3-BOYUTLU HEMEN HEMEN
α -KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR
ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK TENSÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Halil DOĞAN

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Şubat, 2016

Bu tez çalışması 14.FEN.BİL.44 numaralı proje ile Afyon Kocatepe Üniversitesi
Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenmiştir.

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

3-BOYUTLU HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK TENSÖRLERİ

Halil DOĞAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat, 2016

TEZ ONAY SAYFASI

Halil DOĞAN tarafından hazırlanan “3-Boyutlu Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar Üzerinde Bazı Eğrilik Tensörleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 26/02/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman **:** Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Başkan **:** Prof. Dr. Özkan ÖCALAN
Akdeniz Üniversitesi Fen Fakültesi,

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Özgür KALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO,

Üye **:** Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK
Afyon Kocatepe Üniversitesi Afyon MYO,

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

……………………………….
Prof. Dr. Hüseyin ENGİNAR
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

26/02/2016

Halil DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

3-BOYUTLU HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE BAZI EĞRİLİK TENSÖRLERİ

Halil DOĞAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlar tanıtılmıştır. Üçüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik manifold yapısı ele alınmış ve bu yapı için bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, α-Kenmotsu manifoldu için yarı simetrik şartlar ile ilgili genel sonuçlar verilmiştir. Beşinci bölümde, 3-boyutlu yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifoldu ayrıntılı bir şekilde ele alınmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2016, v + 63 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen değme manifold, Hemen hemen α-kosimplektik manifold, Hemen hemen α-Kenmotsu manifold, α-Kenmotsu manifold, Yarı simetrik uzay, Yarı simetrik eğrilik tensörleri.

ABSTRACT

M.Sc Thesis

SOME CURVATURE TENSORS ON ALMOST α-COSYMPLECTIC THREE MANIFOLDS

Halil DOĞAN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hakan ÖZTÜRK

This thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a generel knowledge of literature. In the second chapter, the necessary basic concepts are introduced. In the third chapter, the structure of almost α-cosymplectic manifold is considered and curvature properties of this structure are examined. In the fourth chapter, some general results for α-Kenmotsu manifold connected to the semi symmetric conditions are given. In the fifth chapter, semi symmetric almost α-cosymplectic three manifold is addressed in detail and some results are obtained on almost α-cosymplectic three manifold.

2016, v + 63 pages

Key Words: Almost contact manifold, Almost α-cosymplectic manifold, Almost α-Kenmotsu manifold, α-Kenmotsu manifold, Semi symmetric space, Semi symmetric curvature tensors.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Hakan ÖZTÜRK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tez çalışmalarım boyunca maddi ve manevi olarak 14.FEN.BİL.44 numaralı proje ile desteğini esirgemeyen Afyon Kocatepe Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi'ne teşekkür ederim.

Son olarak, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim ve canım evlatlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Halil DOĞAN

AFYONKARAHİSAR, 2016

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	
R	Riemann eğrilik tensör alanı
D	Değme dağılımı
S	Ricci eğrilik tensör alanı
Q	Ricci operatörü
N	Nijenhuis tensör alanı
∇	Levi-Civita konneksiyonu
$\chi(M)$	M üzerindeki C^{∞} vektör alanları uzayı
U(n)	Üniter grup
div	Divergens operatörü
TM	M üzerindeki tanjant demeti
$TM^{\perp}$	M üzerindeki tanjant demetinin ortogonal tümleyeni
O(s)	Ortogonal grup
R_{η} (M)	M üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların bir alt halkası
J	Hemen hemen kompleks yapı
L	Lie türev operatörü
P	Projektif eğrilik tensör alanı
C	Weyl konformal eğrilik tensör alanı
$\bar{C}$	Konsirküler eğrilik tensör alanı

1 GİRİŞ

Simetrik Riemann uzayları Riemann manifoldları için çok önemli bir yere sahiptir. Diğer yandan, bu uzay sınıfları matematiğin birçok branşı için oldukça öneme sahip pek çok belirgin örnekleri de içerir. Örnek olarak, kompakt Lie gruplar, Grassmann ve sınırlı simetrik bölgeler verilebilir. Herhangi bir simetrik uzay kendine has özel bir geometriye sahiptir. Öklid, eliptik ve hiperbolik geometri hemen akla gelen ilk gelen örneklerdir. Öte yandan, bu uzaylar çok fazla ortak özellik ve zengin bir teoriyle donatılmıştır.

Simetrik uzaylar için oldukça fazla bir bakış açısı mevcuttur. Bu uzaylar Riemann manifoldları için noktasal yansımalı veya paralel eğrilik tensörüne sahip veya özel bir holonomi veya özel bir izometri ile verilen homojen bir uzay veya özel Killing vektör alanlarına sahip veya üçlü bir Lie sistemi veya belli bir involusyona sahip bir Lie grubu olarak düşünülebilir.

Bu tez çalışmasında belli şartları sağlayan bir Riemann manifoldu için Riemann eğrilik tensörü yardımıyla verilen yarı simetrik manifoldları gözönüne alacağız. Yarı simetrik uzaylar literatütde iyi bilinen ve lokal simetrik uzayların doğal bir genelleştirmesi olarak ele alınır. M üzerinde tüm keyfi X, Y vektör alanları için, bir (M, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü $R(X, Y).R = 0$ şartını sağlıyorsa (M, g) bir yarı simetrik uzaydır denir. Burada $R(X, Y)$, R Riemann eğrilik tensörü üzerinde bir türev gibi davranır. Belli bir uzay bir $p \in M$ noktasında (M, g) nin R_p eğrilik tensörü bir simetrik uzayın eğrilik tensörü ile aynı olduğundan (verilen p noktasına göre değişebilir) "yarı simetrik" uzay olarak adlandırılır. Yarı simetrik uzaylar lokal simetrik uzayların bir genelleştirmesi olduğundan biraz da lokal simetrik uzaylardan bahsedelim.

Lokal simetrik uzaylar diferensiyel geometri, topoloji, sayılar teorisi, komplels analiz, cebirsel geometri gibi bir çok farklı alandan ortaya çıkmıştır. Bu tez çalışmasında konu edilen lokal simetriklik tanımı diferensiyel geometri kavramlarından Riemann eğrilik tensörü ile ilgili olanıdır.

Bir (M, g) Riemann manifoldunun eğrilik tensörü R, $\nabla R = 0$ şartını sağlıyorsa (M, g) bir lokal simetrik Riemann manifoldudur denir. Burada ∇, Riemann metriğinin Levi-

Civita konneksiyonudur. Bu tanıma göre, lokal simetrik uzayların genelleştirilmesi düşünüldüğünde bir çok geometrici yarı simetrik uzayları gözönüne almışlar ve iki uzay arasındaki ilişkileri incelemişlerdir. Yarı simetriklik tanımı gözönüne alındığında lokal simetrik uzayların aşikar olarak yarı simetrik olduğu ortaya çıkar. Fakat bu durumun tersi her zaman doğru değildir (Takagi 1972). Aslında 2 den büyük herhangi boyut durumunda yarı simetrik uzayların lokal simetrik olmadığına dair pek çok örnek mevcuttur (Boeckx et al. 1996).

Genel olarak, bir yarı simetrik uzay lokal simetrik olmasa bile, bazı durumlarda yarı simetri lokal simetriyi gerektirir (Boeckx 1993, Calvaruso et al. 1998). Öyleyse, verilen herhangi bir Riemann manifold sınıfı için hangi durumlarda yarı simetrinin lokal simetriyi gerektirmesi oldukça önem arz eden bir araştırma konusudur. O halde, bu tez çalışmasında gözönüne aldığımız temel manifold yapısına göre özellikle 3-boyutlu uzaylarda yarı simetri özelliği incelenmiştir.

Yarı simetrik değme manifoldlar pek çok yazar tarafından çalışılmıştır (Takahashi 1969, Perrone 1992, Papantoniu 1993). Özellikle, Takahashi yarı simetrik Sasakian manifoldların sabit kesit eğriliğinin 1 olduğunu ispatlamıştır (Takahashi 1969). Ayrıca, Papantoniu (κ, μ)-uzayıyla verilen 3 den büyük boyutlar için yarı simetrik değme manifoldları incelemiştir. Eğer M yarı simetrik ve h tensör alanı ξ-paralel ise, o zaman M manifoldu ya düzgündür ya da 1 sabit eğriliğine sahiptir sonucu Perrone tarafından bulunmuştur (Perrone 1992). Bundan başka, 3-boyutlu yarı simetrik değme manifoldlar için $\xi \in (\kappa, \mu)$ dağılımı Papantoniu tarafından verilmiştir (Papantoniu 1993). Diğer yandan, her 3-boyutlu lokal simetrik değme metrik manifoldunun sabit eğriliğinin 0 veya 1 olduğu ispatlanmıştır (Blair and Sharma 1990).

Bu uzaylar ile ilgili önemli bir sınıflama Szabó tarafından yapılmıştır (Szabó 1982). Aslında tarihsel literetüre baktığımızda Nomizu şartı olarak bilinen $R \cdot R = 0$ ilk kez Nomizu tarafından dile getirilmiştir (Nomizu 1968). Eğer M^n R^{n+1} Öklid uzayının bir tam bağlantılı yarı simetrik hiperyüzeyi $(n > 3)$ yani, $R \cdot R = 0$ ise M^n lokal simetriktir. Yani, $\nabla R = 0$ dır. Ayrıca, Ogawa bir kompakt Kaehler manifoldunun yarı simetrik olduğunda lokal simetrik şartını sağladığını göstermiştir (Ogawa 1977).

Bundan başka, değme yapılar düşünüldüğünde, Tanno tam yarı simetrik veya Ricci yarı simetrik K-değme manifoldların mevcut olmadığını ispatlamıştır (Tanno 1969).

Literatürde R Riemann eğrilik tensöründen sonra en önemli tensörler Weyl konformal eğrilik tensörü C, projektif eğrilik tensörü P ve konsirküler eğrilik tensörü $\overline{C}$ olarak bilinir. Dolayısıyla bir çok yazar bu tensörleri veya bunlar tarafından tanımlanan tensör çarpımlarını isimleri, sırasıyla, konformal yarı simetrik, projektif yarı simetrik, konsirküler yarı simetrik olan $R(X,Y)\cdot C = 0$, $R(X,Y)\cdot P = 0$ ve $R(X,Y)\cdot \overline{C} = 0$ tensörlerini ele almıştır (Bagewadi et al. 2007, Özgür 2007). Burada $R(X,Y)$ manifoldun her bir noktasındaki tensör cebirinin türevi olarak alınmıştır.

Şimdi de, ele alacağımız belli bazı tensör alanlarını kullanacağımız manifold yapısı hakkında bilgiler verelim.

Manifold teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yer kaplamaktadır. $(2n+1)$-boyutlu bir (C^∞) sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, J. Gray 1959 yılında tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapıları tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı ϕ, bir vektör alanı ξ ve bir 1-form olan η ile oluşturulan (ϕ,ξ,η)-üçlüsüyle ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

eşitlikleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $(J^2 = -I)$ integrallenebilmesi olduğununu ispatlamışlardır.

Hemen hemen değme metrik yapıya bağlı kalarak, 1969 yılında Goldberg ve Yano kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır (Goldberg and Yano 1969). Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde bir çok çalışmaya imza atmıştır (Olszak, 1981). 1972 yılında Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır (Kenmotsu 1972). 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen α-Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır (Vanhecke 1981).

Bundan başka, Goldberg ve Yano hemen hemen değme metrik yapıları kullanarak metrik çatılı manifollar olarak adlandırılan daha genel bir manifoldu 1963 yılında ele almışlardır. Bunu takiben, Blair 1970 yılında metrik çatılı manifoldları kullanarak bu tip manifoldların özel bir hali olan hemen hemen S ve C-manifoldları tanımlamıştır (Blair 1970). Yakın zamanlarda, Pastore ve Falcitelli metrik çatılı manifoldların bir altsınıfı olan hemen hemen Kenmotsu f-manifoldları tanımlayarak bazı çalışmalar yapmışlardır (Pastore and Falcitelli 2007).

Kim ve Pak hemen hemen α-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birleştirerek hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir altsınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifold kavramını tanımlamışlardır (Kim and Pak 2005).

(M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α, keyfi bir reel sayı ve Φ, temel 2-formdur. Özel olarak, $\alpha = 0$ durumunda hemen hemen kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α-Kenmotsu manifoldları elde edilir. Normallik şartı altında ise α-kosimplektik manifold ya kosimplektik yada α-Kenmotsu manifoldudur.

Yukarıdaki bilgilerin ışığı altında; yüksek lisans tez çalışmamızda hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar üzerindeki bazı eğrilik tensörleri kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, tezin ana kısmını teşkil eden yarı simetrik α-Kenmotsu ve 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ayrıntılı olarak incelenmiştir.

İkinci bölümde, manifoldlar ile ilgili temel kavramlar tanıtılacaktır. Bu bölümün ilk kısmında, manifold teorisi ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk kısım iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda, Riemann manifoldları ve bazı temel özellikleri tanıtılmıştır. İkinci alt kısımda, hemen hemen değme metrik manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar ile ilgili genel literatür bilgileri verilmiştir. Bu bölümün ilk kısmında; hemen hemen α-kosimplektik yapılar tanıtılmıştır ve bazı özel tensör alanlarının temel özellikleri verilmiştir. İkinci kısımda, Riemann eğrilik tensörü özellikleri verilmiş ve (Pastore and Dileo 2007) de değinilen hemen hemen Kenmotsu manifoldlar ile ilgili temel özellikler hemen hemen α-kosimplektik manifold için ele alınmıştır (Öztürk 2009).

Dördüncü bölümde, belli bazı yarı simetrik koşulları sağlayan α-Kenmotsu manifoldlar ele alınmıştır. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Birinci kısımda, α-Kenmotsu manifoldlar tanıtılmış ve eğrilik özellikleri verilmiştir. İkinci kısımda, yarı simetri şartı araştırılmış ve bir çok sonuç bulunmuştur. Üçüncü kısımda, Ricci yarı simetrik manifold incelenmiştir. Dördüncü kısımda, Weyl konformal yarı simetri çalışılmıştır. Beşinci kısımda, projektiktif yarı simetri şartı gözönüne alınarak sonuçlar ortaya koyulmuştur. Son kısımda, konsirküler yarı simetri şartı incelenmiştir.

Tez çalışmamızın asıl kısmını oluşturan son bölümdeki amacımız, 3-boyutlu yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifoldları incelemektir. Yarı simetri yardımıyla bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir. Birinci kısımda, 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik manifold yapısı verilmiştir. İkinci kısımda, 3-boyutlu yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifold çalışılmış ve yarı simetrik şartının etkileri araştırılmıştır.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar verilmiştir.

2.1 Manifoldlar

Bu kısımda, diğer bölümlerde ihtiyaç duyulacak manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

2.1.1 Riemann Manifoldları

Bu kısımda, Riemann manifoldların temel kavramları tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.1.1. M, n-boyutlu bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ ve reel değerli C^∞ fonksiyonlarının halkası $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$g : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

simetrik, 2-lineer ve pozitif tanımlı bir g dönüşümüne M^n üzerinde bir Riemann metrik tensörü ve (M^n, g) ikilisiyle verilen manifolda bir Riemann manifoldu denir (O'neill 1983).

M^n manifoldunun herhangi iki p ve q noktası için M^n üzerinde bu noktaları birleştiren bir eğri bulunabiliyorsa M^n ye bağlantılı manifold adı verilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.2. M^n bir C^∞ manifold olsun. M^n üzerinde vektör alanlarının uzayı $\chi(M^n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\xrightarrow{\text{2-lineer}} \chi(M^n) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall\ f, g \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$, $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(2) $\nabla_{fX+gY} Z = f\ \nabla_X Z + g\ \nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_X(f\ Y) = f\ \nabla_X Y + X(f)Y$,

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya M^n üzerinde bir afin konneksiyon denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. O zaman, ∇ dönüşümü; $\forall\ X, Y, Z \in \chi(M^n)$ için,

(1) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özeliği),

(2) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Konneksiyonun metrikle bağdaşma özeliği),

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M^n üzerinde sıfır torsiyonlu bir Riemann konneksiyonu veya M^n nin Levi-Civita konneksiyonu denir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.4. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} R : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \chi(M^n) \\ R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &- \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1}$$

ile tanımlanan $(1, 3)$-tipli tensör alanı R ye M^n nin Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $\forall\ X, Y, Z, V, W \in \chi(M^n)$ olmak üzere, R Riemann eğrilik tensörü

(1) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$,

(2) $g(R(X, Y)V, W) = -g(R(X, Y)W, V)$,

(3) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$,

(4) $g(R(X, Y)V, W) = g(R(V, W)X, Y)$,

özelliklerini sağlar (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, (1.1)-tipli bir tensör alanı olsun. O zaman,

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dır (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1.2. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir (O'neill 1983).

Önerme 2.1.1.3. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.5. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayının iki boyutlu altuzayı Π ve $V, W \in \Pi$ vektörleri üzerine kurulan paralel kenarın alanı

$$g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2 \neq 0$$

olsun. O zaman,

$$K(V,W) = \frac{g(R(V,W)W,V)}{g(V,V)g(W,W) - g(V,W)^2}$$

eşitliğine Π nin kesit eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$\begin{aligned} S : \chi(M^n) \times \chi(M^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X,Y) &\longrightarrow S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına M^n üzerinde Ricci eğrilik tensörü denir.

Ayrıca, $(0,2)$-tipli Q Ricci operatörü

$$S(X,Y) = g(QX,Y)$$

eşitliği ile tanımlıdır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

değerine M^n nin skalar eğriliği denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M^n nin eğrilik tensörü paralel $(\nabla R = 0)$ ise o zaman, M^n ye lokal simetrik uzay denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve M^n üzerinde bir pozitif fonksiyon ρ olsun. Bu durumda, $g^* = \rho^2 g$ eşitliği M^n üzerinde metrik değişimini tanımlar. Burada her bir noktadaki iki vektör arasındaki açı değişmezdir. Bu nedenle, bu şekilde tanımlanan metrik değişimine metriğin bir konformal değişimi denir. Eğer ρ fonksiyonu sabit ise konformal dönüşüm homotetik olarak adlandırılır. Eğer ρ fonksiyonu özdeş olarak 1 'e eşit ise bu dönüşüm bir izometri olarak adlandırılır.

Ayrıca, eğer bir g Riemann metriği lokal düzlemsel olan bir g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise o zaman, M^n Riemann manifolduna konformal düzlemsel denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.10. (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli Weyl konformal eğrilik tensör alanı C, M^{2n+1} üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z \;=\; & R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n-1}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y - g(X,Z)QY \\ & + g(Y,Z)QX] + \tfrac{r}{2n(2n-1)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bundan başka, C nin divergensi c olmak üzere $(c = \operatorname{div} C)$,

$$c(X,Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \tfrac{1}{2(2n-1)}\left[(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X\right]$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.11. (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X, Y, Z vektör alanları için M^{2n+1} nin $(1,3)$-tipli konsirküler eğrilik tensör alanı $\overline{C}$ ve projektif eğrilik tensör alanı P,

$$\overline{C}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right], \tag{2.4}$$

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \tfrac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right], \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada S Ricci tensörü ve $r = tr(S)$ skalar eğriliktir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.12. (M^{2n+1}, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^{2n+1}üzerinde tüm keyfi X, Y vektör alanları için, bir (M, g) Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y).R = 0, \tag{2.6}$$

şartını sağlıyorsa (M^{2n+1}, g) bir yarı simetrik uzaydır denir (Yano ve Kon 1984).

Teorem 2.1.1.1. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin konformal düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $c = 0$ olmasıdır (Yano and Kon 1984).

Teorem 2.1.1.2. (M^n, g) bir sabit k eğriliğine sahip olan bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M^n üzerindeki herhangi X, Y, Z vektör alanları için,

$$R(X, Y)Z = k\,[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \tag{2.7}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.13. k sabit eğrilikli, tam ve bağlantılı manifoldlara uzay form denir. n-boyutlu bir M^n uzay formu $M^n(k)$ ile gösterilir (Yano and Kon 1984).

Sonuç 2.1.1.1. (M^n, g) bir sabit k eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ için,

$$M^n(k) = \begin{cases} k = 0 & \text{ise} \quad M^n(k) = E^n \text{ Öklid uzayı,} \\ k = \frac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = S^n(r) \text{ küresi,} \\ k = -\frac{1}{r^2} & \text{ise} \quad M^n(k) = H^n(r) \text{ Hiperbolik uzay,} \end{cases}$$

dır (O'neill 1983).

Tanım 2.1.1.14. M^n bir C^∞ manifold olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} \times M^n &\longrightarrow M^n \\ (t, p) &\longrightarrow \varphi_t(P) \end{aligned}$$

dönüşümü

(1) $\forall\ t \in \mathbb{R}$ için, $\varphi_t : P \longrightarrow \varphi_t(P)$ diffeomorfizm,

(2) $\forall\, t, s \in \mathbb{R}$ ve $P \in M^n$ için, $\varphi_{t+s}(P) = \varphi_t(\varphi_s(P))$,

şartlarını sağlıyorsa φ ye M^n nin diferensiyellenebilir bir 1-parametreli grubu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.15. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup φ_t olsun. O zaman, K bir tensör alanı ve $p \in M^n$ için,

$$(\mathcal{L}_X K)_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[K_p - (\varphi_t K)_p\right]$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın Lie türevi denir ve $\mathcal{L}_X K$ ile gösterilir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.1.4. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,

(1) $\mathcal{L}_X(Y \otimes Z) = (\mathcal{L}_X Y) \otimes Z + Y \otimes (\mathcal{L}_X Z)$, ($Y, Z$ herhangi tensör alanları)

(2) $\mathcal{L}_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)

(3) $\mathcal{L}_X V = [X, V]$, $V \in \chi(M^n)$

özellikleri geçerlidir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.1.16. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $\mathcal{L}_X g = 0$ ise X vektör alanına bir Killing vektör alanı denir (Yano and Kon 1984).

2.1.2 Hemen Hemen Değme Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen değme manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1.2.1. M, $(2n+1)$-boyutlu bir manifold, ϕ, ξ, η da M^{2n+1} üzerinde, sırasıyla, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve 1-form olsunlar. Eğer ϕ, ξ, η için, M^{2n+1} üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\eta(\xi) = 1 \\ &\phi^2 X = -X + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{2.8}$$

eşitlikleri sağlanıyorsa o zaman, (ϕ, ξ, η) üçlüsüne M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme yapı ve bu yapı ile birlikte M^{2n+1} ye bir hemen hemen değme manifold denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.2. M^{2n+1}, (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X,\xi), \\ g(\phi X,\phi Y) &= g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.9}$$

şartlarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına hemen hemen değme metrik yapı ve (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M^{2n+1} ye de hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano and Kon 1984).

Sonuç 2.1.2.1. M^{2n+1}, (ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı ile verilsin. Bu durumda,

$$g(\phi X,Y)=-g(X,\phi Y) \tag{2.10}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.3. M^{2n+1} üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) olmak üzere,

$$\Phi(X,Y)=g(X,\phi Y) \tag{2.11}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen değme metrik yapısının temel 2-formu denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.4. (M^n,g) bir Riemann manifold ve $x_1,x_2,\ldots,x_n$ M^n nin lokal koordinatları olsun. $w=\sqrt{|g|}dx_1\wedge dx_2\wedge\ldots\wedge dx_n$ ve $g(x)>0$ ise w ye M^n üzerindeki bir hacim form denir. Burada dx_i, M^n üzerindeki kotanjant uzayda 1-formlar ve $|g|$, M^n üzerinde metrik tensörün determinantıdır (Spivak 1965).

Tanım 2.1.2.5. (M^n,g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir hacim form mevcut ise M^n ye yönlendirilebilirdir denir (Gallot et al. 2004).

Sonuç 2.1.2.2. Φ temel 2-formu ters simetrik ve Tanım 2.1.2.3. yardımıyla $\eta\wedge\Phi^n\neq 0$ dır. Böylece Tanım 2.1.2.5. gereğince (M^n,ϕ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik manifoldu yönlendirilebilirdir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.1.2.6. M^n bir C^∞ manifold olsun. Eğer w 1-form ise, keyfi X,Y vektör alanları için,

$$2dw(X,Y)=X(w(Y))-Y(w(X))-w[X,Y]$$

dır. Eğer w 2-form ise,

$$\begin{aligned} 3dw(X,Y,Z) &= X(w(Y,Z)) + Y(w(Z,Y)) + Z(w(X,Y)) \\ &\quad - w([X,Y],Z) - w([Y,Z],X) - w([Z,X],Y) \end{aligned}$$

dır (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇ Riemann konneksiyonu olsun. Keyfi X, Y, Z vektör alanları için,

(i) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) = g(Y, (\nabla_X \phi)Z)$

(ii) $(\nabla_X \Phi)(Y,Z) + (\nabla_X \Phi)(\phi Y, \phi Z) = \eta(Z)(\nabla_X \eta)\phi Y - \eta(Y)(\nabla_X \eta)\phi Z$

(iii) $(\nabla_X \eta)Y = g(Y, \nabla_X \xi) = (\nabla_X \Phi)(\xi, \phi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X \eta)Y - (\nabla_Y \eta)X$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus} (\nabla_X \Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$, X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı göstermektedir.

Ayrıca, $\{X_i, \phi X_i, \xi\}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, M^{2n+1} nin açık bir altcümlesi üzerinde tanımlanan bir lokal ortonormal baz olsun. O zaman, δ operatörü

$$\delta\eta = -\sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_{X_i} \eta)X_i + (\nabla_{\phi X_i} \eta)\phi X_i\}$$

şeklinde elde edilir (Gonzalez 1990).

Tanım 2.1.2.7. M^n bir reel differensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M^n nin her p noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde T_pM tanjant uzayının bir J endomorfizması mevcut ise, o zaman M^n üzerindeki J tensör alanına bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapısı ile verilen manifolda bir hemen hemen kompleks manifold denir (Yano and Kon 1984).

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ, ξ, η, g) ile verilsin. O zaman, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$(X,\ f\frac{d}{dt})$$

şeklinde tanımlanır. Burada X, M manifolduna teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f, $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir C^{∞} fonksiyondur.

M üzerinde (ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapı olsun. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir hemen hemen kompleks yapı

$$J(X, f\frac{d}{dt}) = \left(\phi X - f.\xi,\ \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Kolayca $J^2 = -I$ elde edilir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.8. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall\ X, Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX, FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü denir (Yano ve Kon 1984).

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. Tanım 2.1.2.8 yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX, JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.9. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.10. Eğer $M^{2n} \times \mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına normaldir denir (Yano and Kon 1984).

Önerme 2.1.2.2. M^{2n+1} üzerinde (ϕ, ξ, η) hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul

$$N_\phi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada N_ϕ, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür (Yano and Kon 1984).

Tanım 2.1.2.11. (M^{2n}, J) hemen hemen kompleks manifold olsun. M^{2n} üzerinde her X, Y vektör alanları için,

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

şeklinde verilen g Riemann metriğine Hermit metriği denir. Hermit metriği ile verilen bir hemen hemen kompleks manifolda bir hemen hemen Hermit manifoldu denir. Hermit metriği ile verilen kompleks manifolda ise Hermit manifoldu denir (Blair 2002).

Tanım 2.1.2.12. (M^{2n}, J, g) bir hemen hemen Hermit manifoldu olsun. Her X, Y vektör alanları için,

$$\Omega(X, Y) = g(X, JY)$$

eşitliği ile tanımlanan Ω 2-formuna hemen hemen Hermit yapısının temel 2-formu denir. Eğer $d\Omega = 0$ ise (J, g) yapısına hemen hemen Kaehler yapı denir. Bu yapı ile elde edilen manifolda ise hemen hemen Kaehler manifoldu denir. Bir Kaehler yapı ile verilen kompleks manifolda Kaehler manifoldu denir. Bir Hermit manifoldunun bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla J = 0$ eşitliğinin sağlamasıdır (Blair 2002).

Tanım 2.1.2.13. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \ (\Phi, \text{kapalıdır}), \ \ d\eta = 0 \ (\eta, \text{kapalıdır})$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna hemen hemen kosimplektik manifold denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda kosimplektik manifold denir (Olszak 1981).

Teorem 2.1.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\nabla\Phi$ ve $\nabla\eta$ kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.1.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifoldu olsun. Eğer Φ 2-formu kapalı ise,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_{\phi X}\Phi)(\phi Y, Z) + (\nabla_X \Phi)(Y, Z) - \eta(X)\left[d\eta(\phi Y, Z) + d\eta(Y, \phi Z)\right] \\
&+\eta(Y)\left[d\eta(\phi Z, X) - \tfrac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi g)(Z, \phi X)\right] + \eta(Z)\left[d\eta(X, \phi Y) - d\eta(\phi X, Y)\right] = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Olszak 1981).

Yardımcı Teorem 2.1.2.2. Bir hemen hemen kosimplektik manifold üzerinde

$$(\nabla_{\phi X}\phi)(\phi Y) + (\nabla_X \phi)(Y) - \eta(Y)\nabla_{\phi X}\xi = 0$$

eşitliği geçerlidir (Olszak 1981).

Örnek 2.1.2.1. (M, J, G) bir hemen hemen Kaehler manifoldu olsun. O zaman, M, $(2n)$-boyutlu bir manifold, J bir hemen hemen kompleks yapı ve M^{2n} üzerindeki Riemann metriği G olmak üzere,

$$J^2 = -I, \quad G(X, Y) = G(JX, JY)$$

eşitlikleri geçerlidir. M^{2n} üzerindeki temel 2-form

$$\Omega(X, Y) = G(X, JY)$$

şeklinde tanımlı olup, $d\Omega = 0$ dır.

$\mathbb{R}$ reel doğru ve g_0 bir Riemann metriği olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde ξ_0 sıfırdan farklı bir vektör alanı ve η_0

$$g_0(X, \xi_0) = \eta_0(X)$$

olacak şekilde bir 1-form olsun. Böylece $M' = M^{2n} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu tanımlıdır. (X_1, X_2), V üzerinde tanımlı vektör alanları olsunlar. Burada X_1, V çarpım manifolduna dik olan vektör ve X_2 ise $\mathbb{R}$ doğrusuna dik olan vektördür. ϕ $(1,1)$-tipli bir tensör alanı ξ bir vektör alanı $(\xi \neq 0)$ ve η 1-formunu

$$\phi(X_1, X_2) = (JX_1, 0), \quad \xi = (0, \xi_0), \quad \eta(X_1, X_2) = \eta_0(X_2)$$

şeklinde seçelim. Ayrıca, M' üzerinde tanımlı g metriği

$$g = G + g_0$$

şeklindedir. Böylece $(M^{'}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kosimplektik manifoldu elde edilir (Olszak 1981).

Tanım 2.1.2.14. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Eğer M manifoldu üzerinde her X, Y, Z vektör alanları ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ için,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartları geçerli ise M manifolduna bir hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu denir. $\alpha = 1$ durumu hemen hemen Kenmotsu olarak adlandırılır (Kenmotsu 1972).

Önerme 2.1.2.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu olsun. Bu durumda,

$$\eta' = \frac{1}{\alpha}\eta, \ \xi' = \alpha\xi, \ \phi^{'} = \phi, \ g' = \frac{1}{\alpha^2}g, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

şeklinde tanımlı homotetik deformasyon yardımıyla M^{2n+1} üzerinde bir (ϕ', ξ', η', g') hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim and Pak 2005).

Teorem 2.1.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. M^{2n+1} nin bir Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X, \ \nabla_X \xi = -\phi^2 X \ ; \ \forall \ X, Y \in \chi(M^{2n+1})$$

dır (Kenmotsu 1972).

3 HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir altsınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar incelenmiştir.

3.1 Hemen Hemen α-Kosimplektik Yapılar

Bu kısımda öncelikle hemen hemen α-kosimplektik yapılar tanıtılarak, gerekli literatür bilgisi verilmiştir.

Tanım 3.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. Herhangi vektör alanları ve keyfi α reel sayısı için, M^{2n+1} üzerinde

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M^{2n+1} ye hemen hemen α-kosimplektik manifold denir. Özel olarak, $\alpha = 0$ için hemen hemen kosimplektik, $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α-Kenmotsu manifoldu elde edilir (Kim and Pak 2005).

Yardımcı Teorem 3.1.1. M^{2n+1} manifoldunun bir (ϕ, ξ, η, g) hemen hemen değme metrik yapısı için,

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\phi)Y, Z) &= 3d\Phi(X, \phi Y, \phi Z) - 3d\Phi(X, Y, Z) \\ &\quad + g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad + 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

dir. Burada $N^{(1)}, N^{(2)}$ tensör alanları, sırasıyla,

$$N^{(1)}(X, Y) = N_\phi(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi \tag{3.2}$$

$$N^{(2)}(X, Y) = (\mathcal{L}_{\phi X}\eta)Y - (\mathcal{L}_{\phi Y}\eta)X \tag{3.3}$$

dir (Blair 2002).

Önerme 3.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, her X, Y vektör alanları için,

$$hX = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_\xi \phi)X, \quad h(\xi) = 0 \tag{3.4}$$

$$\nabla_X \xi = -\alpha\phi^2 X - \phi h X \tag{3.5}$$

$$\nabla_\xi \xi = 0, \quad \nabla_\xi \phi = 0 \tag{3.6}$$

$$(\phi \circ h)X + (h \circ \phi)X = 0 \tag{3.7}$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha\left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right] + g(\phi Y, hX) \tag{3.8}$$

$$\delta\eta = -2\alpha n, \quad \dot{I}z(h) = 0 \tag{3.9}$$

$$h = 0 \Leftrightarrow \nabla\xi = -\alpha\phi^2 \tag{3.10}$$

eşitlikleri sağlanır (Kim et al. 2005, Pastore 2007).

Yardımcı Teorem 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen değme manifold olsun. O zaman, her X vektör alanı için,

$$(\nabla_\xi h) \circ \phi + \phi \circ (\nabla_\xi h) = 0$$

eşitliği geçerlidir (Blair 2002).

Önerme 3.1.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, $\forall\, X, Y \in \chi(M)$ için Levi-Civita konneksiyonu

$$(\nabla_X \phi)Y + (\nabla_{\phi X}\phi)\phi Y = -\alpha\left[\eta(Y)\phi X + 2g(X, \phi Y)\xi\right] - \eta(Y)hX \tag{3.11}$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, (3.11) eşitliği kullanılarak

$$\phi(\nabla_{\phi X}\phi)Y - (\nabla_X \phi)Y = 2\alpha\eta(Y)\phi X - g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi \tag{3.12}$$

elde edilir (Kim and Pak 2005).

Şimdi, A ve h tensör alanları ile ilgili temel eşitlikleri verelim:

Yardımcı Teorem 3.1.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. M^{2n+1} üzerinde $(1,1)$-tipli A ve h tensör alanları, sırasıyla, $A = -\nabla\xi$ ve $h = \frac{1}{2}\mathcal{L}_\xi\phi$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her X, Y vektör alanları için,

(i) A ve h simetriktir,

(ii) $A\phi + \phi A = -2\alpha\phi$,

(iii) $\eta \circ A = 0$, $\eta \circ h = 0$,

(iv) $h = A \circ \phi + \alpha\phi$,

(v) $hA + Ah = -2\alpha h$,

(vi) $\dot{I}z(A) = -2\alpha n$

(vii) $\dot{I}z(\phi A) = 0$

eşitlikleri sağlanır.

İspat (i) M^{2n+1} üzerinde herhangi X, Y vektör alanları için,

$$\begin{aligned} g(AX, Y) &= g(\alpha\phi^2 X + \phi hX, Y) \\ &= -\alpha g(\phi X, \phi Y) - g(X, h\phi Y)) \\ &= g(\alpha\phi^2 X, Y) + g(\phi hY, X) \\ &= g(AY, X) \end{aligned}$$

dır. Böylece A simetriktir. Özel olarak, $X = \xi$ için $A\xi = \alpha\phi^2\xi + \phi h\xi = 0$ elde edilir. Benzer olarak, h tensör alanının simetrik olduğu kolayca elde edilir.

(ii) A tensör alanının özellikleri gözönüne alındığında $A\phi = (\alpha\phi^2 + \phi h)\phi$ ve $\phi A = \phi(\alpha\phi^2 + \phi h)$ eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $A\phi + \phi A = -2\alpha\phi$ eşitliği bulunur.

(iii) A tensör alanının tanımından

$$\begin{aligned} (\eta \circ A)X &= \eta(AX) \\ &= g(-\nabla_X \xi, \xi) \\ 0 &= g(X, \nabla_\xi \xi) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, $\eta \circ h = 0$ eşitliği $\mathcal{L}$ Lie türev operatörünün tanımı kullanılarak elde edilir.

(iv) (3.5) eşitliğinden $A\phi = -\alpha\phi + h$ dır. Burada h tensör alanı çekilerek $h = A\phi + \alpha\phi$ elde edilir.

(v) hA ve Ah bileşke tensör alanları

$$hA = \alpha h\phi^2 + h\phi h, \;\; Ah = \alpha\phi^2 h + \phi h^2$$

şeklinde bulunur. Böylece yukarıdaki iki eşitlik taraf tarafa toplanarak
$hA + Ah = 2\alpha\phi^2 h$ elde edilir.

(vi)-(vii) A ve ϕA tensör alanlarının izleri alınır ve (3.9) eşitliği kullanılırsa (vi) ve (vii) şıkları elde edilir.

3.2 Eğrilik Özellikleri

Bu kısımda, Riemann eğrilik tensörü yardımıyla bazı eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Önerme 3.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} üzerinde herhangi vektör alanları X, Y için,

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad +(\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \\ &= (\nabla_Y A)X - (\nabla_X A)Y \end{aligned} \tag{3.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat R Riemann eğrilik tensörü tanımı ve (3.5) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= \nabla_X \nabla_Y \xi - \nabla_Y \nabla_X \xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= \nabla_X(-\alpha\phi^2 Y - \phi hY) - \nabla_Y(-\alpha\phi^2 X - \phi hX) \\ &\quad - (-\alpha\phi^2 [X,Y] - \phi h [X,Y]) \\ &= -\alpha\nabla_X \phi^2 Y - \nabla_X \phi hY + \alpha\nabla_Y \phi^2 X + \nabla_Y \phi hX \\ &\quad + \alpha\phi^2 [X,Y] + \phi h [X,Y] \\ &= \alpha^2 [\eta(X)Y - \eta(Y)X] - \alpha [\eta(X)\phi hY - \eta(Y)\phi hX] \\ &\quad + (\nabla_Y \phi h)X - (\nabla_X \phi h)Y \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

$$R(X,\xi)\xi = \alpha^2\phi^2 X + 2\alpha\phi h X - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X \tag{3.14}$$

$$(\nabla_\xi h)X = -\phi R(X,\xi)\xi - \alpha^2\phi X - 2\alpha h X - \phi h^2 X \tag{3.15}$$

$$R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi = 2\left[\alpha^2\phi^2 X - h^2 X\right] \tag{3.16}$$

$$S(X,\xi) = -2n\alpha^2\eta(X) - (\mathrm{div}(\phi h))X \tag{3.17}$$

$$S(\xi,\xi) = \dot{I}z(l) = -\left[2n\alpha^2 + \dot{I}z(h^2)\right] \tag{3.18}$$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat (3.13) eşitliğinden (3.14) kolayca elde edilir. (3.14) denklemine ϕ uygulanır ve $g((\nabla_\xi h)X,\xi) = 0$ eşitliği yardımıyla, (3.15) denklemi elde edilir. Diğer yandan, (3.14) denkleminde X yerine ϕX yazılırsa

$$R(\phi X,\xi)\xi = \alpha^2\phi^3 X + 2\alpha\phi h\phi X - h^2\phi X + \phi(\nabla_\xi h)(\phi X) \tag{3.19}$$

denklemi bulunur. (3.14) ve (3.19) denklemleri gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} R(X,\xi)\xi - \phi R(\phi X,\xi)\xi &= \alpha^2\phi^2 X + 2\alpha\phi h X - h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X \\ &\quad +\alpha^2\phi^2 X - 2\alpha\phi h X - h^2 X - \phi^2(\nabla_\xi h)(\phi X) \\ &= 2\alpha^2\phi^2 X - 2h^2 X + \phi(\nabla_\xi h)X + (\nabla_\xi h)\phi X \end{aligned}$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.1.2. yardımıyla yukarıdaki eşitlikteki son iki ifadenin toplamı sıfırdır. Böylece (3.16) denklemi elde edilir.

Ricci eğrilik tensörü yardımıyla (3.13) denkleminden

$$S(X,\xi) = -2n\alpha^2\eta(X) - \sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_{E_i}\phi h)X, E_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_X \phi h)E_i, E_i)$$

elde edilir. $\dot{I}z(\phi h) = 0$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_X \phi h)E_i, E_i) = 0$$

dır. Buradan

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_X \phi h)E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{2n+1} g(\nabla_X \phi h E_i, E_i) - \sum_{i=1}^{2n+1} g(\nabla_X E_i, \phi h E_i) \tag{3.20}$$

eşitliği yazılır. Ayrıca,

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(\nabla_X \phi h E_i, E_i) + \sum_{i=1}^{2n+1} g(\nabla_X E_i, \phi h E_i) = 0 \tag{3.21}$$

dır. (3.20) ve (3.21) eşitliklerinden dolayı

$$g((\nabla_X \phi h)E_i, E_i) = 0$$

bulunur. (3.17) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} S(\xi,\xi) &= -2n\alpha^2\eta(\xi) - \sum_{i=1}^{2n+1} g((\nabla_{E_i}\phi h)\xi, E_i) \\ &= -2n\alpha^2 - \sum_{i=1}^{2n+1} g((h^2 E_i, E_i) \\ &= -2n\alpha^2 - \dot{I}z(h^2) \end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Böylece (3.18) denkleminin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda,

(i) $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $S(\xi, \xi)$ her zaman negatif değer alır,

(ii) Eğer $S(\xi, \xi) = 0$ ise o zaman, (M, ϕ, ξ, η, g) hemen hemen kosimplektik ve bir hemen hemen Kaehler manifold ile $\mathbb{R}$ veya S^1 nin lokal bir aşikar çarpımı şeklindedir.

Önerme 3.2.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir lokal simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O halde, $\nabla_\xi h = 0$ dır.

İspat (Pastore and Dileo 2007) deki ispata benzer olarak elde edilir.

Önerme 3.2.4. Sabit eğrilikli bir hemen hemen Kaehler manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter koşul manifoldun lokal düzlemsel olmasıdır (Goldberg 1969).

Önerme 3.2.5. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M^{2n+1} nin α-kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldlarının Kaehler ve $h = 0$ olmasıdır (Kim and Pak 2005).

Teorem 3.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir lokal simetrik hemen hemen α-Kenmotsu manifold olsun. O zaman,

(i) M^{2n+1} bir α-Kenmotsu manifold,

(ii) $h = 0$,

şartları birbirine denktir. Ayrıca, bu şartlardan herhangi biri sağladığında M^{2n+1} manifoldu $K = -\alpha^2$ kesit eğriliğine sahiptir.

İspat M^{2n+1} nin bir α-Kenmotsu manifold olduğu kabul edilirse $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$ dır. O halde, (3.10) ifadesinden $h = 0$ olur. Diğer yandan, $h = 0$ ise $\nabla\xi = -\alpha\phi^2$, (3.8) ve (3.13) yardımıyla

$$R(X,Y)\xi = \alpha^2 \left[\eta(X)Y - \eta(Y)X\right]$$

dır. Bu son denklemin Z vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X,Y)\xi &= (\nabla_Z R)(X,Y)\xi - R(\nabla_Z X, Y)\xi - R(X, \nabla_Z Y)\xi - R(X,Y)\nabla_Z \xi \\
&= \alpha^2 \left[\eta(\nabla_Z X)Y + g(X, \nabla_Z \xi)Y + \eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X \right. \\
&\quad \left. - g(Y, \nabla_Z \xi)X - \eta(Y)\nabla_Z X\right] - \alpha^2 \left[\eta(\nabla_Z Y)X - \eta(Y)\nabla_Z X\right] \\
&\quad -\alpha^2 \left[\eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X\right] + \alpha R(X,Y)\phi^2 Z \\
&= \alpha^3 \left[g(X,Z)Y - g(Y.Z)X\right] - \alpha R(X,Y)Z
\end{aligned}$$

bulunur. $\nabla R = 0$ olduğundan

$$\alpha \left[\alpha^2 \left(g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\right)\right] - \alpha R(X,Y)Z = 0$$

elde edilir. $\alpha \neq 0$ olduğundan

$$R(X,Y)Z = -\alpha^2 \left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right]$$

yazılır. Böylece M^{2n+1} manifoldu negatif sabit kesit eğriliğine sahip ve $K = -\alpha^2$ dır. $\mathcal{D}$ dağılımının integral altmanifoldu M' olmak üzere, M' bir hemen hemen Kaehler ve total umbilik bir altmanifolddur. M' altmanifoldunun kesit eğriliği her X, Y ortonormal vektörleri için,

$$k'(X,Y) = k(X,Y) + \|\alpha\xi\|^2 = k(X,Y) + \alpha^2 = 0$$

eşitliği ile tanımlanır (Chen 1973). Böylece Önerme 3.2.4. gereğince M' bir Kaehler manifold ve lokal düzlemseldir. Bundan dolayı, Önerme 3.2.5 yardımıyla M^{2n+1} bir α-Kenmotsu manifoldudur.

Şimdi, bir hemen hemen α-kosimplektik manifold örneği verelim.

Örnek 3.2.1. $M^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ 3-boyutlu manifoldunu gözönüne alalım. Burada (x,y,z)-üçlüsü $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlar olmak üzere, vektör alanlarını bazlar cinsinden

$$\begin{aligned}
e_1 &= f_1(z)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(z)\frac{\partial}{\partial y} \\
e_2 &= -f_2(z)\frac{\partial}{\partial x} + f_1(z)\frac{\partial}{\partial y} \\
e_3 &= \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

şeklinde seçelim. Burada c_1, c_2 aynı anda sıfır olmayan sabitler ve $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, f_1, f_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= c_2 e^{-\alpha z}\cos\lambda z - c_1 e^{-\alpha z}\sin\lambda z \\
f_2(z) &= c_1 e^{-\alpha z}\cos\lambda z + c_2 e^{-\alpha z}\sin\lambda z
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır. $\{e_1, e_2, e_3\}$ çatısının M^3 manifoldunun her noktasında lineer bağımsız olduğu açıktır. g Riemann metriği

$$g(e_1,e_1) = g(e_2,e_2) = g(e_3,e_3) = 1, \quad g(e_1,e_2) = g(e_1,e_3) = g(e_2,e_3) = 0$$

ile tanımlansın. Ayrıca, g Riemann metriği tensör çarpımı yardımıyla

$$g = \frac{1}{f_1^2 + f_2^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz$$

şeklinde tanımlanır.

η 1-formu M^3 üzerindeki herhangi bir vektör alanı için, $\eta(X) = g(X, e_3)$ olarak tanımlansın. ϕ $(1,1)$-tipli tensor alanı ise $\phi(e_1) = e_2$, $\phi(e_2) = -e_1$, $\phi(e_3) = 0$ dır. Ayrıca, h $(1,1)$-tipli tensör alanı da $h(e_1) = -\lambda e_1$, $h(e_2) = \lambda e_2$ ve $h(e_3) = 0$ şeklinde tanımlansın. g ve ϕ tensörlerinin lineer özelliği kullanılarak herhangi vektör alanları X, Y için,

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)e_3,\ \eta(e_3) = 1,\ g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

elde edilir. O halde, M^3manifoldunun bir hemen hemen α-kosimplektik olduğunu göstermek için, Φ temel 2-formunun sadece sıfırdan farklı bileşenlerini bulmak yeterli olacaktır. Bunun için,

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= -\Phi\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &= -\frac{1}{f_1^2+f_2^2}\\ &= -\frac{e^{-2\alpha z}}{c_1^2+c_2^2}\end{aligned}$$

eşitliğini kullanarak

$$\Phi=\left(-\frac{2e^{-2\alpha z}}{c_1^2+c_2^2}\right)dx\wedge dy$$

elde edilir. Bu nedenle, $d\Phi = 2\alpha\eta\wedge\Phi$ olduğu kolayca görülür. Benzer olarak, ispat Levi-Civita konneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörü kullanılarak hesaplanabilir. Buna ilaveten, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensörü hesaplandığında $N_\phi \neq 0$ olduğu görülür. Başka bir değişle, bu örnek 3-boyutta normal olmayan bir hemen hemen α-kosimplektik manifoldun varlığını göstermektedir.

4 BAZI YARI SİMETRİK ŞARTLARI SAĞLAYAN α-KENMOTSU MANİFOLDLAR

Bu bölümde belli bazı yarı simetrik koşulları sağlayan α-Kenmotsu manifoldlar ele alınacaktır. Burada α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ şeklinde tanımlanan bir diferensiyellenebilir fonksiyondur. Yarı simetrik manifold dışında özellikle Weyl konformal, konsirkular ve projektif yarı simetrik manifoldlar çalışılmıştır. Yarı simetrik tensör alanlarının manifold yapısı üzerindeki etkileri incelenmiştir. Son olarak, α fonksiyonuna bağlı olarak α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde örnekler verilmiştir.

4.1 α-Kenmotsu Manifoldlar

Bilindiği üzere normal hemen hemen α-Kenmotsu manifolduna α-Kenmotsu manifold denir. Önerme 2.1.2.3 ve Teorem 2.1.2.2 gözönüne alınıp Riemann eğrilik tensörünün özellikleri kullanıldığında üçüncü bölümde verilen eğrilik özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir:

Önerme 4.1.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$, bir hemen hemen α-Kenmotsu manifold olsun. Herhangi X, Y vektör alanları için

$$\nabla_X \xi = -\alpha \phi^2 X, \tag{4.1}$$

$$(\nabla_X \eta)(Y) = \alpha \left[g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \right], \tag{4.2}$$

$$(\bigtriangledown_X \phi)\, Y = -\alpha \left[g(X, \phi Y)\xi + \eta\,(Y)\,\phi X \right], \tag{4.3}$$

$$R(X,Y)\xi = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right] (\eta(X)Y - \eta(Y)X), \tag{4.4}$$

$$R(X,\xi)\xi = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right] (\eta(X)\xi - X), \tag{4.5}$$

$$R(\xi,X)Y = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right] (\eta(Y)X - g(X,Y)\xi), \tag{4.6}$$

$$g(R(\xi,X)Y,\xi) = \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right] (-g(X,Y) + \eta(X)\eta(Y)), \tag{4.7}$$

$$S(X,\xi) = -2n \left[\alpha^2 + \xi(\alpha)\right] \eta(X), \tag{4.8}$$

$$S(\xi,\xi) = -2n(\alpha^2 + \xi(\alpha)), \tag{4.9}$$

$$S(\phi X,\phi Y)=S(X,Y)+2n\left[\alpha^{2}+\xi(\alpha)\right]\eta(X)\eta(Y), \tag{4.10}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada ∇ Riemann metriğinin Levi-Civita konneksiyonu ve α, M^{2n+1} üzerinde $d\alpha\wedge\eta=0$ şeklinde tanımlı bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

İspat Bir $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$hemen hemen α-kosimplektik manifoldu

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi &= (\nabla_{Y}\phi h)X-(\nabla_{X}\phi h)Y-\alpha\left[\eta(X)\phi hY-\eta(Y)\phi hX\right] \\ &\quad+\left[\alpha^{2}+\xi(\alpha)\right]\left[\eta(X)Y-\eta(Y)X\right], \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde yazılır (Aktan 2013). Manifold yapısının normal olması $h=0$ durumunu gerektireceğinden (4.11) ifadesi kullanılırsa (4.4) kolayca elde edilir. (4.4) eşitliğinde X yerine ξ vektör alanı alınırsa (4.5) bulunur. Ayrıca, (4.5) eşitliğinin her iki tarafının Y vektör alanına göre iç çarpımı alınırsa

$$g(R(X,\xi)\xi,Y)=\left[\alpha^{2}+\xi(\alpha)\right](\eta(X)g(\xi,Y)-g(X,Y)), \tag{4.12}$$

yazılır. Burada Riemann eğrilik tensörü özellikleri kullanılıp, $R(\xi,X)Y$ çekilirse (4.6) elde edilir. Benzer olarak, (4.6) eşitliğinin her iki tarafının ξ vektör alanına göre tekrardan iç çarpımı alınırsa (4.7) bulunur. (4.4) eşitliğinden

$$g(R(X,Y)\xi,Z)=\left[\alpha^{2}+\xi(\alpha)\right]\left[\eta(X)g(Y,Z)-\eta(Y)g(X,Z)\right] \tag{4.13}$$

yazılır. $\{E_i\}$, $i=1,2,\ldots,(2n+1)$ tanjant uzayın herhangi bir noktasının bir ortonormal bazı olmak üzere, $X=Z=E_i$ için kontraksiyon yapılırsa,

$$\sum_{i=1}^{2n+1}g(E_i,Y)\xi,E_i)=\left[\alpha^{2}+\xi(\alpha)\right]\left(\sum_{i=1}^{2n+1}\eta(E_i)g(Y,E_i)-\eta(Y)\sum_{i=1}^{2n+1}g(E_i,E_i)\right)$$

bulunur. Burada Ricci eğrilik tensörü tanımı yardımıyla (4.8) elde edilir. (4.8) eşitliğinde X yerine ξ vektör alanı alındığında (4.9) aşikar olarak görülür. Diğer yandan, ϕ tensör alanının ters simetrik özelliğinden

$$\begin{aligned} S(\phi X,\phi Y) &= -S(\phi^{2}X,Y) \\ &= -S(-X+\eta(X)\xi,Y) \\ &= S(X,Y)-\eta(X)S(Y,\xi) \end{aligned}$$

yazılır. Burada (4.8) eşitliğinin yardımıyla (4.10) elde edilir.

4.2 Yarı Simetrik α-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldlar için bazı sonuçlar ortaya koyulacaktır.

Teorem 4.2.1.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir α-Kenmotsu manifold olsun. M^{2n+1} manifoldu yarı simetrik ise o zaman M^{2n+1} üzerinde sabit eğrilik mevcut değildir.

İspat M^{2n+1} manifoldunun yarı simetrik yani, $R.R = 0$ olduğunu kabul edelim. M^{2n+1} üzerindeki her X, U, V ve W vektör alanları için yarı simetrik şartı

$$\begin{aligned} 0 &= R(X,\xi)R(U,V)W - R(R(X,\xi)U,V)W \\ &\quad -R(U,R(X,\xi)V)W - R(U,V)R(X,\xi)W, \end{aligned} \tag{4.14}$$

eşitliğine denktir. Öncelikle M^{2n+1} üzerinde α fonksiyonunu sabit alalım. (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yardımıyla (4.14) eşitliğinde $U = \xi$ alırsak, (4.14) eşitliğindeki tensör ifadeleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R(X,\xi)R(\xi,V)W &= -\alpha^4\eta(X)g(V,W)\xi + \alpha^4 g(V,W)X \\ &\quad +\alpha^4\eta(W)g(X,V)\xi - \alpha^4\eta(V)\eta(W)X, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} R(R(X,\xi)\xi,V)W &= -\alpha^4\eta(X)g(V,W)\xi + \alpha^4\eta(X)\eta(W)V \\ &\quad -\alpha^2 R(X,V)W, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} R(\xi,R(X,\xi)V)W &= \alpha^2\eta(W)g(X,V)\xi - \alpha^2\eta(V)\eta(W)X \\ &\quad -\alpha^2\eta(W)g(X,V)\xi + \alpha^2\eta(V)g(X,W)\xi, \end{aligned} \tag{4.17}$$

ve

$$\begin{aligned} R(\xi,V)R(X,\xi)W &= -\alpha^4\eta(V)g(X,W)\xi + \alpha^4\eta(W)g(X,V)\xi \\ &\quad +\alpha^4 g(X,W)V - \alpha^4\eta(X)\eta(W)V, \end{aligned} \tag{4.18}$$

şeklinde yazılır. (4.15), (4.16), (4.17) ve (4.18) eşitlikleri (4.14) ifadesinde birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha^4 g(V,W)X + \alpha^2 R(X,V)W - \alpha^4 g(X,W)V \\ &\quad -\alpha^4\eta(V)\eta(W)X + \alpha^2\eta(V)\eta(W)X \\ &\quad -\alpha^2\eta(V)g(X,W)\xi + \alpha^4\eta(V)g(X,W)\xi. \end{aligned} \tag{4.19}$$

bulunur. Sabit uzay eğriliği tanımından

$$R(X,V)W = k\left[-g(X,W)V + g(V,W)X\right]$$

olacak şekilde bir k reel sabiti mevcut olmalıdır. Fakat (4.19) eşitliği ele alındığında yukarıdaki şartın sağlamadığı aşikardır. O halde, α sabit fonksiyonu için M^{2n+1} nin sabit eğriliği yoktur. Şimdi, α yı M^{2n+1} üzerinde $d\alpha \wedge \eta = 0$ olacak şekilde bir diferensiyellenebilir fonksiyon olarak seçelim. Bu durumda (4.14) eşitliği M^{2n+1} üzerinde her X, V ve W vektör alanları için

$$\begin{aligned} & F^2(\alpha)g(V,W)X + F(\alpha)R(X,V)W - F^2(\alpha)g(X,W)V \\ = \; & F^2(\alpha)\eta(V)\eta(W)X - F(\alpha)\eta(V)\eta(W)X \\ & + F(\alpha)\eta(V)g(X,W)\xi - F^2(\alpha)\eta(V)g(X,W)\xi, \end{aligned} \tag{4.20}$$

formuna dönüşür. Burada kolaylık açısından $F(\alpha) = [\alpha^2 + \xi(\alpha)]$ şeklinde alınmıştır. Ardından (4.20) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned} R(X,V)W &= F(\alpha)\left[g(X,W)V - g(V,W)X\right] \\ &\quad + (F^2(\alpha) - F(\alpha))\eta(V)\left[\eta(W)X - g(X,W)\xi\right]. \end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. Böylece α dif.bilir fonksiyonu için de M^{2n+1} sabit uzay eğriliğine sahip değildir. Bu nedenle, aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 4.2.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir yarı simetrik α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer α ξ vektör alanı boyunca paralel ($F(\alpha) = \alpha^2$) ise o zaman $\alpha \neq 0$ reel sabit olmak üzere M^{2n+1} üzerinde sabit eğrilik yoktur.

Sonuç 4.2.2. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir yarı simetrik Kenmotsu manifold olsun. O zaman M^{2n+1} manifoldu -1 sabit eğriliğine sahiptir.

Teorem 4.2.2.$(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir α-Kenmotsu manifold ve α ξ vektör alanı boyunca paralel olsun. O halde, M^{2n+1} manifoldu lokal simetrik ise o zaman M^{2n+1} manifoldu $-\alpha^2$ negatif sabit uzay eğriliğine sahiptir.

İspat Verilen hipotez yardımıyla Riemann eğrilik tensörü R

$$R(X,Y)\xi = \alpha^2\left[\eta(X)Y - \eta(Y)X\right],$$

şeklinde yazılır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının keyfi Z vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X,Y)\xi &= \nabla_Z R(X,Y)\xi - R(\nabla_Z X,Y)\xi - R(X,\nabla_Z Y)\xi - R(X,Y)\nabla_Z\xi \\
&= \alpha^2\left[\eta(\nabla_Z X)Y + g(X,\nabla_Z\xi)Y + \eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X\right. \\
&\quad \left. - g(Y,\nabla_Z\xi)X - \eta(Y)\nabla_Z X\right] - \alpha^2\left[\eta(\nabla_Z Y)X - \eta(Y)\nabla_Z X\right] \\
&\quad -\alpha^2\left[\eta(X)\nabla_Z Y - \eta(\nabla_Z Y)X\right] + \alpha R(X,Y)\phi^2 Z \\
&= \alpha^3\left[g(X,Z)Y - g(Y.Z)X\right] - \alpha R(X,Y)Z.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.22) eşitliğinin kullanılmasıyla lokal simetri şartı altında ($\nabla R = 0$) $\alpha \neq 0$ için

$$R(X,Y)Z = -\alpha^2\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right],$$

bulunur. Bu son eşitlik sayesinde manifoldun $k = -\alpha^2$ negatif sabit eğriliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Böylece ispat tamamlanmış olur. Ayrıca, $\alpha = 1$ durumu için aşağıdaki sonuçları da verebiliriz:

Hatırlatma 4.2.1. Bir $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ Kenmotsu manifold için aşağıdaki koşullar denktir.

i) M^{2n+1} manifoldu -1 sabit eğriliğine sahiptir,

ii) M^{2n+1} manifoldu lokal simetriktir,

iii) M^{2n+1} manifoldu yarı simetriktir,

iv) M^{2n+1} üzerinde herhangi bir X vektör alanı için $R(X,\xi)\cdot R = 0$ dır.

4.3 Ricci Yarı Simetrik α-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda M^{2n+1} üzerinde her X, Y, Z ve U vektör alanları için

$$\begin{aligned}
(R(X,Y)\cdot S)(Z,U) &= R(X,Y)S(Z,U) - S(R(X,Y)Z,U) \\
&\quad -S(Z,R(X,Y)U),
\end{aligned} \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlı

$$(R(X,Y)\cdot S)(Z,U) = 0, \tag{4.24}$$

şartını sağlayan α-Kenmotsu manifoldları inceleyeceğiz.

Teorem 4.3.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M^{2n+1} bir Ricci yarı simetrik manifold $(R.S = 0)$ ise o zaman M^{2n+1} manifoldu $S = -2nF(\alpha)g$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

İspat Varsayımımız gereğince (4.23) ve (4.24) eşitliklerinin birlikte ele alınmasıyla her X, Z, U vektör alanları için

$$S(R(X,\xi)Z, U) + S(Z, R(X,\xi)U) = 0, \tag{4.25}$$

elde edilir. $U = \xi$ için (4.25) eşitliği

$$F(\alpha)\left[g(X,Z)S(\xi,\xi) - \eta(Z)S(X,\xi) + \eta(X)S(Z,\xi) - S(X,Z)\right] = 0, \tag{4.26}$$

şeklinde yazılır. Burada $F(\alpha) = [\alpha^2 + \xi(\alpha)]$ dır.(4.8)ve (4.9) eşitliklerinin (4.26) eşitliğinde hesaba katılmasıyla

$$2nF^2(\alpha)g(X,Z) + F(\alpha)S(X,Z) = 0,$$

bulunur. Buradan

$$S(X,Z) = -2nF(\alpha)g(X,Z),$$

olduğu kolaylıkla görülür. O halde istenen ispata ulaşılmıştır.

Hatırlatma 4.3.1. $R \cdot R = 0 \subset R \cdot S = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $R \cdot R = 0$ eşitliği sağlandığında (4.19) eşitliği yardımıyla

$$S(X,Z) = -2n\alpha^2 g(X,Z) + 2n(\alpha^2 - 1)\eta(X)\eta(Z),$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\alpha = 1$ için aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.3.1. Bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ yarı simetrik Kenmotsu manifoldu $S = -2ng$ ile verilen bir Einstein manifoldudur.

Hatırlatma 4.3.2. Bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ Kenmotsu manifold için aşağıdaki koşullar denktir.

i) M^{2n+1} manifoldu $S = -2ng$ ile verilen bir Einstein uzaydır,

ii) M^{2n+1} manifoldu lokal Ricci simetriktir,

iii) M^{2n+1} manifoldu Ricci yarı simetriktir,

iv) M^{2n+1} üzerinde herhangi bir X vektör alanı için $R(X,\xi) \cdot S = 0$ dır.

4.4 Konformal Yarı Simetrik α-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda α-Kenmotsu manifoldlar üzerinde konformal yarı simetrik şartını araştıracağız. Kenmotsu manifoldların konformal flat olması için gerek ve yeter koşulun manifoldun -1 sabit eğriliğine sahip olması gerektiği bilinmektedir (Kenmotsu 1972). Şimdi, $R.C = 0$ şartını α-Kenmotsu yapı üzerinde inceleyelim.

Teorem 4.4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir konformal yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman M^{2n+1} manifoldunun konformal flat olması için gerek ve yeter şart manifoldun $F(\alpha) = 0$ olmasıdır.

İspat Hipotez gereğince M^{2n+1} konformal yarı simetrik olsun. O halde $R.C = 0$ eşitliği

$$\begin{aligned} 0 &= R(X,\xi)C(U,V)W - C(R(X,\xi)U,V)W \\ &\quad -C(U,R(X,\xi)V)W - C(U,V)R(X,\xi)W. \end{aligned} \tag{4.27}$$

ifadesine denktir. Tanım 2.1.1.10 daki (2.3) eşitliği gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} g(C(X,Y)Z,\xi) &= \left[-F(\alpha) + \frac{2nF(\alpha)}{2n-1} + \frac{r}{2n(2n-1)}\right]\eta(X)g(Y,Z) \\ &\quad + \left[F(\alpha) - \frac{2nF(\alpha)}{2n-1} - \frac{r}{2n(2n-1)}\right]\eta(Y)g(X,Z) \\ &\quad + \frac{1}{2n-1}\left[\eta(Y)S(X,Z) - \eta(X)S(Y,Z)\right]. \end{aligned} \tag{4.28}$$

elde edilir. Bundan sonraki hesaplamalarda kolaylık açısından $G = -F(\alpha) + \frac{2nF(\alpha)}{2n-1} + \frac{r}{2n(2n-1)}$ alınacaktır. Buna göre (4.28) eşitliği $X = \xi$ için hesaplanırsa

$$\begin{aligned} g(C(\xi,Y)Z,\xi) &= G\left[g(Y,Z) - \eta(Y)\eta(Z)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2n-1}\left[-2nF(\alpha)\eta(Y)\eta(Z) - S(Y,Z)\right]. \end{aligned} \tag{4.29}$$

bulunur. (4.28), (4.29) eşitlikleri ve Riemann eğrilik özellikleri (4.27) eşitliğine uygulanırsa, bu eşitlikteki ifadeler, sırasıyla,

$$\begin{aligned} g(R(X,\xi)C(U,V)W,\xi) &= F(\alpha)g(C(U,V)W,X) \\ &\quad -F(\alpha)\eta(X)\left[G\left(\eta(U)g(V,W) - \eta(V)g(U,W)\right)\right. \\ &\quad \left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(U,W) - \eta(U)S(V,W)\right)\right], \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$
\begin{aligned}
g(C(R(X,\xi)U,V)W,\xi) &= -F(\alpha)\eta(U)\left[G\left(\eta(X)g(V,W)-\eta(V)g(X,W)\right)\right.\\
&\quad \left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(X,W)-\eta(X)S(V,W)\right)\right]\\
&\quad +F(\alpha)g(X,U)\left[G\left(g(V,W)-\eta(V)\eta(W)\right)\right. \qquad (4.31)\\
&\quad \left.-\tfrac{1}{2n-1}\left(2nF(\alpha)\eta(V)\eta(W)+S(V,W)\right)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(C(U,R(X,\xi)V)W,\xi) &= F(\alpha)\eta(V)\left[G\left(\eta(X)g(U,W)-\eta(U)g(X,W)\right)\right.\\
&\quad \left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(U)S(X,W)-\eta(X)S(U,W)\right)\right]\\
&\quad -F(\alpha)g(X,V)\left[G\left(g(U,W)-\eta(U)\eta(W)\right)\right. \qquad (4.32)\\
&\quad \left.-\tfrac{1}{2n-1}\left(2nF(\alpha)\eta(U)\eta(W)+S(U,W)\right)\right],
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
g(C(U,V)R(X,\xi)W,\xi) &= -F(\alpha)\eta(W)\left[G\left(\eta(U)g(X,V)-\eta(V)g(X,U)\right)\right.\\
&\quad \left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(X,U)-\eta(U)S(V,X)\right)\right], \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

dır. Burada $g(C(X,Y)\xi,\xi)=0$ dır. (4.30), (4.31), (4.32) ve (4.33) eşitlikleri (4.27) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&F(\alpha)g(C(U,V)W,X)-F(\alpha)\eta(X)\left[G\left(\eta(U)g(V,W)-\eta(V)g(U,W)\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(U,W)-\eta(U)S(V,W)\right)\right]+F(\alpha)\eta(U)\left[G\left(\eta(X)g(V,W)-\eta(V)g(X,W)\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(X,W)-\eta(X)S(V,W)\right)\right]-F(\alpha)g(X,U)\left[G\left(g(V,W)-\eta(V)\eta(W)\right)\right.\\
&\left.-\tfrac{1}{2n-1}\left(2nF(\alpha)\eta(V)\eta(W)+S(V,W)\right)\right]-F(\alpha)\eta(V)\left[G\left(\eta(X)g(U,W)-\eta(U)g(X,W)\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(U)S(X,W)-\eta(X)S(U,W)\right)\right]+F(\alpha)g(X,V)\left[G\left(g(U,W)-\eta(U)\eta(W)\right)\right.\\
&\left.-\tfrac{1}{2n-1}\left(2nF(\alpha)\eta(U)\eta(W)+S(U,W)\right)\right]+F(\alpha)\eta(W)\left[G\left(\eta(U)g(X,V)-\eta(V)g(X,U)\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{2n-1}\left(\eta(V)S(X,U)-\eta(U)S(V,X)\right)\right]=0
\end{aligned} \qquad (4.34)
$$

elde edilir. $\{E_i,\ i=1,2,\ldots,2n+1\}$ tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olsun. O halde, (2.3) eşitliği yardımıyla

$$
\sum_{i=1}^{2n+1} g(C(E_i,Y)Z,E_i)=0, \qquad (4.35)
$$

bulunur. (4.34) eşitliğinde $i=1,2,\ldots,2n+1$ ve $X=U=E_i$ için kontraksiyon yapılır ve (4.35) kullanılırsa

$$
S(V,W)=(2n-1)Gg(V,W)-E\eta(V)\eta(W), \qquad (4.36)
$$

elde edilir. Burada E, $E = \left(\frac{r}{2n} + F(\alpha)(2n+1)\right)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur.

Son olarak, (4.34) ve (4.36) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} g(C(U,V)W,X) &= \left(\frac{E-2nF(\alpha)}{2n-1} - G\right) g(X,U)\eta(V)\eta(W) \\ &\quad + \left(G - \frac{E+2nF(\alpha)}{2n-1}\right) g(X,V)\eta(U)\eta(W), \end{aligned} \tag{4.37}$$

ifadesine ulaşılır. Sonra tekrardan (4.37) eşitliğinde $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$ ve $X = U = E_i$ için kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (2n+1)\left(\frac{E-2nF(\alpha)}{2n-1} - G\right)\eta(V)\eta(W) \\ &\quad + \left(G - \frac{E+2nF(\alpha)}{2n-1}\right)\eta(V)\eta(W), \end{aligned}$$

elde edilir ki bu son eşitlik $F(\alpha) = 0$ olmasını gerektirir. Bu durum ise α nın sabit ve $\alpha = 0$ olmasını gerektirir. Fakat M^{2n+1} manifoldu α-Kenmotsu olduğundan $\alpha \neq 0$ dır. O halde, konformal yarı simetrik şartı altında M^{2n+1} manifoldu konformal flat olamaz. Bu yüzden M^{2n+1} manifoldunu α-kosimplektik manifolda genişletirsek aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.4.1. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir konformal yarı simetrik α-kosimplektik manifold olsun. O zaman M^{2n+1} manifoldunun konformal flat olması için gerek ve yeter şart manifoldun kosimplektik olmasıdır.

4.5 Projektif Yarı Simetrik α-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda projektif flat ve projektif yarı simetrik α-Kenmotsu manifodları çalışacağız. Özellikle $R.P = 0$ şartının manifold üzerindeki etkilerini inceleyeceğiz.

Teorem 4.5.1. Bir $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ projektif flat α-Kenmotsu manifoldu bir Einstein uzayıdır.

İspat $P = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde, (2.5) eşitliğinden

$$R(X,Y)Z = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y\right], \tag{4.38}$$

yazılır. (4.38) eşitliği gözönüne alındığında

$$R(X,Y,Z,W) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)g(X,W) - S(X,Z)g(Y,W)\right], \tag{4.39}$$

bulunur. Burada $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ dır.(4.39) eşitliğinde $W = \xi$ alınırsa

$$\eta(R(X,Y)Z) = \frac{1}{2n}\left[S(Y,Z)\eta(X) - S(X,Z)\eta(Y)\right],$$

bulunur. Bu son eşitlikte tekrardan $X = \xi$ alınır ve (4.5), (4.8) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$S(Y,Z) = -2nF(\alpha)g(Y,Z), \tag{4.40}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.5.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir projektif yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman $n > 0$ için M^{2n+1} projektif flat α-Kenmotsu manifoldudur.

İspat (2.5) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\eta(P(X,Y)Z) &= -F(\alpha)\eta(X)g(Y,Z) + F(\alpha)\eta(Y)g(X,Z)\\ &\quad -\frac{1}{2n}\left[\eta(X)S(Y,Z) - \eta(Y)S(X,Z)\right],\end{aligned} \tag{4.41}$$

bulunur. (4.41) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$\eta(P(\xi,Y)Z) = -F(\alpha)g(Y,Z) - \frac{1}{2n}S(Y,Z) \tag{4.42}$$

ve $Z = \xi$ için

$$\eta(P(X,Y)\xi) = 0, \tag{4.43}$$

elde edilir.

Şimdi, $R(X,Y)\cdot P$ tensör çarpımını gözönüne alalım. Bu çarpım her X,Y,U,V ve Z vektör alanları için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)P)(U,V)Z &= R(X,Y)\cdot P(U,V)Z - P(R(X,Y)U,V)Z\\ &\quad -P(U,R(X,Y)V)Z - P(U,V)R(X,Y)Z.\end{aligned} \tag{4.44}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.44) eşitliğinde hipotezimizden dolayı $R(X,Y)\cdot P = 0$ olduğunu kabul edersek

$$\begin{aligned}0 &= R(X,Y)\cdot P(U,V)Z - P(R(X,Y)U,V)Z\\ &\quad -P(U,R(X,Y)V)Z - P(U,V)R(X,Y)Z.\end{aligned} \tag{4.45}$$

yazılır. (4.45) eşitliğinde $Y = \xi$ alınıp her iki tarafına ξ vektör alanına göre iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g(R(X,\xi)\cdot P(U,V)Z,\xi) - g(P(R(X,\xi)U,V)Z,\xi) \\ &\quad -g(P(U,R(X,\xi)V)Z,\xi) - g(P(U,V)R(X,\xi)Z,\xi), \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.46) eşitliğindeki ifadeler (4.4) (4.5) (4.6)(4.7) (4.8) ve (2.5) eşitlikleri yardımıyla birlikte hesaba katıldığında

$$\begin{aligned} 0 &= F(\alpha)P(U,V,Z,X) + F^2(\alpha)g(V,Z)g(U,X) \\ &\quad +\frac{F(\alpha)}{2n}g(U,X)S(V,Z) + F^2(\alpha)\eta(Z)\eta(V)g(U,X) \\ &\quad -F^2(\alpha)g(U,Z)g(V,X) - \frac{F(\alpha)}{2n}g(V,X)S(U,Z) \\ &\quad -F^2(\alpha)\eta(Z)\eta(U)g(V,X) - \frac{F(\alpha)}{2n}\eta(U)\eta(Z)S(X,V) \\ &\quad +\frac{F(\alpha)}{2n}\eta(Z)\eta(V)S(X,U), \end{aligned} \tag{4.47}$$

bulunur. Burada $P(U,V,Z,X) = g(P(U,V)Z,X)$ şeklinde tanımlıdır.

$\{E_i,\ i = 1,2,\ldots,2n+1\}$ tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olsun. O halde, (2.5) eşitliği yardımıyla

$$\sum_{i=1}^{2n+1} g(P(E_i,Y)Z,E_i) = 0, \tag{4.48}$$

bulunur. O halde (4.47) eşitliğinde $i = 1,2,\ldots,2n+1$ ve $X = U = E_i$ için kontraksiyon yapılır ve (4.48) kullanılırsa

$$S(V,Z) = -2nF(\alpha)g(V,Z) - E\eta(V)\eta(Z), \tag{4.49}$$

elde edilir. Burada E, $E = \left(\frac{r}{2n} + F(\alpha)(2n+1)\right)$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur. (4.49) eşitliğinde tekrardan $V = Z = E_i$ için kontraksiyon yapıldığında

$$r = -2n(2n+1)F(\alpha), \tag{4.50}$$

olduğu görülür. (4.49) ve (4.50) eşitlikleri (4.47) eşitliğinde birlikte hesaplanırsa

$$P(U,V,Z,Y) = 0 \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.51) eşitliğinden sıfırdan farklı her Y vektör alanı için

$$P(U,V)Z=0, \tag{4.52}$$

sonucuna ulaşılır. Bu nedenle, M^{2n+1} konformal flat manifolddur.

4.6 Konsirküler Yarı Simetrik α-Kenmotsu Manifoldlar

Bu kısımda konsirküler flat ve konsirküler yarı simetrik α-Kenmotsu manifodları ele alacağız. Öncelikle flat durumunu inceleyip daha sonra $R\cdot\overline{C}=0$ şartını çalışacağız.

Teorem 4.6.1. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir konsirküler flat α-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman M^{2n+1} manifoldu $r=-2n(2n+1)F(\alpha)$ sabit skalar eğriliğine sahiptir.

İspat $\overline{C}=0$ olduğunu kabul edelim. O halde, (2.4) eşitliğinden

$$R(X,Y)Z=\frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y\right], \tag{4.53}$$

yazılır. (4.53) eşitliği kullanılarak

$$R(X,Y,Z,W)=\frac{r}{2n(2n+1)}\left[g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\right], \tag{4.54}$$

bulunur. Burada $R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$ dır. (4.54) eşitliğinde $W=\xi$ alınırsa

$$\left(\frac{r}{2n(2n+1)}+F(\alpha)\right)\left[\eta(X)g(Y,Z)-\eta(Y)g(X,Z)\right]=0,$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\frac{r}{2n(2n+1)}+F(\alpha)=0, \tag{4.55}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Ayrıca, aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.6.1. Kosimplektik durumun $(\alpha=0)$ olması için gerek ve yeter şart $r=0$ olmasıdır.

Teorem 4.6.2. $(M^{2n+1},\phi,\xi,\eta,g)$ bir konsirküler yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldu olsun. O zaman $n>0$ için M^{2n+1} konsirküler flat α-Kenmotsu manifoldudur.

İspat (2.4) ve (4.4) eşitliklerinden

$$\eta(\overline{C}(X,Y)Z) = \left(F(\alpha) + \frac{r}{2n(2n+1)}\right)(\eta(Y)g(X,Z) - \eta(X)g(Y,Z)), \tag{4.56}$$

bulunur. (4.56) eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa

$$\eta(\overline{C}(\xi,Y)Z) = \left(F(\alpha) + \frac{r}{2n(2n+1)}\right)(\eta(Y)\eta(Z) - g(Y,Z)) \tag{4.57}$$

ve $Z = \xi$ için

$$\eta(\overline{C}(X,Y)\xi) = 0 \tag{4.58}$$

elde edilir.

Şimdi, $R(X,Y) \cdot \overline{C}$ tensör çarpımını gözönüne alalım. Bu çarpım her X, Y, U, V ve Z vektör alanları için

$$\begin{aligned}(R(X,Y)\overline{C})(U,V)Z &= R(X,Y) \cdot \overline{C}(U,V)Z - \overline{C}(R(X,Y)U,V)Z \\ &\quad -\overline{C}(U,R(X,Y)V)Z - \overline{C}(U,V)R(X,Y)Z,\end{aligned} \tag{4.59}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.59) eşitliğinde hipotezimizden dolayı $R(X,Y) \cdot \overline{C} = 0$ olduğunu kabul edersek

$$\begin{aligned}0 &= R(X,Y) \cdot \overline{C}(U,V)Z - \overline{C}(R(X,Y)U,V)Z \\ &\quad -\overline{C}(U,R(X,Y)V)Z - \overline{C}(U,V)R(X,Y)Z.\end{aligned} \tag{4.60}$$

yazılır. (4.60) eşitliğinde $Y = \xi$ alınıp her iki tarafına ξ vektör alanına göre iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}0 &= g(R(X,\xi) \cdot \overline{C}(U,V)Z,\xi) - g(\overline{C}(R(X,\xi)U,V)Z,\xi) \\ &\quad -g(\overline{C}(U,R(X,\xi)V)Z,\xi) - g(\overline{C}(U,V)R(X,\xi)Z,\xi),\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. Teorem 4.5.2 de olduğu gibi yukarıdaki eşitliğin bütün terimleri hesaplanıp, $\{E_i,\ i = 1, 2, \ldots, 2n+1\}$ tanjant uzayın herhangi bir noktasındaki bir ortonormal baz olmak üzere, $i = 1, 2, \ldots, 2n+1$ ve $X = U = E_i$ için kontraksiyon yapılırsa

$$S(V,Z) = -2nF(\alpha)g(V,Z), \tag{4.62}$$

bulunur.Buradaki hesaplamalarda $\overline{C}(U,V,Z,X) = g(\overline{C}(U,V)Z,X)$ olarak alınmıştır.(4.61) ve (4.62) birlikte düşünülürse

$$\overline{C}(U,V,Z,Y) = 0,$$

veya

$$\overline{C}(U,V)Z = 0,$$

elde edilir. Böylece ispata ulaşmış oluruz.

Bilindiği üzere, genellikle bir konsirküler Riemann manifoldu Einstein manifoldudur. Bu durumda, bir konsirküler α-Kenmotsu manifoldu için aşağıdaki teoremi de verebiliriz.

Teorem 4.6.3. $(M^{2n+1}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir konsirküler yarı simetrik α-Kenmotsu manifoldu, $n > 0$ için bir Einstein manifoldu ve $r = -2n(2n+1)F(\alpha)$ sabit skalar eğriliğine sahiptir.

Örnek 4.6.1. $M^3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\}$ 3-boyutlu manifoldunu gözönüne alalım. Burada (x,y,z)-üçlüsü $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlar olmak üzere, vektör alanlarını bazlar cinsinden

$$\begin{aligned} e_1 &= f_1(z)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\ e_2 &= -f_2(z)\frac{\partial}{\partial x} + f_1(z)\frac{\partial}{\partial y}, \\ e_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

şeklinde alalım. Burada c_1, c_2 aynı anda sıfır olmayan sabitler ve $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, olmak üzere, f_1, f_2 fonksiyonları

$$\begin{aligned} f_1(z) &= c_2 e^{-\alpha z}, \\ f_2(z) &= c_1 e^{-\alpha z}, \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Böylece M^3 manifoldunun bir α-Kenmotsu olduğunu göstermek için, Φ temel 2-formunun sadece sıfırdan farklı bileşenlerini bulmak yeterli olacaktır. Bunun için,

$$\Phi(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = -\Phi(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{1}{f_1^2 + f_2^2} = -\frac{e^{2\alpha z}}{c_1^2 + c_2^2},$$

eşitliğini kullanarak

$$\Phi = -\frac{2e^{2\alpha z}}{c_1^2 + c_2^2}(dx \wedge dy),$$

elde edilir. Burada Φ nin dış türevi alınırsa

$$d\Phi = -\frac{4\alpha e^{2\alpha z}}{c_1^2 + c_2^2}(dx \wedge dy \wedge dz),$$

$\eta = dz$ eşitliğinden $d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$ olduğu kolayca görülür. Benzer olarak, ispat Levi-Civita konneksiyonu ve Riemann eğrilik tensörü kullanılarak da hesaplanabilir. Buna ilaveten, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensörü hesaplandığında $N_\phi = 0$ olduğu görülür.

Örnek 4.6.2. $M^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ 3-boyutlu manifoldunu gözönüne alalım. Burada (x, y, z)-üçlüsü $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlardır. Vektör alanları bazlar cinsinden

$$e_1 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial x}, \quad e_2 = e^{z^3}\frac{\partial}{\partial y}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z},$$

ile verilsin. α bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere, Φ temel 2-formunun sadece sıfırdan farklı bileşenlerini bulmak yeterli olacaktır. O halde,

$$\Phi(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = -\Phi(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}) = -\frac{1}{e^{2z^3}},$$

eşitliğinden

$$\Phi = -\frac{1}{e^{2z^3}}(dx \wedge dy), \tag{4.63}$$

elde edilir. Burada $\Phi(e_{1,}e_2) = -1$ ve aksi taktirde $i \leq j$ için $\Phi(e_{i,}e_j) = 0$ dır. Φ nin dış türevi tanımından

$$d\Phi = 6z^2 e^{-2z^3}(dx \wedge dy \wedge dz), \tag{4.64}$$

bulunur. $\eta = dz$ olduğundan (4.63) ve (4.64) eşitlikleri yardımıyla

$$d\Phi = -6z^2\left(\eta \wedge \Phi\right),$$

yazılır. Burada α fonksiyonu $\alpha(z) = -3z^2$ şeklinde tanımlıdır. Bundan başka, ϕ tensör alanına göre Nijenhuis tensörü hesaplandığında $N_\phi = 0$ olduğu görülür. Bu nedenle, M^3 bir α-Kenmotsu manifoldudur.

5 3-BOYUTLU YARI SİMETRİK HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde, 3-boyutlu yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifoldları inceleyeceğiz. Yarı simetri yardımıyla bir çok orijinal sonuçlar bulunacaktır.

5.1 3-Boyutlu Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda, öncelikli amacımız 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik manifold yapısını incelemektir.

(M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Ayrıca, M manifoldunun

$$U = \{p \in M : \; p \text{ noktasının bir komşuluğunda } h \neq 0\}$$

ve

$$U^{'} = \{p \in M : \; p \text{ noktasının bir komşuluğunda } h = 0\}$$

olacak şekilde U ve $U^{'}$ açık altcümlelerini gözönüne alalım. h tensör alanı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olduğundan $U \cup U^{'}$ birleşim cümlesi açık ve M manifoldunun bir yoğun altcümlesi olur. Böylece $U \cup U^{'}$ üzerinde sağlanan her özellik M üzerinde de sağlanır. O halde, her $p \in U \cup U^{'}$ için $\{e, \phi e, \xi\}$ olacak şekilde bir lokal ortonormal baz mevcuttur. Bu baz M manifoldunun ϕ-bazı olarak adlandırılır. Birleşim cümlesi üzerinde $he = \lambda e$ ve $h\phi e = -\lambda \phi e$ olacak biçimde bir λ sıfır olmayan pozitif değerli bir diferensiyellenebilir fonksiyon vardır.

Böylece daha sonra kullanacağımız aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz.

Yardımcı Teorem 5.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman, M manifoldunun bir U açık altcümlesi üzerinde kovaryant türev için,

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi e &= -a\phi e, & \nabla_\xi \phi e &= ae, \\
\nabla_e \xi &= \alpha e - \lambda\phi e, & \nabla_{\phi e} \xi &= -\lambda e + \alpha\phi e, \\
\nabla_e e &= b\phi e - \alpha\xi, & \nabla_{\phi e} \phi e &= ce - \alpha\xi, \\
\nabla_e \phi e &= -be + \lambda\xi, & \nabla_{\phi e} e &= -c\phi e + \lambda\xi,
\end{aligned} \tag{5.1}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada a, C^∞ sınıfından bir fonksiyon olup,

$$b = \frac{1}{2\lambda}\left[(\phi e)(\lambda) + A\right], \quad A = \sigma(e) = S(\xi, e) = g(Q\xi, e)$$

ve

$$c = \frac{1}{2\lambda}\left[e(\lambda) + B\right], \quad B = \sigma(\phi e) = S(\xi, \phi e) = g(Q\xi, \phi e)$$

biçiminde tanımlıdır.

İspat Her X vektör alanı için $\nabla_X \xi$ kovaryant türevinin tanımında X yerine, sırasıyla, e ve ϕe alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_e \xi &= -\alpha\phi^2 e - \phi h e, & \nabla_{\phi e} \xi &= -\alpha\phi^3 e - \phi h \phi e \\
&= \alpha e - \alpha\eta(e)\xi + h\phi e, & &= \alpha\phi e - he \\
&= \alpha e - \lambda\phi e, & &= \alpha\phi e - \lambda e
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\nabla_\xi e &= g(\nabla_\xi e, e)e + g(\nabla_\xi e, \phi e)\phi e + g(\nabla_\xi e, \xi)\xi \\
&= 0 + g(\nabla_\xi e, \phi e)\phi e - g(e, \nabla_\xi \xi)\xi \\
&= g(\nabla_\xi e, \phi e)\phi e \\
&= -g(e, \nabla_\xi \phi e)\phi e
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $a = g(e, \nabla_\xi \phi e)$ olarak alınırsa $\nabla_\xi e = -a\phi e$ elde edilir. Benzer olarak, $b = g(\nabla_e e, \phi e)$ ve $c = g(\nabla_{\phi e} \phi e, e)$ şeklinde alındığında diğer kovaryant türevler kolayca elde edilir.

M, 3-boyutlu olduğundan Weyl tensör alanı özdeş olarak sıfıra eşittir. Yani, her X, Y, Z vektör alanları için,

$$\begin{aligned}
&R(X,Y)Z = S(X,Z)Y - S(Y,Z)X + g(X,Z)QY \\
&-g(Y,Z)QX - \tfrac{r}{2}[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]
\end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitliği yazılır. Burada $X = e$, $Y = \phi e$ ve $Z = \xi$ olarak seçilirse

$$R(e, \phi e)\xi = -g(Qe, \xi)\phi e + g(Q\phi e, \xi)e$$

elde edilir. Her X vektör alanı için $\sigma(X) = g(Q\xi, X)$ olduğundan

$$R(e, \phi e)\xi = -\sigma(e)\phi e + \sigma(\phi e)e, \tag{5.3}$$

bulunur. Riemann tensör alanının eğrilik özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} R(e, \phi e)\xi &= (\nabla_{\phi e}\phi h)e - (\nabla_e \phi h)\phi e \\ &= \nabla_{\phi e}(\phi h)e - \phi h(\nabla_{\phi e} e) - \nabla_e(\phi h)\phi e + \phi h(\nabla_e \phi e) \\ &= \nabla_{\phi e}\lambda\phi e - \phi h(-c\phi e + \lambda\xi) - \nabla_e \lambda e + \phi h(-be + \lambda\xi) \\ &= (\phi e)(\lambda)\phi e + \lambda(ce - \lambda\xi) + c\lambda e - e(\lambda)e \\ &\quad -\lambda(b\phi e - \alpha\xi) - \lambda b\phi e \\ &= (2\lambda c - e(\lambda))e + (-2\lambda b + (\phi e)(\lambda))\phi e \end{aligned} \tag{5.4}$$

yazılır. O halde, (5.3) ve (5.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sigma(e) &= 2\lambda b - (\phi e)(\lambda) \\ \sigma(\phi e) &= 2\lambda c - e(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı b ve c fonksiyonları

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2\lambda}\left[(\phi e)(\lambda) + \sigma(e)\right] \\ c &= \frac{1}{2\lambda}\left[e(\lambda) + \sigma(\phi e)\right] \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Önerme 5.1.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. $U \subset M$ olmak üzere, U altcümlesi üzerinde

$$\nabla_\xi h = 2ah\phi + \xi(\lambda)s, \tag{5.5}$$

eşitliği geçerlidir. Burada s, $s\xi = 0$, $se = e$ ve $s\phi e = -\phi e$ olacak şekilde tanımlı bir $(1, 1)$-tipli tensör alanıdır.

İspat Öncelikle h tensör alanının ξ vektör alanı yönündeki değişimini inceleyelim. O halde,

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi h)e &= \nabla_\xi he - h(\nabla_\xi e) \\ &= \nabla_\xi \lambda e + \lambda\nabla_\xi e + ah\phi e \\ &= \xi(\lambda)e - a\lambda\phi e - a\lambda\phi e \\ &= -2\lambda a\phi e + \xi(\lambda)e\end{aligned} \tag{5.6}$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_\xi h)\phi e &= \nabla_\xi h\phi e - h(\nabla_\xi \phi e) \\ &= -\nabla_\xi \lambda\phi e - hae \\ &= -\xi(\lambda)\phi e - a\lambda e - a\lambda e \\ &= -2\lambda ae - \xi(\lambda)\phi e\end{aligned} \tag{5.7}$$

olur. Bunlara ilaveten, $(\nabla_\xi h)\xi = 0$ dır. Böylece (5.6), (5.7) ve son eşitlikten dolayı

$$\xi(\lambda)s = \nabla_\xi h - 2a\phi h$$

olacak şekilde s tensör alanını veren eşitliği elde ederiz. Burada $\dot{I}zs = 0$ olduğu açıktır.

Uyarı 5.1.1. U' altcümlesi üzerinde $h = 0$ olduğundan $\xi(\lambda)s = \nabla_\xi h = 0$ olacaktır.

Önerme 5.1.2. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman,

$$h^2 - \alpha^2\phi^2 = \frac{\dot{I}z(l)}{2}\phi^2 \tag{5.8}$$

eşitliği vardır.

İspat (3.18) eşitliği gözönüne alınırsa

$$\dot{I}z(l) = -\left[2\alpha^2 + \dot{I}z(h^2)\right] = -2\left[\alpha^2 + \lambda^2\right]$$

olur. İspatı tamamlamak için $h^2 - \alpha^2\phi^2$ ifadesinin baz elemanlarına göre değerlerini hesaplayalım. Gerçekten,

$$\begin{aligned}h^2e - \alpha^2\phi^2e &= \lambda^2e + \alpha^2e \\ &= \frac{2}{2}(\alpha^2 + \lambda^2)e \\ &= \frac{\dot{I}z(l)}{2}\phi^2e\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h^2\phi e - \alpha^2\phi^3 e &= (\alpha^2+\lambda^2)\phi e \\ &= \frac{\dot{I}z(l)}{2}\phi^2\phi e \end{aligned}$$

dır. Ayrıca, $h^2\xi - \alpha^2\phi^2\xi = \dfrac{\dot{I}zl}{2}\phi^2\xi = 0$ olacağından istenen sonuç elde edilir.

M, 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik manifold olduğundan

$$lX = R(X,\xi)\xi = \dot{I}z(l)X - S(X,\xi)\xi + QX - \eta(X)Q\xi - \frac{r}{2}\left(X - \eta(X)\xi\right)$$

yazılır. Buradan QX çekilirse

$$\begin{aligned} QX &= lX - \dot{I}z(l)X + S(X,\xi)\xi + \eta(X)Q\xi + \frac{r}{2}\left(X - \eta(X)\xi\right) \\ &= \alpha^2\phi^2X + 2\alpha\phi hX - h^2X + \phi(\nabla_\xi h)X - (\dot{I}zl)X \\ &\quad -S(X,\xi)\xi + \eta(X)Q\xi + \frac{r}{2}\left(X - \eta(X)\xi\right) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} S(\phi^2X,\xi) &= S(-X+\eta(X)\xi,\xi) \\ &= -S(X,\xi) + \eta(X)\dot{I}z(l) \end{aligned}$$

olduğundan

$$S(X,\xi) = -S(\phi^2X,\xi) + \eta(X)\dot{I}z(l)$$

eşitliği sağlanır. O halde,

$$\begin{aligned} QX &= -\frac{\dot{I}z(l)}{2}\phi^2X + 2\alpha\phi hX + \phi(\nabla_\xi h)X - \dot{I}z(l)X \\ &\quad -S(\phi^2X,\xi)\xi + \eta(X)\dot{I}z(l)\xi + \eta(X)Q\xi - \frac{r}{2}\phi^2X \end{aligned} \tag{5.9}$$

dır. Böylece Q, ϕ-bazına göre

$$\begin{aligned} Q\xi &= g(Q\xi,e)e + g(Q\xi,\phi e)\phi e + g(Q\xi,\xi)\xi \\ &= \sigma(e)e + \sigma(\phi e)\phi e + \dot{I}z(l)\xi \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. (5.9) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned} QX = & -\frac{1}{2}\left(r + \dot{I}z(l)\right)\phi^2X + 2\alpha\phi hX + \phi(\nabla_\xi h)X + 2(\alpha^2+\lambda^2)X - S(\phi^2X,\xi)\xi \\ & -2(\alpha^2+\lambda^2)\eta(X)\xi + \eta(X)\left[\sigma(e)e + \sigma(\phi e)\phi e\right] + \eta(X)\dot{I}z(l)\xi \end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklemden

$$\begin{aligned} QX &= \left[\frac{1}{2}r+\alpha^2+\lambda^2\right]X+\left[-\frac{1}{2}r-3\alpha^2-3\lambda^2\right]\eta(X)\xi \\ &\quad +2\alpha\phi hX+\phi(\nabla_\xi h)X-S(\phi^2X,\xi)\xi \\ &\quad +\eta(X)\sigma(e)e+\eta(X)\sigma(\phi e)\phi e \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Böylece

$$\tilde{a}=\frac{1}{2}r+\alpha^2+\lambda^2$$

ve

$$\tilde{b}=-\frac{1}{2}r-3\alpha^2-3\lambda^2$$

olarak alınırsa

$$\begin{aligned} QX &= \tilde{a}X+\tilde{b}\eta(X)\xi+2\alpha\phi hX+\phi(\nabla_\xi h)X-\sigma(\phi^2X)\xi \\ &\quad +\eta(X)\sigma(e)e+\eta(X)\sigma(\phi e)\phi e \qquad (5.10) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Yardımcı Teorem 5.1.2. (M,ϕ,ξ,η,g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Bu durumda, Ricci operatörü

$$\begin{aligned} Q &= \tilde{a}I+\tilde{b}\eta\otimes\xi+2\alpha\phi h+\phi(\nabla_\xi h)-\sigma(\phi^2)\otimes\xi \qquad (5.11) \\ &\quad +\sigma(e)\eta\otimes e+\sigma(\phi e)\eta\otimes\phi e \end{aligned}$$

eşitliğini sağlar. Burada $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ fonksiyonları, sırasıyla, $\tilde{a}=\frac{1}{2}r+\alpha^2+\lambda^2$, $\tilde{b}=-\frac{1}{2}r-3\alpha^2-3\lambda^2$ şeklinde tanımlanmıştır.

Önerme 5.1.3. $\{e,\phi e,\xi\}$ lokal ortonormal bazına göre Q Ricci operatörünün bileşenleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} Q\xi &= -2(\alpha^2+\lambda^2)\xi+Ae+B\phi e, \\ Qe &= A\xi+(\frac{r}{2}+\alpha^2+\lambda^2+2a\lambda)e+(\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)\phi e, \qquad (5.12) \\ Q\phi e &= B\xi+(\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)e+(\frac{r}{2}+\alpha^2+\lambda^2-2a\lambda)\phi e, \end{aligned}$$

Burada $A=\sigma(e)=S(\xi,e)$ ve $B=\sigma(\phi e)=S(\xi,\phi e)$ dir.

İspat (5.10) eşitliğinde X yerine ξ vektör alanını alırsak

$$Q\xi = (\tilde{a} + \tilde{b})\xi + \sigma(e)e + \sigma(\phi e)\phi e, \tag{5.13}$$

yazılır. (5.13) eşitliğinde $\tilde{a}$ ve $\tilde{b}$ fonksiyonları yerine yazılırsa

$$Q\xi = (-2\alpha^2 - 2\lambda^2)\xi + Ae + B\phi e,$$

elde edilir.

Şimdi, (5.10) eşitliğinde bu kez X yerine e vektör alanını alırsak

$$Qe = \tilde{a}e + 2\alpha\phi he + \phi(2ah\phi e + \xi(\lambda)se) - \sigma(-e + \eta(e)\xi)\xi, \tag{5.14}$$

bulunur. (5.14) eşitliği düzenlenirse

$$Qe = \tilde{a}e + 2\alpha\phi he + 2ahe + \xi(\lambda)\phi e + \sigma(e)\xi,$$

yazılır. Burada $se = e$ ve $A = \sigma(e)$ dir.

Benzer olarak, (5.10) eşitliğinde X yerine ϕe vektör alanını alırsak

$$Q\phi e = \tilde{a}\phi e + 2\alpha he + \phi(2a\phi^2 e + \xi(\lambda)s\phi e) + \sigma(\phi e)\xi,$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte $s\phi e = -\phi e$ ve $B = \sigma(\phi e)$ eşitlikleri kullanılırsa istenen sonuca ulaşılır.

Önerme 5.1.4. (5.12) denklem sistemi gözönüne alındığında kovaryant türevleri içeren aşağıdaki denklem sistemi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
(\nabla_\xi Q)\xi &= -4\lambda\xi(\lambda)\xi + \{\xi(A) + aB\}\,e + \{\xi(B) - aA\}\,\phi e,\\
(\nabla_e Q)e &= \left\{-3\alpha^3 - \alpha\lambda^2 - \frac{\alpha r}{2} - 2a\alpha\lambda + \lambda\xi(\lambda) + e(A) - \frac{B}{2\lambda}\left((\phi e)(\lambda) + A\right)\right\}\xi\\
&\quad + \left\{2\alpha A + \frac{1}{2}e(r) + 2\lambda e(\lambda) + 2ae(\lambda) + 2\lambda e(a)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{\lambda}((\phi e)(\lambda) + A)(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\right\} e + \{-\lambda A + \alpha B + 2a\left((\phi e)(\lambda) + A\right)\\
&\quad + 2\alpha e(\lambda) + e(\xi(\lambda))\}\,\phi e,\\
(\nabla_{\phi e} Q)\phi e &= \left\{(\phi e)(B) - 3\alpha^3 - \frac{\alpha r}{2} - \alpha\lambda^2 + 2\alpha a\lambda + \xi(\lambda)\lambda - \frac{A}{2\lambda}\left(e(\lambda) + B\right)\right\}\xi\\
&\quad + \{2\alpha(\phi e)(\lambda) + (\phi e)(\xi(\lambda)) - \lambda B + \alpha A - 2a\left(e(\lambda) + B\right)\}\,e\\
&\quad + \left\{\frac{1}{2}(\phi e)(r) + 2\lambda(\phi e)(\lambda) - 2a(\phi e)(\lambda) - 2\lambda(\phi e)(a) + 2\alpha B\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{\lambda}(e(\lambda) + B)(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\right\}\phi e.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

İspat Kovaryant türev tanımından

$$(\nabla_\xi Q)\xi = \nabla_\xi Q\xi - Q(\nabla_\xi \xi),$$

bulunur. Burada $\nabla_\xi \xi = 0$ olduğundan $Q(0) = 0$ dır. O halde yukarıdaki eşitlikte (5.12) denklem sistemindeki $Q\xi$ yerine yazıldığında

$$(\nabla_\xi Q)\xi = -2\nabla_\xi(\alpha^2 + \lambda^2)\xi + \nabla_\xi Ae + \nabla_\xi B\phi e,$$

elde edilir. Yukarıdaki kovaryant türev toplamından (5.15) sistemin birinci denklemine ulaşılır.

Benzer yolla, $(\nabla_e Q)e$ ifadesinin eşitini bulmak için kovaryant türev tanımından

$$(\nabla_e Q)e = \nabla_e Qe - Q(\nabla_e e),$$

yazılır. (5.1) sistemindeki $\nabla_e e = b\phi e - \alpha\xi$ denklemi ve (5.12) sistemindeki Qe denklemi birlikte hesaba katılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_e Q)e &= \nabla_e(A\xi + (\frac{r}{2} + \alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)e + (\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\phi e) \\ &\quad -bQ\phi e + \alpha Q\xi,\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitliklik (5.12) sistemi ile birlikte düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}(\nabla_e Q)e &= \left\{-3\alpha^3 - \alpha\lambda^2 - \frac{\alpha r}{2} - 2a\alpha\lambda + \lambda\xi(\lambda) + e(A) - bB\right\}\xi \\ &\quad + \left\{2\alpha A + \frac{1}{2}e(r) + 2\lambda e(\lambda) + 2ae(\lambda) + 2\lambda e(a) - 2b\xi(\lambda) - 4\alpha\lambda b\right\}e \\ &\quad + \{-\lambda A + \alpha B + 4ab\lambda + 2\alpha e(\lambda) + e(\xi(\lambda))\}\,\phi e,\end{aligned}$$

ϕ-bazının vektörlerinin lineer toplamı şeklinde yazılır. O halde, b fonksiyonu yerine konulursa (5.15) sisteminin ikinci denklemi bulunur.

Son olarak, $(\nabla_{\phi e} Q)\phi e$ ifadesinin eşitini bulmak için

$$(\nabla_{\phi e} Q)\phi e = \nabla_{\phi e} Q\phi e - Q(\nabla_{\phi e}\phi e),$$

denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\nabla_{\phi e} Q)\phi e &= \nabla_{\phi e}(B\xi + (\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)e + (\frac{r}{2} + \alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)\phi e) \\ &\quad -cQe + \alpha Q\xi,\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki hesaplama yöntemine göre son denklem (5.12) sistemi ile birlikte hesaba katılır ve c fonksiyonu yerine yazılırsa (5.15) sisteminin üçüncü denklemi kolayca elde edilir.

5.2 3-Boyutlu Yarı Simetrik Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar

Bu kısımda, 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik yapısına yarı simetrik şartını eklediğimizde manifold yapısında ortaya çıkacak sonuçları bulmayı amaçladık. Yarı simetrik manifold yapımız için bir çok orijinal sonuç elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 5.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman $\{e, \phi e, \xi\}$ lokal ortonormal bazına göre R Riemann eğrilik tensörünün sıfır olmayan tüm olası bileşenleri ortonormal vektör alanlarının değişimine göre aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned}
R(\xi, e)\xi &= -(\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)e + (\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\phi e, \\
R(\xi, \phi e)\xi &= (\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)e - (\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)\phi e, \\
R(e, \phi e)\xi &= -Be + A\phi e, \\
R(\xi, e)e &= (\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)\xi - B\phi e, \\
R(\xi, \phi e)e &= -(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\xi + A\phi e, \\
R(e, \phi e)e &= B\xi + 2(\alpha^2 + \lambda^2 + \tfrac{r}{4})\phi e, \\
R(\xi, e)\phi e &= -(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)\xi + Be, \\
R(\xi, \phi e)\phi e &= (\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)\xi - Ae, \\
R(e, \phi e)\phi e &= -A\xi - 2(\alpha^2 + \lambda^2 + \tfrac{r}{4})e.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

İspat (5.2) eşitliğini ve (5.12) denklem sistemini gözönüne alalım. İlk olarak, (5.2) eşitliğinde $X = Z = \xi$ ve $Y = e$ olarak seçtiğimizde

$$R(\xi, e)\xi = S(\xi, \xi)e - S(e, \xi)\xi + Qe - \frac{r}{2}e,$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte Ricci tensör ve Ricci operatör tanımından (5.16) sisteminin birinci denklemi elde edilir. Benzer olarak, $X = Z = \xi$ ve $Y = \phi e$ için

$$R(\xi, \phi e)\xi = S(\xi, \xi)\phi e - S(\phi e, \xi)\xi + Q\phi e - \frac{r}{2}\phi e,$$

bulunur ve buradan (5.16) sisteminin ikinci denklemine ulaşılır. Aynı metodu takiben (5.16) sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} S(\xi, e) &= A, \quad S(\xi, \phi e) = B, \quad S(e, e) = \tilde{a} + 2a\lambda, \\ S(\phi e, e) &= \xi(\lambda) + 2\alpha\lambda, \quad S(\phi e, \phi e) = \tilde{a} - 2a\lambda, \end{aligned}$$

dır.

Hatırlatma 5.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik manifoldu için

$$\dot{I}z(h^2) = 2\lambda^2,$$

dir.

Önerme 5.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. O zaman M manifoldunun yarı simetrik olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$A\xi(\lambda) = -2\alpha A\lambda + (\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)B, \tag{5.17}$$

$$B\xi(\lambda) = -2\alpha B\lambda + (\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)A, \tag{5.18}$$

$$AB = -2(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)(\alpha^2 + \lambda^2 + \frac{r}{4}), \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= -(\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)(3(\alpha^2 + \lambda^2) + 2a\lambda + \frac{r}{2}) \\ &\quad +(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)^2, \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= -(\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)(3(\alpha^2 + \lambda^2) - 2a\lambda + \frac{r}{2}) \\ &\quad +(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)^2. \end{aligned} \tag{5.21}$$

İspat (2.6) eşitliği M^{2n+1} üzerindeki her X, Y, Z ve V vektör alanları için

$$\begin{aligned} 0 &= R(X,\xi)R(Y,Z)V - R(R(X,\xi)Y,Z)V \\ &\quad -R(Y,R(X,\xi)Z)V - R(Y,Z)R(X,\xi)V, \end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitliğine denktir. Şimdi, (5.22) eşitliğinde $X = e$, $Y = \xi$, $Z = \phi e$ ve $V = \xi$ alalım. O halde,

$$\begin{aligned} 0 &= R(e,\xi)R(\xi,\phi e)\xi - R(R(e,\xi)\xi,\phi e)\xi - R(\xi,R(e,\xi)\phi e)\xi \\ &\quad -R(\xi,\phi e)R(e,\xi)\xi, \end{aligned} \tag{5.23}$$

eşitliği yazılır. (5.23) eşitliğinde (5.16) sistemi hesaba katılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= 2B(\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)\phi e + B(\alpha^2+\lambda^2+2a\lambda)e - 2A(\alpha^2+\lambda^2-2a\lambda)\phi e \\ &\quad -A(\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)e, \end{aligned} \tag{5.24}$$

bulunur. Burada $R(\phi e,\phi e)\xi = 0$ ve $R(\xi,\xi)\xi = 0$ dır. (5.24) eşitliği e ve ϕe baz vektörlerinin lineer toplamı şeklinde yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (-2\alpha\lambda A + 2Ba\lambda - \xi(\lambda)A + \alpha^2 B + \lambda^2 B)e \\ &\quad +(4\alpha\lambda B + 4aA\lambda - 2\alpha^2 A - 2A\lambda^2 + 2B\xi(\lambda))\phi e, \end{aligned} \tag{5.25}$$

haline dönüşür. O halde, (5.25) eşitliğinden (5.17) ve (5.18) denklemleri elde edilir.

Benzer yolla, (5.22) eşitliğinde $X = e$, $Y = e$, $Z = \phi e$ ve $V = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R(e,\xi)R(e,\phi e)\xi - R(R(e,\xi)e,\phi e)\xi - R(e,R(e,\xi)\phi e)\xi \\ &\quad -R(e,\phi e)R(e,\xi)\xi, \end{aligned} \tag{5.26}$$

bulunur. (5.26) eşitliği ve (5.16) sistemi birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} 0 &= (-AB - 2(\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)(\alpha^2+\lambda^2+\frac{r}{4}))e \\ &\quad +(-B^2 - (\alpha^2+\lambda^2-2a\lambda)(\alpha^2+\lambda^2+2a\lambda))\phi e \\ &\quad +((\xi(\lambda)+2\alpha\lambda)^2 - 2(\alpha^2+\lambda^2-2a\lambda)(\alpha^2+\lambda^2+\frac{r}{4}))\phi e, \end{aligned} \tag{5.27}$$

elde edilir. Burada $R(e,e)\xi = 0$ dır. (5.27) eşitliği yardımıyla (5.19) ve (5.20) eşitliklerinin ispatı tamamlanır.

Son olarak, (5.22) eşitliğinde $X = \phi e$, $Y = \phi e$, $Z = e$ ve $V = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R(\phi e, \xi)R(\phi e, e)\xi - R(R(\phi e, \xi)\phi e, e)\xi - R(\phi e, R(\phi e, \xi)e)\xi \\ &\quad -R(\phi e, e)R(\phi e, \xi)\xi, \end{aligned} \tag{5.28}$$

bulunur. (5.28) eşitliği ve (5.16) sistemi birlikte hesaplanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= (-AB - 2(\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)(\alpha^2 + \lambda^2 + \frac{r}{4}))\phi e \\ &\quad +(-A^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)(\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda))e \\ &\quad +((\xi(\lambda) + 2\alpha\lambda)^2 - 2(\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)(\alpha^2 + \lambda^2 + \frac{r}{4}))e, \end{aligned} \tag{5.29}$$

elde edilir. (5.29) eşitliği gözönüne alındığında hem (5.19) eşitliğinin doğruluğu görülür hem de e bazına göre yazılan ifadeden (5.21) eşitliğinin ispatına da ulaşılır.

Burada özellikle belirtmeliyiz ki $\{e, \phi e, \xi\}$ lokal ortonormal ϕ-bazındaki diğer tüm olası vektör alanlarının seçimleri yine aynı (5.17), (5.18), (5.19), (5.20) ve (5.21) eşitliklerini verir. Bu yüzden eğer bu eşitlikler sağlandığında (5.22) eşitliği de gerçeklenir. Yani, M manifoldu yarı simetriktir.

Şimdi, $\xi(\lambda)$ değerini yok etme adına üzerinde çalıştığımız manifolda bir ek şart getirerek aşağıdaki teoremleri verebiliriz:

Teorem 5.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir yarı simetrik hemen hemen kosimplektik manifold olsun. Eğer M manifoldunun $S(\xi, \xi)$ Ricci eğriliği ξ karakteristik vektör alanı (karakteristik akış) boyunca sabit ise M lokal simetrik değildir.

İspat M bir 3-boyutlu bir yarı simetrik hemen hemen kosimplektik manifold olduğundan $\alpha = 0$ için (5.17)-(5.21) eşitlikleri geçerlidir. (5.12) sistemi gözönüne alındığında ξ karakteristik vektör alanı boyunca $S(\xi, \xi)$ nin sabit olması $\xi(\lambda) = 0$ olması anlamına gelir.Gerçekten, $\lambda \neq 0$ için $\nabla_\xi S(\xi, \xi) = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= -2\nabla_\xi \lambda^2, \\ &= -4\lambda\xi(\lambda), \end{aligned}$$

yazılır. Bu nedenle, (5.5) eşitliğini takiben eğer $a = 0$ alınırsa $\nabla_\xi h = 0$ bulunur. O zaman Önerme 3.2.3 den dolayı manifold lokal simetrik olacaktır. Aksi takdirde, eğer

$a \neq 0$ ise o zaman M manifoldu lokal simetrik değildir. Böylece ispatı tamamlamak için $a = 0$ olamayacağını göstermeliyiz.

Öncelikle $a \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $a(p) \neq 0$ olacak şekilde M üzerinde bir p noktasını gözönüne alalım. Öyleyse $a \neq 0$ olacak şekilde p noktasının bir W komşuluğu mevcuttur. İlk olarak, (5.17) ve (5.18) denklemlerini sırasıyla B ve A ile taraf tarafa çarparsak

$$AB\xi(\lambda) = -2\alpha AB\lambda + (\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)B^2, \tag{5.30}$$

$$AB\xi(\lambda) = -2\alpha AB\lambda + (\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)A^2, \tag{5.31}$$

bulunur. (5.30) denklemi (5.31) denkleminden taraf tarafa çıkarılır ve (5.20), (5.21) eşitlikleri, sırasıyla, B^2 ve A^2 ifade etmek için kullanılırsa

$$(\alpha^2 + \lambda^2 + 2a\lambda)B^2 - (\alpha^2 + \lambda^2 - 2a\lambda)A^2 = 0, \tag{5.32}$$

elde edilir. $a\lambda \neq 0$, $\xi(\lambda) = 0$ ve $\alpha = 0$ olmak üzere, (5.32) eşitliğinden

$$\lambda^4 - 4a^2\lambda^2 = 0, \tag{5.33}$$

bulunur. (5.33) eşitliğinden $\lambda^2 \pm 2a\lambda = 0$ elde edilir. Böylece

$$\lambda^2 + 2a\lambda = 0, \tag{5.34}$$

olduğunu varsayabiliriz. Burada $a \neq 0$ kabulümüzden dolayı bu iki durum aynı anda sağlanmaz. Fakat λ fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu bilindiğine göre bu iki durum için $a = 0$ şartı λ nın sıfır olmasını gerektirir ki bu da bir çelişkidir. O halde, $a = 0$ olamaz.

Şimdi, başka bir yolla çelişki elde etmeye çalışalım ve bir defa daha $a = 0$ olamayacağını gösterelim. O halde, $\xi(\lambda) = 0$ olduğundan (5.19) denkleminden $AB = 0$ olduğunu gösterir. O halde, lokal olarak ya $A = 0$ ya da $B = 0$ dır. Bu yüzden $A = 0$ olduğunu kabul edersek λ nın sabit ve $B = 0$ olduğunu ispatlamalıyız. Benzer yolla, eğer $B = 0$ olduğu kabul edilirse λ nın sabit ve $A = 0$ olduğunu ispatlamalıyız.

Kabul edelim ki $A = 0$ olsun. (5.34) eşitliğinin ξ vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa

$$2\lambda\xi(\lambda) + 2a\xi(\lambda) + 2\lambda\xi(a) = 0, \tag{5.35}$$

elde edilir. $\xi(\lambda) = 0$ olduğundan $\xi(a) = 0$ bulunur. Bundan başka, (5.34) eşitliğinin e vektör alanına göre kovaryant türevi alındığında

$$0 = 2\left(\lambda e(\lambda) + ae(\lambda) + \lambda e(a)\right), \tag{5.36}$$

elde edilir.

Şimdi, n-boyutlu Riemann manifoldu için çok bilinen

$$\frac{1}{2}X(r) = \sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{e_i}Q)e_i, X), \tag{5.37}$$

formülünü hatırlayalım. Burada $\{e_i\}$ keyfi bir ortonormal bazdır. (5.37) formülü ve (5.15) sistemi yardımıyla $\frac{1}{2}e(r)$ ve $\frac{1}{2}(\phi e)(r)$ ifadelerini hesaplanabilir. Öncelikle, $\frac{1}{2}e(r)$ ifadesinden

$$\frac{1}{2}e(r) = g((\nabla_{\xi}Q)\xi, e) + g((\nabla_{e}Q)e, e) + g((\nabla_{\phi e}Q)\phi e, e),$$

yardımıyla

$$0 = -B(\lambda + a) + 2\lambda(e(\lambda) + e(a)), \tag{5.38}$$

bulunur. (5.36) eşitliği kullanılarak (5.38) gözönüne alınırsa

$$B(\lambda + a) = -2ae(\lambda), \tag{5.39}$$

yazılır. $\xi(\lambda) = 0$ ve $\xi(a) = 0$ olduğundan (5.39) eşitliğinin ξ ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$\xi(B)(\lambda + a) = -2a\xi(e(\lambda)), \tag{5.40}$$

elde edilir.

Benzer olarak, $\frac{1}{2}(\phi e)(r)$ ifadesinden

$$\xi(B) = 2\lambda((\phi e)(a) - (\phi e)(\lambda)), \tag{5.41}$$

elde edilir. Burada (5.41) ve (5.41) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa

$$a\xi(e(\lambda)) = -\lambda(\lambda + a)((\phi e)(a) - (\phi e)(\lambda)), \tag{5.42}$$

bulunur. Ayrıca, $\xi(\lambda) = 0$ olduğundan

$$a[\xi, e](\lambda) = a\xi(e(\lambda)), \tag{5.43}$$

ve (5.1) sistemi yardımıyla

$$a[\xi, e](\lambda) = (-a^2 + a\lambda)(\phi e)(\lambda), \tag{5.44}$$

yazılır. (5.42), (5.43) ve (5.44) eşitliklerinden

$$-\lambda(\lambda + a)((\phi e)(a) - (\phi e)(\lambda)) = (-a^2 + a\lambda)(\phi e)(\lambda) \tag{5.45}$$

elde edilir. Diğer yandan, (5.34) eşitliğinin ϕe ye göre kovaryant türevi alınırsa

$$-\lambda(\phi e)(a) = (\lambda + a)(\phi e)(\lambda), \tag{5.46}$$

bulunur. O halde, (5.45) ve (5.46) eşitliklerinden

$$(\phi e)(\lambda)(\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2}) = 0,$$

denklemine ulaşılır. $\lambda \neq 0$ olduğundan $(\phi e)(\lambda) = 0$ dır. Ayrıca, $\xi(\lambda) = 0$ ve (5.1) sisteminden

$$0 = [\xi, \phi e](\lambda) = (\lambda + a)e(\lambda), \tag{5.47}$$

dır. Bu nedenle, $e(\lambda) = 0$ elde edilir. Gerçekten, $e(\lambda) \neq 0$ olduğunu kabul edersek, $\lambda + a = 0$ ve (5.34) eşitliğinin e ye göre kovaryant türevinden elde edilecek denklemlerden $e(\lambda) = 0$ olduğu bulunur ki bu da hipotezimizle çelişir. O halde, λ sıfırdan farklı bir sabittir. Bununla birlikte, (5.34) eşitliğinden $B = 0$ olduğunu söyleyemeyiz. Eğer $B = 0$ olsaydı $a = 0$ olduğu elde edilirdi.

Son olarak, $R(e, \phi e)e$ ifadesini (5.1) sistemi yardımıyla hesaplayıp (5.16) sistemiyle karşılaştırdığımızda

$$r = 12a\lambda, \tag{5.48}$$

bulunur. (5.20) eşitliğinde (5.34) ve (5.48) kullanılırsa

$$B^2 = 32a^4, \tag{5.49}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $B \neq 0$ olduğundan a fonksiyonu da sıfırdan farklıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.2.2. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir yarı simetrik hemen hemen α-Kenmotsu manifold olsun. Eğer M manifoldunun $S(\xi, \xi)$ Ricci eğriliği ξ karakteristik vektör alanı (karakteristik akış) boyunca sabit ve $r = -4(\alpha^2 + \lambda^2)$ ise M lokal simetriktir.

İspat Teorem 5.2.1 de uygulanan benzer metodolojiyi $\alpha \neq 0$ için ele alalım. O halde, $a \neq 0$ ve $\xi(\lambda) = 0$ için

$$\lambda^2 \mp 2\lambda\sqrt{a^2 + \alpha^2} + \alpha^2 = 0, \tag{5.50}$$

yazılır. Böylece

$$\lambda^2 + 2\lambda\sqrt{a^2 + \alpha^2} + \alpha^2 = 0, \tag{5.51}$$

olduğunu kabul edebiliriz. Burada $a \neq 0$ kabulümüzden dolayı bu iki durum aynı anda sağlamayacaktır. Ayrıca, $\xi(\lambda) = 0$ olduğundan (5.19) denkleminden

$$AB = -4\alpha\lambda(\alpha^2 + \lambda^2 + \frac{r}{4}), \tag{5.52}$$

elde edilir. Burada lokal olarak ya $A = 0$ ya da $B = 0$ olması için gerek ve yeter koşul

$$r = -4(\alpha^2 + \lambda^2), \tag{5.53}$$

olmasıdır. Bu yüzden $A = 0$ olduğunu kabul edersek λ nın sabit ve $B = 0$ olduğunu ispatlamalıyız. Benzer yolla, eğer $B = 0$ olduğu kabul edilirse λ nın sabit ve $A = 0$ olduğunu ispatlamalıyız.

Kabul edelim ki $A = 0$ olsun. (5.51) eşitliğinin ξ vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa $\xi(\lambda) = 0$ olduğundan $\xi(\sqrt{a^2 + \alpha^2}) = 0$ bulunur. Bundan başka, (5.51) eşitliğinin e vektör alanına göre kovaryant türevi alındığında

$$-\sqrt{a^2 + \alpha^2}e(\lambda) = \lambda\left(e(\lambda) + e(\sqrt{a^2 + \alpha^2})\right), \tag{5.54}$$

elde edilir. Teorem 5.2.1 de uygulanan ispat metotlarıyla $e(\lambda) = 0$ ve $(\phi e)(\lambda) = 0$ bulunur. (5.20), (5.21) ve (5.51) eşitlikleri gözönüne alınırsa $a \neq 0$ kabulumüzle çelişen $a = 0$ sonucu ortaya çıkar. Bu nedenle, a dif.bilir fonksiyonunun özdeş olarak sıfır olduğu sonucuna ulaşırız. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz:

Sonuç 5.2.1. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifold olsun. Eğer M manifoldunun $S(\xi, \xi)$ Ricci eğriliği ξ karakteristik vektör alanı (karakteristik akış) boyunca sabit ise M lokal simetrik değildir.

Sonuç 5.2.2. (M, ϕ, ξ, η, g), 3-boyutlu bir yarı simetrik hemen hemen α-Kenmotsu manifoldun lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart $S(\xi, \xi)$ Ricci eğriliğinin ξ karakteristik vektör alanı (karakteristik akış) boyunca sabit ve $r = -4(\alpha^2 + \lambda^2)$ olmasıdır.

6 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu yapılan çalışmalar sonunda 3 ve daha büyük boyutlu yarı simetrik hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar için genel bir sınıflandırma problemi hala açıktır. Yaptığımız çalışmalar $\xi(\lambda) = 0$ ve bazı özel r değerleri için sağlanmaktadır. Yarı simetrik şartı altında lokal simetrik manifoldlarla ilgili daha genel sonuçlara ulaşmak için çalışmalarımız devam etmektedir. Ayrıca, Ricci simetrik, Ricci yarı simetrik, Projektif yarı simetrik, Konsirküler yarı simetrik, konformal yarı simetrik, Pseudo simetrik ve Pseudo yarı simetrik gibi özel tensör şartları altında hemen hemen α-kosimplektik manifoldlar için ilginç sonuçlar bulunabilir.

7 KAYNAKLAR

Aktan N., Yıldırım M. and Murathan C. (2013). Almost f-Cosymplectic Manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, **11:** 775-787.

Arslan K., Ezentaş R., Mıhai I., Murathan C. and Özgür C. (2001). Ricci curvature of submanifolds in Kenmotsu space forms. *Hindawi Publishing Corporation*, **29:** 719-726.

Bagewadi, S.C. and Venkatesha (2007). Some Curvature Tensors on a Trans-Sasakian Manifold. *Turkish Journal of Mathematics*, **31:** 111-121.

Bagewadi S.C. and Kumar G.E. (2005). On Irrotational D-Conformal Curvature Tensor. *Novi Sad Journal of Mathematics*, **35:** 85-92.

Bagewadi S. C. and Venkatesha (2006). On Pseudo Projective -Recurrent Kenmotsu Manifolds. *Soochow Journal of Mathematics,* **32:** 433-439.

Bang-Yen C. (1973). Geometry of submanifolds. New York, M. Dekker.

Blair D. E. (1970). Geometry of manifolds with structural group $U(n) \times O(s)$. *Journal of Differential Geometry*, **4:** 155-167.

Blair D. E. (1976). Contact manifolds in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, New York.

Blair D. E. (1977). Two remarks on contact metric structures. *Tôhoku Mathematical Journal,* **29:** 319-324.

Blair D. E. (2002). Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds. Progress in Mathematics, 203. Birkhâuser, Boston.

Boeckx E. (2000). A full classification of contact metric (κ, μ)-spaces. *Illinois Journal of Mathematics,* **44:** 212-219.

Boeckx E. and Cho J.T. (2005). η-parallel contact metric spaces. *Differential Geometry and its Applications,* **22:** 275-285.

Boeckx E. and Cho J.T. (2006). Locally symmetric contact metric manifolds. *Monatsh Mathematics,* **148:** 269-281.

Calvaruso G. and Perrone D. (2001). Semi-Symmetric Contact Metric Three-Manifolds. *Yokohama Mathematical Journal,* **49:** 149-161.

Chinea D. and Gonzalez C. (1990). A classification of almost contact metric manifolds. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **156:** 15-36.

Dacko P. and Olszak Z. (1998). On conformally flat almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves. *Rendiconti del Seminario Matematico Università e Politecnico di Torino,* **56:** 89-103.

Dileo G. and Pastore M. (2007). Almost Kenmotsu manifolds and local symmetry. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, **14:** 343-354.

Dileo G. and Pastore M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds and nullity distributions. *Journal of Geometry,* **93:** 46-61.

Dileo G. and Pastore M. (2009). Almost Kenmotsu manifolds with a condition of η-parallelism. *Differential Geometry and its Applications*, **27:** 671-679.

Endo H. (2002). Non-existence of almost cosymplectic manifolds satisfying a certain condition. *Journal Tensor,* **63:** 272-284.

Gouli-Andreou F. and Moutafi E. (2010). Three Classes of Pseudosymmetric Contact Metric 3-Manifolds. *Pacific Journal of Mathematics,* **245:** 57-77.

Gouli-Andreou F. and Moutafi E. (2009). Two Classes of Pseudosymmetric Contact Metric 3-Manifolds. *Pacific Journal of Mathematics*, **239:** 17-37.

Hacısalihoğlu H. H. (1993). Diferensiyel Geometri, Cilt I, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu H. H. (2000). Diferensiyel Geometri, Cilt II, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu H. H. ve Ekmekçi N. (2003). Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Janssens D. and Vanhecke L. (1981). Almost contact structures and curvature tensors. *Kodai Mathematical Journal,* **4:** 1-27.

Jun J., Chand U. and Pathak G. (2005). On Kenmotsu Manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society,* **42:** 435-445.

Kenmotsu K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tôhoku Mathematical Journal,* **24:** 93-103.

Kim, T.W. and Pak H.K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Mathematica Sinica,* **21:** 841-846.

Kim, T.W. and Pak H.K. (2007). Criticality of characteristic vector fields on almost cosymplectic manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society,* **44:** 05-613.

Nomizu K. (1968). On Hypersurfaces Satisfying a Certain Condition on the Curvature Tensor. *Tôhoku Mathematical Journal,* **20:** 46-69.

Ogawa Y. (1977). A Condition for a Compact Kaehlerian Space to be Locally Symmetric. *Natural Science Report. Ochanomizu University*, **28:** 21-23.

O'neill B. (1983). Semi Riemannian Geometry, Academic Press, London.

Olszak Z. (1981). On almost cosymplectic manifolds. *Kodai Mathematical Journal,* **4:** 239-250.

Olszak Z. (1987). Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves. Journal *Tensor,***46:** 117-124.

Olszak Z. (1989). Locally conformal almost cosymplectic manifolds. *College Mathematical Journal,* **57:** 73-87.

Öztürk H., Aktan N., Murathan C. and Vanlı A.T. (2014). Almost α-Cosymplectic f-Manifolds. *The Journal of Alexandru Ioan Cuza University*, **60:** 211-226.

Öztürk H., Aktan N. and Murathan C. (2010). On α-Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Conditions. *Applied Sciences,* **12:** 115-126.

Öztürk, H. (2009). Hemen Hemen α-Kosimplektik (κ, μ, ν)-Uzayları, Doktora Tezi, AKÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Sabuncuoğlu A. (2006). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım.

Sharpe R.W. (1997). Differential Geometry, Graduate Texts in Math., Springer.

Spivak M. (1965). Calculus on Manifolds, W.A. Benjamin Incorporated.

Szabó Z. I. (1982). Structure Theorem on Riemannian Spaces Satisfying $R.R = 0$. *Journal of Differential Geometry,* **17:** 531-582.

Tanno S. (1969). The Automorphism Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds. *Tôhoku Mathematical Journal,* **21:** 21-38.

Tanno S. (1969). Isometric Immersion of Sasakian Manifolds in Spheres. *Kodai Mathematical Journal,* **21:** 448-458.

Vaisman I. (1980). Conformal changes of almost contact metric manifolds. *Lecture Notes in Mathematics,* **792:** 435-443.

Yano K. and Kon M. (1984). Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3.World Scientific Publishing Corporation, Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Halil DOĞAN
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Afyonkarahisar, 01.07.1983
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:	0535-7283520 / halildogan0303@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Afyon Lisesi, 2001.
Lisans	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2005.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Milli Eğitim Bakanlığı, Çay İmam Hatip Lisesi, 2015-

Yayınları (SCI ve Diğer):

1. "Semi-symmetric almost α-cosymplectic three manifolds" başlıklı çalışma yayına sunulacaktır.

14.FEN.BİL.44 numaralı Proje Kapsamındaki Etkinlikler**:**

1. "Some Curvature Tensors on Almost α-Cosymplectic Three-Manifolds" başlıklı çalışma IJAS Barselona Konferansın'da bildiri olarak sunulmuştur (Haziran 2015).
2. "Üç Boyutlu Yarı Simetrik Hemen Hemen α-Kosimplektik Manifoldlar Üzerine" başlıklı çalışma 13. Geometri Sempozyumun'da bildiri olarak sunulmuştur (Temmuz 2015).