)}{s+1} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathrm{f}(ta+(1-t)y)dy \leq \frac{f(a)+f(ta+(1-t)b)}{s+1}$$

eklenmesiyle teorem içindeki ikinci eşitsizlik elde edilir.

Tanım 2.2.2: Her $u, v \geq 0$ ve $s \in (0,1]$ olsun. $I \subset R$ aralığında $X: I \times \Omega \to R$ ifadesi ikinci anlamda stokastik süreçte *s*-konveks fonksiyonuysa;

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v,.) \leq \lambda^s X(u,.) + (1-\lambda)^s X(v,.)$$

eşitsizliği vardır. Bu *s*-konveks fonksiyon sınıfı genellikle ${C_s}^2$ olarak bilinir (Maden *et al*. 2014).

Uyarı 2.2.1: İkinci anlamda stokastik süreçlerde *s*-konveksliği s=1 için alırsak normal konvekslik kolayca elde edilir (Maden *et al*. 2014).

Önerme 2.2.2: Her $\lambda \in [0,1]$ için $C \subset {C_s}^2$ dir (Maden *et al.* 2014).

İspat: Önermeyi kanıtlamak için $X \in C,\ u, v \in I$ keyfi noktaları ve $s \in (0,1]$ alalım. X stokastik süreçlerde konveks ve $\lambda \leq \lambda^s$ olduğundan;

$$\begin{aligned} X(\lambda u + (1-\lambda)v, .) &\leq \lambda X(u, .) + (1-\lambda)X(v, .) \\ &\leq \lambda^s X(u, .) + (1-\lambda)^s X(v, .) \end{aligned}$$

olur. O zaman $X \in {C_s}^2$ dir.

Önerme 2.2.3: Her $\lambda \in (0,1)$ için $C_{1/2} \subset {C_s}^2$ dir (Maden *et al.* 2014).

İspat: Önermeyi kanıtlamak için $X \in C_{1/2},\ u, v \in I$ keyfi noktaları ve $s \in (0,1]$ alalım. X stokastik süreçlerde Jensen-konveks ve $\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^s$ olduğundan;

$$X\left(\frac{u+v}{2}, .\right) \leq \frac{X(u, .) + X(v, .)}{2} \leq \frac{X(u, .) + X(v, .)}{2^s}$$

olur. O zaman $X \in {C_s}^2$ dir.

Önerme 2.2.4: Eğer $X \in {C_s}^2$ ise o zaman X, I üzerinde negatif değildir (Maden *et al.* 2014).

İspat: $u \in I$, $s \in (0,1]$ için

$$X(u, .) = X\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u, .\right) \leq \frac{X(u, .)}{2^s} + \frac{X(u, .)}{2^s} = (2^{1-s})X(u, .)$$

dir. Böylece $(2^{1-s})X(u, .) \geq 0$ olduğundan $X(u, .) \geq 0$ olur.

Teorem 2.2.5: $X \in {C_s}^2$ olsun. $\forall\, u, v \in I$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta \leq 1$ için ancak ve ancak $X(0) = 0$ için

$$X(\alpha u + \beta v, .) \leq \alpha^s X(u, .) + \beta^s X(v, .)$$

eşitsizliği sağlanır (Maden *et al.* 2014).

Aşağıdaki eşitsizlik ikinci anlamda stokastik süreçlerde *s*-konveks için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Önerme 2.2.5: $X: I \times \Omega \to R$ stokastik süreci olsun. Bu süreç $(0,1) \times \Omega$ aralığının her noktası üzerinde integrallenebilirdir. O zaman aşağıdaki eşitsizlik vardır (Maden *et al.* 2014).

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v,.)dt = \int_0^1 X((1-t)u+tv,.)dt$$

İspat: $t^* = tu+(1-t)v, \quad t \in [0,1]$ için $dt^* = (u-v)dt$ şeklinde değişken değiştirmesi yaparsak

$$\int_0^1 X(tu+(1-t)v,.)dt = \frac{1}{u-v}\int_v^u X(t^*,.)dt^*$$

$$= \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t^*,.)dt^*$$

bulunur. Benzer şekilde $k^* = ((1-t)u+tv,.)$, $t \in [0,1]$ olsun. O zaman $dk^* = (v-u)dt$ olup

$$\int_0^1 X\big((1-t)u+tv,.\big)dt = \frac{1}{v-u}\int_u^v X(k^*,.)dk^*$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.6: Eğer $X: I \times \Omega \to R^+$ stokastik süreci ikinci anlamda *s*-konveks, $s \in (0,1)$ ve $u, v \in I$ ise

$$2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},.\right) \leq \frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt \leq \frac{X(u,.)+X(v,.)}{s+1}$$

eşitsizliği vardır (Maden *et al.* 2014).

Teorem 2.2.7: Farzedelim ki X stokastik süreci $s \in (0,1]$ ve $H(t,.): [0,1] \times \Omega \to R_+$ için

$$H(\alpha,.) = \frac{1}{v-u}\int_u^v X\left(\alpha t+(1-\alpha)\frac{u+v}{2},.\right)dt$$

olduğunu düşünelim. $I \times \Omega$ üzerinde $X: I \times \Omega \to R_+$ stokastik süreci ikinci anlamda *s*-konveks fonksiyonudur. O zaman

(i) H; ikinci anlamda stokastik süreçte *s*-konvekstir.

(ii) $H(t,.) \geq 2^{s-1}X\left(\frac{u+v}{2},.\right)$

eşitsizliği vardır.

(iii) $t \in (0,1]$ olduğunda

$$H_1(t,.) = t^s\frac{1}{v-u}\int_u^v X(t,.)dt + (1-t)^s X\left(\frac{u+v}{2},.\right)$$

$$H_2(t,.) = \frac{X\left(\alpha u + (1-\alpha)\frac{u+v}{2},.\right) + X\left(\alpha v + (1-\alpha)\frac{u+v}{2},.\right)}{s+1}$$

için; $t \in [0,1]$, $H(t) \leq \min\{H_1(t), H_2(t)\}$ eşitsizliği vardır.

(iv) $t \in [0,1]$ için eğer $\widehat{H}(t,.) = \max\{H_1(t), H_2(t)\}$ ise o zaman

$$\widehat{H}(t) \leq t^s \frac{f(a)+f(b)}{s+1} + (1-t)^s \frac{2}{s+1} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

olarak hesaplanır (Maden *et al.* 2014).

Teorem 2.2.8: $X: I \times \Omega \to R_+$ ikinci anlamda s-konveks stokastik süreci $I \times \Omega$ üzerinde integrallenebilir olsun.

$$F(\alpha,.) = \frac{1}{(v-u)^2} \int_u^v \int_u^v X(\alpha s + (1-\alpha)t) ds\, dt$$

$t \in [0,1]$ için olduğunu düşünelim. $s \in (0,1]$, $u, v \in I$ ile $u < v$ ise

(i) Her $s \in [0, 1/2]$ için $F\left(x + \frac{1}{2},.\right) = F\left(\frac{1}{2} - x,.\right)$

ve her $\alpha \in [0,1]$ için $F(\alpha,.) = F(1-\alpha,.)$ dir.

(ii) F, $[0,1] \times \Omega$ üzerinde ikinci anlamda stokastik süreci s-konvekstir.

(iii) Her $\alpha \in [0,1]$ için;

$$2^{1-s} F(\alpha,.) \geq F\left(\frac{1}{2},.\right) = \frac{1}{(v-u)^2} \int_u^v \int_u^v X\left(\frac{s+t}{2},.\right) dsdt$$

eşitsizliği vardır.

(iv) Her $\alpha \in [0,1]$ için;

$$F(\alpha,.) \geq 2^{s-1} H(\alpha,.) \geq 4^{s-1} X\left(\frac{u+v}{2},.\right)$$

eşitsizliği vardır.

(v) Her $\alpha \in [0,1]$ için;

$$F(\alpha,.) \leq min \left\{ \begin{array}{c} [\alpha^s + (1-\alpha)^s] \dfrac{1}{v-u} \displaystyle\int_u^v X(s,.) ds \\ \dfrac{X(u,.) + X(\alpha u + (1-\alpha)v,.) + X\big((1-\alpha)u + \alpha v,.\big) + X(v,.)}{(s+1)^2} \end{array} \right\}$$

eşitsizliği vardır (Maden *et al.* 2014).

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1 φ Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1: $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ fonksiyonu $[a,b] \subseteq R$ olmak üzere, her $x,y \in [a,b]$, $t \in [0,1]$ için $f: [a,b] \to R$ fonksiyonu

$$f\big(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)\big) \le tf\big(\varphi(x)\big) + (1-t)f(\varphi(y))$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna φ $-$konveks fonksiyon denir (Youness 1998).

Önerme 3.1.1: I bir özdeşlik dönüşümü olmak üzere, konveks bir M kümesi üzerinde tanımlı her konveks f fonksiyonu bir φ $-$konveks fonksiyondur.

Örnek 3.1.1: $\alpha_i > 0$ $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ ve $I: R^2 \to R^2$ $I(x,y) = (0,y)$ olmak üzere $M \subseteq R^n$ aşağıdaki gibi verilsin.

$$M = \{(x,y) \in R^2 : (x,y) = \alpha_1(0,0) + \alpha_2(0,3) + \alpha_3(2,1)\}$$
$$\cup \{(x,y) \in R^2 : (x,y) = \alpha_1(0,0) + \alpha_2(0,-3) + \alpha_3(-2,-1)\}$$

şeklinde tanımlansın. O halde *M* kümesi φ $-$konvekstir fakat konveks değildir.

Örnek 3.1.2: $I: R \to R, I(x) = -x^2$ olmak $f: R \to R$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$f = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -x, & x \le 0 \end{cases}$$

R bir φ konveks kümedir ve R üzerinde f fonksiyonu φ $-$konveks fonksiyondur fakat konveks değildir.

Teorem 3.1.1: $f: R^+ \to R^+$ φ- konveks fonksiyon olmak üzere; $a,b \in R^+$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f \in L_1[a,b]$ ise;

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \le \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \le \frac{f(\varphi(a)) + f(\varphi(b))}{2} \qquad (3.1.1)$$

eşitsizliği vardır.

İspat: f; φ-konveks ise her $t \in [0,1]$ için

$$f\big(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)\big) \le tf\big(\varphi(a)\big) + (1-t)f(\varphi(b))$$

olduğunu biliyoruz. Eşitsizlik [0,1] üzerinde *t* ye göre integre edilirse;

$$\int_0^1 f\big(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\big)dt \le f(\varphi(a))\int_0^1 t dt + f(\varphi(b))\int_0^1 (1-t)dt$$

$$= f\big(\varphi(a)\big)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + f(\varphi(b))\left[\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{f\big(\varphi(a)\big)+f(\varphi(b))}{2}$$

elde edilir. $x = t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$x = t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ $\qquad$ $dx = \big(\varphi(a) - \varphi(b)\big)dt$

$t = 1$ için $x = \varphi(a)$ $\qquad$ $t = 0$ için $x = \varphi(b)$

$$\int_0^1 f\big(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\big)dt = \frac{1}{\varphi(a)-\varphi(b)}\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx \qquad (3.1.2)$$

İlk eşitsizliği ispatlamak için (3.1.2) içinde her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \le \frac{f\big(\varphi(x)\big)+f(\varphi(y))}{2} \qquad (3.1.3)$$

alabiliriz. Şimdi (3.1.3) eşitsizliği içinde $t \in [0,1]$ için $x = t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ ve $y = (1-t)\varphi(a) + t\varphi(b)$ alalım. O zaman;

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \le \frac{f\big(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\big)+f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))}{2}$$

olur. Eşitsizliğin [0,1] üzerinde integrali alınırsa;

$$\int_0^1 f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)dt \le \frac{1}{2}\int_0^1 f\big(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\big)+f((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b))\,dt$$

olur. Sırasıyla $t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b) = u$ için $du = \big(\varphi(a) - \varphi(b)\big)dt$

$(1-t)\varphi(a) + t\varphi(b) = u$ için $du = \big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)dt$ değişken değiştirmeleri yapılırsa;

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right)t\Big|_0^1 \le \frac{1}{2}\left(\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\frac{du}{\varphi(b)-\varphi(a)} + \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\frac{du}{\varphi(b)-\varphi(a)}\right)$$

$$f\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right) \le \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

olup teorem ispat edilir.

Tanım 3.1.2: (Ω, A, P) olasılık uzayı ve $I \subset R$ aralığında olsun. Stokastik süreçte $X: I \times \Omega \to R$ φ konveks ise her $s, t \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için;

$$X(\lambda\varphi(s)+(1-\lambda)\varphi(t),.)\leq \lambda X(\varphi(s),.)+(1-\lambda)X(\varphi(t),.)$$

vardır. Bununla birlikte eğer X stokastik süreci φ- konveks ise aşağıdaki özellikler vardır.

(i) Her $s,t\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için Wright- konveks ise;

$$X(\lambda\varphi(s)+(1-\lambda)\varphi(t),.)+X\big((1-\lambda)\varphi(s)+\lambda\varphi(t),.\big)\leq X(\varphi(s),.)+X(\varphi(t),.)$$

vardır.

(ii) Jensen- konveks ise;

$$X\left(\frac{\varphi(s)+\varphi(t)}{2},.\right)\leq \frac{X(\varphi(s),.)+X(\varphi(t),.)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.2: $X: I\times\Omega\to R$ stokastik süreci olsun. Bu süreç $(0,1)\times\Omega$ aralığının her noktası üzerinde integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik vardır.

$$\int_0^1 X(t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v),.)dt=\int_0^1 X\big((1-t)\varphi(u)+t\varphi(v),.\big)dt\,.$$

İspat: $t\in[0,1]$ için $t^*=t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v)$, $t\in[0,1]$ ile ifade edelim. O zaman $dt^*=\big(\varphi(u)-\varphi(v)\big)dt$ şeklinde değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^1 X(t\varphi(u)+(1-t)\varphi(v),.)dt=\frac{1}{\varphi(u)-\varphi(v)}\int_{\varphi(v)}^{\varphi(u)}X(t^*,.)dt^*$$

$$=\frac{1}{\varphi(v)-\varphi(u)}\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)}X(t^*,.)dt^*$$

bulunur. Benzer şekilde $k^*=((1-t)\varphi(u)+t\varphi(v),.)$ $dk^*=\big(\varphi(v)-\varphi(u)\big)dt$ değişken değiştirmesi yaparsak;

$$\int_0^1 X\big((1-t)\varphi(u)+t\varphi(v),.\big)dt=\frac{1}{\varphi(v)-\varphi(u)}\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)}X(k^*,.)dk^*$$

olur. Böylece eşitlik ispatlanır.

Teorem 3.1.3: Farzedelim ki X bir stokastik süreç olsun ve $H(t,.):[0,1]\times\Omega\to R_+$ dönüşümü

$$H(\alpha,.)=\frac{1}{\varphi(v)-\varphi(u)}\int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)}X\left(\alpha t+(1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2},.\right)dt \qquad (3.1.4)$$

biçiminde verilen stokastik süreci dikkate alalım. $X: I\times\Omega\to R_+$ stokastik süreci φ- konveks fonksiyon olmak üzere,

(i) H; stokastik süreci de φ- konvekstir.

(ii) $H(t,.) \geq X\left(\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2},.\right)$ dır.

İspat:

(i) $t_1, t_2 \in [0,1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ ile $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu durumda

$$H(\alpha x + \beta y,.) = \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X\left((\alpha x + \beta y)\varphi(t) + [1 - (\alpha x + \beta y)] \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2},.\right)$$

$$= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} X\left(\alpha\left[x\varphi(t) + (1-x)\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}\right]\right.$$

$$\left. + \beta\left[y\varphi(t) + (1-y)\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2},.\right]\right) dt$$

$$= \frac{1}{\varphi(v) - \varphi(u)} \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} \left(\alpha X\left[x\varphi(t) + (1-x)\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}\right]\right.$$

$$\left. + \beta X\left[y\varphi(t) + (1-y)\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2}\right],.\right) dt$$

$$= \alpha H(x,.) + \beta H(y,.)$$

olur. Bu da H stokastik sürecinin φ- konveks olduğunu gösterir.

(ii) Varsayalım $t \in (0,1]$ olsun. O zaman $\theta = \alpha t + (1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\varphi(p) = \alpha\varphi(v) + (1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}$ ve

$\varphi(q) = \alpha\varphi(u) + (1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}$ olduğunda;

$$H(t,.) = \frac{1}{\alpha(\varphi(v) - \varphi(u))} \int_{\alpha\varphi(u)+(1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}}^{\alpha\varphi(v)+(1-\alpha)\frac{\varphi(u)+\varphi(v)}{2}} X(\theta,.)d\theta$$

$$= \frac{1}{\varphi(p) - \varphi(q)} \int_{\varphi(q)}^{\varphi(p)} X(\theta,.)d\theta$$

yazılır. Burada φ- konveks stokastik süreci için Hermite-Hadamard eşitsizliğini sol tarafa uygularsak;

$$\frac{1}{\varphi(p) - \varphi(q)} \int_{\varphi(q)}^{\varphi(p)} X(\theta,.)d\theta \geq X\left(\frac{\varphi(p) + \varphi(q)}{2},.\right) = X\left(\frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2},.\right)$$

olup istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.1.4: $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ ortalama karelerin sürekli fonksiyonu olsun. $X: T \times \Omega \to R$ stokastik süreci φ-konveks ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$X\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2},.\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} X(x,.)dx$$

$$\leq \tfrac{1}{2}[X(\varphi(a),.)+X(\varphi(b),.)]\,. \qquad (3.1.5)$$

İspat: X stokastik süreci φ- konveks olduğundan

$$X\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2},.\right) = X\left(\frac{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)}{2}+\frac{(1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)}{2},.\right)$$

$$\leq \frac{1}{2}[X(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.)+X((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b),.)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafını $(0,1)$ aralığı boyunca integre edersek,

$$X\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2},.\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 X(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.)dt+\int_0^1 X\big((1-t)\varphi(a)+t\varphi(b),.\big)dt\right]$$

olur. Birinci integralde $x = t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$ alınırsa aynı zamanda ikinci integralde de $x = (1-t)\varphi(a)+t\varphi(b)$ alabiliriz. O halde;

$$X\left(\frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2},.\right) \leq \frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} X(x,.)dx$$

olduğu görülür. (3.1.5) deki ikinci eşitsizliği kanıtlamak amacıyla; X, φ-konveks stokastik süreci için her $t \in (0,1)$ aralığında aşağıdaki eşitsizliği ele alalım.

$$X(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.) \leq tX(\varphi(a),.)+(1-t)X(\varphi(b),.)$$

Yukarıdaki eşitsizlik üzerinde her iki tarafın $(0,1)$ üzerinde integrali alınırsa;

$$\int_0^1 X(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.)dt \leq X(\varphi(a),.)\int_0^1 tdt + X(\varphi(b),.)\int_0^1 (1-t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\,X(\varphi(a),.)+\frac{1}{2}\,X(\varphi(b),.)$$

$$= \frac{1}{2}[X(\varphi(a),.)+X(\varphi(b),.)]$$

bulunur. Bir önceki eşitsizlikten de yola çıkarak (3.1.5) in ikinci kısmı da elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5: $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ ortalama karelerin sürekli fonksiyonu olsun. $X: T \times \Omega \to R$ stokastik süreci φ-konveks ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} X(x,.)X(\varphi(a)+\varphi(b)-x,.)dx$$

$$\leq \tfrac{1}{6}[X^2(\varphi(a),.)+X^2(\varphi(b),.)]+\tfrac{2}{3}X(\varphi(a),.)X(\varphi(b),.)\,. \qquad (3.1.6)$$

İspat: Her $t \in (0,1)$ için X φ-konveks stokastik süreci olduğundan ;

$$X(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.) \le tX(\varphi(a),.) + (1-t)X(\varphi(b),.) \tag{3.1.7}$$

ve

$$X\big((1-t)\varphi(a) + t\varphi(b),.\big) \le (1-t)X(\varphi(a),.) + tX(\varphi(b),.) \tag{3.1.8}$$

sağlanır. (3.1.7) ve (3.1.8) in her iki tarafını taraf tarafa çarparsak

$$X(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.).X\big((1-t)\varphi(a) + t\varphi(b),.\big)$$
$$\le t(1-t)[X^2(\varphi(a),.) + X^2(\varphi(b),.)] + (t^2 + (1-t)^2)X(\varphi(a),.).X(\varphi(b),.)$$

elde edilir. Eşitsizliğin (0,1) etrafında t üzerinde integrali alınırsa,

$$\int_0^1 X(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.).X\big((1-t)\varphi(a) + t\varphi(b),.\big)dt$$
$$\le [X^2(\varphi(a),.) + X^2(\varphi(b),.)]\int_0^1 t(1-t)dt + X(\varphi(a),.).X(\varphi(b),.)\int_0^1 (t^2 + (1-t)^2)dt$$
$$= \frac{1}{6}\left[X^2(\varphi(a),.) + X^2(\varphi(b),.)\right] + \frac{2}{3}X(\varphi(a),.)X(\varphi(b),.)$$

elde edilir. (3.1.6) için de $x = t\,\varphi(a) + (1-t)\varphi(b)$ değişken değiştirmesi yapılarak sonuç bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6: $\varphi: [a,b] \to [a,b]$ ortalama karelerin sürekli fonksiyonu olsun. $X: T \times \Omega \to R$ stokastik süreci φ-konveks ise

$$M(a,b) = X(\varphi(a),.)Y(\varphi(a),.) + X(\varphi(b),.)Y(\varphi(b),.)$$
$$N(a,b) = X(\varphi(a),.)Y(\varphi(b),.) + X(\varphi(b),.)Y(\varphi(a),.)$$

olduğunda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\frac{1}{\varphi(b)-\varphi(a)}\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} X(x,.)Y(x,.)dx \le \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b) \tag{3.1.9}$$

İspat: X, Y φ-konveks stokastik süreci olduğundan

$$X(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.) \le tX(\varphi(a),.) + (1-t)X(\varphi(b),.) \tag{3.1.10}$$
$$Y(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.) \le tY(\varphi(a),.) + (1-t)Y(\varphi(b),.) \tag{3.1.11}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. (3.1.10) ve (3.1.11) eşitsizliklerini taraf tarafa çarparsak

$$X(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.).Y(t\varphi(a) + (1-t)\varphi(b),.)$$
$$\le t^2X(\varphi(a),.)Y(\varphi(a),.) + (1-t)^2X(\varphi(b),.)Y(\varphi(b),.)$$
$$+t(1-t)[X(\varphi(a),.)Y(\varphi(b),.) + X(\varphi(b),.)Y(\varphi(a),.)]$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının (0,1) üzerinde integralini alırsak;

$$\int_0^1 X(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.).Y(t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b),.)dt$$

$$\leq [X(\varphi(a),.)Y(\varphi(a),.)+X(\varphi(b),.)Y(\varphi(b),.)]\int_0^1 t^2dt$$

$$+[X(\varphi(a),.)Y(\varphi(b),.)+X(\varphi(b),.)Y(\varphi(a),.)]\int_0^1 t(1-t)dt$$

yazılır. Birinci integral içinde $x=t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)$ dönüşümünü alır ve basit integral hesaplamaları ile istenilen (3.1.9) eşitsizliği elde edilir.

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Son bölümde ilk olarak stokastik süreçte φ- konveks fonksiyonun kavramını verdikten sonra bu konveks fonksiyon yardımıyla stokastik süreçlerde Hermite-Hadamard tipli eşitsizliğini ve stokastik süreçte φ- konveks fonksiyonlar kullanarak birçok yeni integral eşitsizlikleri elde edildi. Benzer düşünceler altında literatürde verilmiş olan diğer konveks fonksiyonlar için de yeni sonuçlar elde edilebilir. Ayrıca elde etmiş olduğumuz bu sonuçlar çeşitli yollarla daha da genelleştirilebilir. Dolayısıyla bunlar açık problemler olarak bırakıyoruz.

5. KAYNAKLAR

Beckenbah E.F. and R. Bellman (1970). Inequalities, Springer-Verlag, New York.

Breckner W. W. (1978). Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen, *Puplications Plnstitut Mathematique,* **23**: 13–20.

Cengiz N. (1984). Olasılık, *Ege Ünviversitesi Yayınevi,* İzmir.

Cristescu G. and Lupşa L. (2002). Non-connected convexities and applications, *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht, Boston, London.

Dragomir S.S. and Fitzpatrick S. (1998). The Hadamard's inequality for *s*- convex functions in the first sense. *Demonstratio Mathematica*, **31 (3):** 633-642.

Dragomir S.S. and Fitzpatrick S. (1999). The Hadamard's inequality for *s*- convex functions in the second sense. *Demonstratio Mathematica*, **32 (4):** 687-696

Dragomir S.S. and Pearce C.E.M. (2000). Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. *RGMIA Monograps,* Victoria University.

Hardy G.H., J.E. Littlewood and G. Polya (1934). Inequalities. Cambridge University, *Press,* New York.

Hudzik H. and Maligranda L. (1994). Some remarks on *s*- convex functions. *Aequationes Mathematicae*, **48:** 100-111.

J. Pecaric, F. Proschan and Y.L. Tong (1991). Convex functions, partial ordering and statistical applications. *Academic Press*, New York.

Kotrys D. (2011). Hermite-Hadamard inequality for convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, **83:** 143-151.

Kotrys D. (2012). Remarks on strongly convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, **86:** 91-98.

Maden S., Tomar M. and Set E. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for *s*-convex stochastic processes in the first sense. *Pure and Applied Mathematics Letters*, 1-7.

Maden S., Tomar M. and Set E. (2014). Hermite-Hadamard type inequalities for *s*-convex stochastic processes in the second sense. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, **2 (6):** 202-207.

Matuszewska W. and Orlicz W. (1961). A note of the theory of *s*- normed spaces of ψ integrable functions. *Studia Math*., **21:** 107-115.

Mitrinovic D.S. (1970). Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin.

Musielak J. (1983). Orlicz Spaces and Modular Spaces, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Paper 1034, Berlin.

Nikodem K. (1980). On convex stochastic processes, *Aequationes Mathematicae*, **20:** 184-197.

Orlicz W. (1961). A note on modular spaces I, Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phys., **9:** 157-162.

Pecaric J.E., Proschan F. and Tong Y.L. (1992). Comvex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, *Academic Press*, Boston.

Roberts A.W. and Varberg D.E. (1974). Convex Functions, *Academic Press*, 1-299.

Sarikaya M. Z. and S. Erden (2014). On the Weighted Integral Inequalities for Convex Functions, Acta Universitatis Sapientiae Math., 6, 2, 194-208.

Skowronski A. (1992). On some properties of *J*- convex stochastic processes. *Aequationes Mathematicae*, **44:** 249-258.

Skowronski A. (1995). On Wright- convex stochastic processes. *Annales Mathematicae Silesianne,* **9:** 29-32.

Youness E. A. (1999). E- Convex Sets, E- Convex Functions and E- Convex Programming, Journal of Optimization Theory and Applications, **102(2):** 439-450.

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı- Soyadı : Betül Bodur

Doğum Tarihi : 25.07.1991

Doğum Yeri : BALIKESİR

Eğitim Bilgileri

Lise : Muharrem Hasbi Anadolu Lisesi (2005- 2009)

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü (2009-2013)

Pedagojik Formasyon : Afyon Kocatepe Üniversitesi (Şubat 2014- Haziran 2014)

Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi (2013-)

Yüksek Lisans Ana Bilim Dalı: Matematik

Yüksek Lisans Bilim Dalı : Uygulamalı Matematik

İletişim Bilgileri

Telefon: 0 538 767 67 38

Mail : honguduk_187@hotmail.com