DUAL LORENTZ UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet BOZKIR

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül, 2011

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DUAL LORENTZ UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Mehmet BOZKIR

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2011

TEZ ONAY SAYFASI

Mehmet BOZKIR tarafından hazırlanan "Dual Lorentz uzayında rektifiyan eğriler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15.09.2011 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

Başkan : Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE

Üye : Doç. Dr. Murat PEKER

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
…/…./……… tarih ve
…………………………….. sayılı kararıyla
onaylanmıştır.

Enstitü Müdürü
Prof Dr. Mevlüt DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DUAL LORENTZ UZAYINDA

REKTiFİYAN EĞRİLER

Mehmet BOZKIR

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, dual sayılar ve $\mathbb{D}$ modül ile ilgili temel kavramlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde, 3 boyutlu Öklid uzayında rektifiyan eğrilerin özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında eğrilerin Frenet formülleri elde edilmiş ve bu uzayda rektifiyan eğrilerin özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde, dual uzayda rektifiyan eğrilerin özellikleri ve altıncı bölümde, dual Lorentz uzayında rektifiyan eğrilerin özellikleri incelenmiştir.

2011, viii+109 sayfa

Anahtar Kelimeler: Öklid uzayı, Minkowski uzayı, rektifiyan eğriler, dual uzay, dual Lorentz uzayı, rektifiyan düzlem.

ABSTRACT

Ms. Thesis

RECTIFYING CURVES
IN THE DUAL LORENTZIAN SPACE

Mehmet BOZKIR

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Derya SAĞLAM

This thesis consists of six chapters. The first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, we have given about the basic concepts of dual number and $\mathbb{D}$ modül. In the third chapter, in the 3-dimensional Euclidean space the properties of rectifying curves were investigated. In the fourth section, in the Minkowski space Frenet formulas of curves were obtained and the properties of rectifying curves in the Minkowski space were investigated. In the fifth section and the sixth section the properties of rectifying curves were investigated in the dual space and the dual Lorentz space.

2011, viii+109 pages

Key Words : Euclidean space, Minkowski space, rectifying curves, dual space, dual Lorentz space, rectifying plane.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen ve yazım aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'a, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Emine SOYTÜRK SEYRANTEPE (Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)'ye, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkür ederim.

Mehmet BOZKIR
AFYONKARAHİSAR, 2011

SİMGELER DİZİNİ

E^3	Öklid Uzayı
E_1^3	$3-$ boyutlu Minkowski uzayı
$\mathbb{D}$	Dual düzlem
ρ	Uzaklık fonksiyonu
$\Vert,\Vert$	Norm fonksiyonu
$\langle,\rangle$	İç çarpım veya Lorentz metriği
$\mathcal{C}$	E_1^3 uzayının ışık konisi
$\mathcal{T}$	E_1^3 uzayının zaman konisi
$\mathbb{D}^3$	$\mathbb{D}-$Modül
ϕ	Dual açı
κ	Eğrilik fonksiyonu
τ	Burulma fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Öklid uzayında bir eğrinin yer vektörü oskülatör düzlemde yatıyor ise eğri düzlemseldir. Eğer eğrinin yer vektörü normal düzlemde ise eğri küreseldir. Öklid uzayında bir α eğrisinin yer vektörü ne zaman rektifiyan düzlemde yatar sorusuna karşılık 2003 yılında Chen yaptığı bir çalışmasında eğrinin yer vektörünün rektifiyan düzlemde olma durumunu incelemiştir. Chen rektifiyan eğrinin ρ uzaklık fonksiyonunun sabit olmadığını, yer vektörünün teğet bileşeninin $\langle \alpha, T \rangle = s + b$ şeklinde olduğunu, normal ve binormal bileşenlerinin sabit olduğunu, rektifiyan eğrilerin $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmayan lineer fonksiyon olduğunu göstermiş ve rektifiyan eğrileri sınıflandırmıştır. İlarslan ve arkadaşları (2003) yılında Minkowski uzayında rektifiyan eğrilerin özelliklerini, yer vektörü uzaysı veya zamansı olan rektifiyan düzlemde yatan rektifiyan eğrilerin sınıflandırılmasını ve birim hızlı eğriliği 1 olan ışıksı rektifiyan eğrileri incelemişlerdir. Yücesan ve arkadaşları (2007) yılında dual uzayda rektifiyan eğrilerin özelliklerini belirlemişlerdir. Özbey ve Oral (2009) yılında dual Lorentz uzayında rektifiyan eğrilerin özelliklerini, rektifiyan eğrilerin uzaklık fonksiyonunu ve bu eğrilerin yer vektörlerini belirlemişlerdir. Bu tezde yukarıdaki çalışmalardan yararlanılarak rektifiyan eğrilerin özellikleri incelenmiştir.

2. DUAL SAYILAR

2.1. Dual Sayılar Tanım ve Özelikleri

Bu bölümde dual sayılar ve $\mathbb{D}$ modül ile ilgili temel tanım ve teoremleri vereceğiz. Bu bölüm için referansımız (Hacısalihoğlu 1983) olacaktır.
$\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar cismini de $\mathbb{R}$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.1. $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, a^*)$ ikilisine bir **sıralı ikili** denir.
Bu şekilde sıralı ikililerin oluşturduğu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilirse

$$\mathbb{D} = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

olur.
Tanım 2.1.2. **(Toplama)** $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

şeklinde tanımlanan $\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemi $\mathbb{D}$ deki **toplama** işlemi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 (Çarpma) $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere

$$A \odot B = AB = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, ab^* + a^*b)$$

şeklinde tanımlanan $\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemi $\mathbb{D}$ deki **çarpma** işlemi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.4 (Eşitlik) $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ için $a = b$, $b = b^*$ ise A ile B eşittir denir ve $A = B$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesi olmak üzere

$$\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri Tanım 2.1.2, Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.4 deki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ cümlesine **dual sayılar sistemi** ve $\forall (a, a^*) \in \mathbb{D}$ elemanına da bir **dual sayı** denir.

Teorem 2.1.1. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

İspat $i)$ $(\mathbb{D}, \oplus)$ ikilisi bir değişmeli gruptur.

$H_1 : \oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ şeklinde tanımlandığından $\mathbb{D}$ cümlesi $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.

$H_2 : \oplus$ işleminde birleşme özelliği vardır. $\forall A, B, C \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \oplus C &= [(a, a^*) \oplus (b, b^*)] \oplus (c, c^*) \\
&= (a + b, a^* + b^*) \oplus (c, c^*) \\
&= ((a + b) + c, (a^* + b^*) + c^*) \\
&= (a + (b + c), a^* + (b^* + c^*)) \\
&= (a, a^*) \oplus (b + c, b^* + c^*) \\
&= (a, a^*) \oplus [(b, b^*) \oplus (c, c^*)] \\
&= A \oplus (B \oplus C)
\end{aligned}$$

$H_3 : \oplus$ toplama işlemine göre $\mathbb{D}$ de bir $0 = (0, 0)$ etkisiz elemanı vardır. $\forall A \in \mathbb{D}$ için $A \oplus 0 = 0 \oplus A = A$ dir.

$H_4 : \oplus$ işlemine göre $\forall A \in \mathbb{D}$ için

$$A \oplus X = X \oplus A = 0$$

olacak şekilde bir tek $X \in \mathbb{D}$ ters elemanı vardır. Burada $A = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ için $X = (-a, -a^*) \in \mathbb{D}$ dır. Öyleyse $(\mathbb{D}, \oplus)$ ikilisi bir gruptur.

$H_5 : \forall A, B \in \mathbb{D}$ için $A \oplus B = B \oplus A$ olur. Gerçekten

$$\begin{aligned}
A \oplus B &= (a, a^*) \oplus (b, b^*) \\
&= (a + b, a^* + b^*) \\
&= (b + a, b^* + a^*) \\
&= (b, b^*) \oplus (a, a^*) \\
&= B \oplus A
\end{aligned}$$

olur. Öyleyse $(\mathbb{D}, \oplus)$ ikilisi bir değişmeli gruptur.

$H_6 : \odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ şeklinde tanımlandığından $\odot$ çarpma işlemine göre $\mathbb{D}$ cümlesi kapalıdır.

$H_7 : \forall A, B, C \in \mathbb{D}$ için $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$ olur.

$$\begin{aligned}
(A \odot B) \odot C &= ((a, a^*) \odot (b, b^*)) \odot (c, c^*) \\
&= ((ab, ab^* + a^*b)) \odot (c, c^*) \\
&= ((ab)\,c, (ab)\,c^* + (ab^* + a^*b)\,c) \\
&= (a\,(bc)\,, a\,(bc^*) + a\,(b^*c) + a^*\,(bc)) \\
&= (a\,(bc)\,, a\,(bc^* + b^*c) + a^*\,(bc)) \\
&= (a, a^*) \odot ((bc, bc^* + b^*c)) \\
&= (a, a^*) \odot ((b, b^*) \odot (c, c^*)) \\
&= A \odot (B \odot C)
\end{aligned}$$

$H_8 : \forall A, B, C \in \mathbb{D}$ için

$$(A \oplus B) \odot C = (A \odot C) \oplus (B \odot C)$$

ve

$$C \odot (A \oplus B) = (C \odot A) \oplus (C \odot B)$$

olur.

$$\begin{aligned}
(A \oplus B) \odot C &= ((a, a^*) \oplus (b, b^*) \odot (c, c^*)) \\
&= (a + b, a^* + b^*) \odot (c, c^*) \\
&= ((a + b)\,c, (a + b)\,c^* + (a^* + b^*)\,c) \\
&= ((ac + bc)\,, ac^* + bc^* + a^*c + b^*c) \\
&= (ac, ac^* + a^*c) \oplus (bc, bc^* + b^*c) \\
&= ((a, a^*) \odot (c, c^*)) \oplus ((b, b^*) + (c, c^*)) \\
&= (A \odot C) \oplus (B \odot C)
\end{aligned}$$

Aynı şekilde soldan dağılma özelliği de gösterilir. O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir halkadır.

$H_9 : \forall A, B \in \mathbb{D}$ için $A \odot B = B \odot A$ olur. Gerçekten

$$\begin{aligned} A \odot B &= (a, a^*) \odot (b, b^*) \\ &= (ab, ab^* + a^*b) \\ &= (ba, b^*a + ba^*) \\ &= (ba, ba^* + b^*a) \\ &= (b, b^*) \odot (a, a^*) \\ &= B \odot A \end{aligned}$$

O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ halkası bir değişimli halkadır.

H_{10} : İkinci işlem $\odot$ için $(1,0)$ bir etkisiz elemandır. $\forall A \in \mathbb{D}$ için

$$(1,0) \odot A = A \odot (1,0) = A$$

olur. O halde $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ halkası bir birimli halkadır. Bundan sonra $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ halkası $\mathbb{D}$ ile gösterilecektir.●

Teorem 2.1.2. $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir.

İspat $(\mathbb{D} - \{0\}, \odot)$ grup olmadığından $(\mathbb{D}, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir. Gerçekten $\forall A \in \mathbb{D}$ için

$$A \odot X = X \odot A = (1,0)$$

olacak şekilde bir tek $X \in \mathbb{D}$ ters elemanı yoktur. Çünkü

$$\begin{aligned} A \odot X &= (1,0) \\ (a, a^*) \odot (x, x^*) &= (1,0) \\ (ax, ax^* + a^*x) &= (1,0) \end{aligned}$$

olduğundan

$$ax = 1, \;\; ax^* + a^*x = 0$$

olur. Buna göre $X = \left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{a^*}{a^2} \right)$ olduğundan $a = 0$ olan $(0, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayılarının tersi yoktur.●

Not (Çıkarma). $A \oplus X = B$ denkleminin bir tek çözümü vardır.

$$(a + x, a^* + x^*) = (b, b^*)$$

olduğundan dual sayıların eşitliği tanımına göre

$$X = B - A = (b - a, b^* - a^*) \in \mathbb{D}$$

elde edilir. Dual sayılar, çıkarma işlemine göre kapalıdır.

Tanım 2.1.6 (Sıfır Eleman) $A \oplus X = A$ denkleminin çözümü olarak tanımlanan dual sayıya $\mathbb{D}$ nin **sıfırı** denir ve $0 = (0, 0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.7 (Bölme) $A \neq (0, a^*)$ ise $A \odot X = B$ denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten

$$\begin{aligned} (a, a^*) \odot (x, x^*) &= (b, b^*) \\ (ax, ax^* + a^*x) &= (b, b^*) \end{aligned}$$

olduğundan

$$ax = b \ , \ ax^* + a^*x = b^*$$

olur. Buna göre

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right)$$

bulunur. $a \neq 0$ olduğundan X bir dual sayıdır.

Teorem 2.1.3. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cümlesine izomorf bir alt cümleyi alt cisim olarak kapsar.

İspat $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ fonsiyonunu $f : (a, 0) \to a$ olarak tanımlayalım. f bir izomorfizmdir.

$i)$ f lineerdir: $A = (a, 0)$ ve $B = (b, 0) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$f(A \oplus B) = f(a + b, 0) = a + b = f(a, 0) + f(b, 0) = f(A) + f(B)$$

olur. Ayrıca

$$f(A \odot B) = f(ab, 0) = ab = f(a, 0)\, f(b, 0) = f(A)\, f(B)$$

dir.

$ii)$ f birebirdir: $A=(a,0)$, $B=(b,0)$ ve $A\neq B\Longrightarrow f(A)\neq f(B)$ dir. Gerçekten dual sayıların eşitliği tanımına göre $A\neq B$ ise $a\neq b$ dir. Öyleyse $f(A)\neq f(B)$ dir.

$iii)$ f örtendir: $\forall x\in\mathbb{R}$ reel sayısı bir tek $(x,0)\in\mathbb{D}$ dual sayısının f altındaki görüntüsüdür.•

Tanım 2.1.8. $A=(a,a^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısında "a" reel sayısına A nın **reel kısmı**, "a^*" reel sayısına da A nın **dual kısmı** denir ve $ReA=a$, $DuA=a^*$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.1.9. $(1,0)=1$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin **birim elemanı** veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir.

Tanım 2.1.10. $(0,1)$ dual sayısına **dual birim** denir ve kısaca ε ile gösterilir.

$$\varepsilon\odot\varepsilon=\varepsilon^2=(0,0)$$

dır.

Tanım 2.1.11. $(0,0)\in\mathbb{D}$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin $\oplus$ işlemine göre **birim elemanı** denir ve

$$f:\mathbb{D}\rightarrow\mathbb{R}$$

izomorfizminde karşılık geldiği "0" reel sayısı ile gösterilir.

Teorem 2.1.4 . $A=(a,a^*)\in\mathbb{D}$ dual sayısı $A=a+\varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir.

İspat $A=(a,a^*)\in\mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} A &= (a,a^*) \\ &= (a,0)\oplus(0,a^*) \\ &= (a,0)\oplus(0,1)\odot(a^*,0) \\ &= a+\varepsilon a^* \end{aligned}$$

olur.•

Teorem 2.1.5. İki dual sayının çarpımı sıfır ise çarpanlarından biri sıfır olmak zorunda değildir.

İspat Sıfırdan farklı $A=(0,a^*)$ ve $B=(0,b^*)$ dual sayıları için

$$A \odot B = (0,a^*) \odot (0,b^*) = (0,0)$$

olur.●

Teorem 2.1.6. $A=(a,a^*) \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile A nın çarpımı $\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$ dır.

İspat $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan λ reel sayısı $(\lambda,0)$ dual sayısına izomorftur.

$$\lambda A = (\lambda,0) \odot (a,a^*) = (\lambda a, \lambda a^*)$$

olur.●

Tanım 2.1.12. Bir A dual sayısının bir λ reel skaler ile çarpımı

$$\lambda A = (\lambda a, \lambda a^*)$$

olarak tanımlanır. Bu çarpım

$$\mathbb{R} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dış işlemdir.

Sonuç. $\mathbb{R}$ de tanımlanan $(+)$ ve $(.)$ işlemlerine ait kurallar $\mathbb{D}$ de de aynen kullanılabilir. Bundan sonra $\oplus$ ve $\odot$ sembolleri yerine $(+)$, $(.)$ işaretleri kullanılacaktır.

2.2. Dual Düzlem

$x, x^* \in \mathbb{R}$ reel değişkenler olmak üzere $Z=(x,x^*)=x+\varepsilon x^*$ olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.1. $Z=(x,x^*)$ dual sayılarının bütününe **dual düzlem** denir ve $\mathbb{D}$ ile gösterilir. Herbir (x,x^*) ikilisine dual düzlemin bir **dual noktası** denir.

Tanım 2.2.2. $Z=x+\varepsilon x^*$ mutlak değeri diye $|x|$ reel sayısına denir ve $|Z|=|x+\varepsilon x^*|$ ile gösterilir. Buna göre

$$|Z| = |x+\varepsilon x^*| = |x|$$

dir.

Teorem 2.2.1. $|x+\varepsilon x^*| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ dır.

İspat

$$\begin{aligned} |x+\varepsilon x^*| &= 0 \iff |x| &= 0 \\ & \iff x &= 0 \end{aligned}$$

olur.•

Teorem 2.2.2. İki dual sayının çarpımının mutlak değeri mutlak değerler çarpımına eşittir. Yani

$$|Z_1.Z_2| = |Z_1|\,.\,|Z_2|$$

dir.

İspat $Z_1, Z_2 \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |Z_1.Z_2| &= |(x_1+\varepsilon x_1^*)(x_2+\varepsilon x_2^*)| \\ &= |x_1x_2+\varepsilon(x_1x_2^*+x_1^*x_2)| \\ &= |x_1x_2| \\ &= |x_1|\,|x_2| \\ &= |Z_1|\,|Z_2| \end{aligned}$$

elde edilir.•

Teorem 2.2.3 (Üçgen eşitsizliği). $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{D}$ için

$$|Z_1+Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

dir.

İspat $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{D}$ için

$$\begin{aligned} |Z_1+Z_2| &= |(x_1+\varepsilon x_1^*)+(x_2+\varepsilon x_2^*)| \\ &= |(x_1+x_2)+\varepsilon(x_1^*+x_2^*)| \\ &= |x_1+x_2| \\ &\leq |x_1|+|x_2| \\ &\leq |Z_1|+|Z_2| \end{aligned}$$

elde edilir.•

Tanım 2.2.3 (Eşlenik dual sayılar). $Z = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının eşleniği $\overline{Z} = x - \varepsilon x^*$ dual sayısına denir.

Teorem 2.2.4.

i) $Z \in \mathbb{D}$ ise $\overline{Z}$ nin dual eşleniği Z dir. Yani $\overline{\left(\overline{Z}\right)} = Z$ dir.

ii) $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$ dir.

iii) $\forall Z_1, Z_2 \in \mathbb{D}$ için $\overline{Z_1.Z_2} = \overline{Z_1}.\overline{Z_2}$ ve $Z_2 \neq (0, x^*)$ için $\overline{\left(\dfrac{Z_1}{Z_2}\right)} = \dfrac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ dir.

iv) $\forall Z \in \mathbb{D}$ için $Z.\overline{Z} = |Z|^2$ dir.

v) $Z + \overline{Z} = 2\,\mathrm{Re}(Z)$, $Z - \overline{Z} = 2\varepsilon Du(Z)$ ve $Z = \overline{Z}$ ise $Z \in \mathbb{R}$ dir.

İspat

i) $Z = x + \varepsilon x^*$olmak üzere

$$\overline{\left(\overline{Z}\right)} = \overline{\left(\overline{x + \varepsilon x^*}\right)} = \overline{(x - \varepsilon x^*)} = x + \varepsilon x^* = Z$$

olur.

ii) $Z_1 = (x_1 + \varepsilon x_1^*)\,, Z_2 = (x_2 + \varepsilon x_2^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1 + Z_2} &= \overline{(x_1 + \varepsilon x_1^*) + (x_2 + \varepsilon x_2^*)} \\
&= \overline{(x_1 + x_2) + \varepsilon\,(x_1^* + x_2^*)} \\
&= (x_1 + x_2) - \varepsilon\,(x_1^* + x_2^*) \\
&= (x_1 - \varepsilon x_1^*) + (x_2 - \varepsilon x_2^*) \\
&= \overline{Z_1} + \overline{Z_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $Z_1 = (x_1 + \varepsilon x_1^*)\,, Z_2 = (x_2 + \varepsilon x_2^*) \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\overline{Z_1.Z_2} &= \overline{(x_1 + \varepsilon x_1^*)\,(x_2 + \varepsilon x_2^*)} \\
&= \overline{(x_1 x_2 + \varepsilon\,(x_1 x_2^* + x_2 x_1^*))} \\
&= x_1 x_2 - \varepsilon\,(x_1 x_2^* + x_2 x_1^*) \\
&= (x_1 - \varepsilon x_1^*)\,(x_2 - \varepsilon x_2^*) \\
&= \overline{Z_1}.\overline{Z_2}
\end{aligned}$$

olur. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$ eşitliği de aynı şekilde gösterilir.

$iv)$ $Z = x + \varepsilon x^*$olmak üzere

$$\begin{aligned} Z.\overline{Z} &= (x + \varepsilon x^*)(x - \varepsilon x^*) \\ &= x^2 + \varepsilon(-xx^* + x^*x) \\ &= x^2 \\ &= \left|x^2\right| \\ &= |Z|^2 \end{aligned}$$

olur.

$v)$ $Z = x + \varepsilon x^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Z + \overline{Z} &= (x + \varepsilon x^*) + (\overline{x + \varepsilon x^*}) \\ &= (x + \varepsilon x^*) + (x - \varepsilon x^*) \\ &= 2x \\ &= 2\,\mathrm{Re}(Z) \end{aligned}$$

dir. Aynı şekilde $z - \overline{z} = 2\varepsilon Du(z)$ olduğu ispatlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} Z = \overline{Z} &\Longrightarrow x + \varepsilon x^* = x - \varepsilon x^* \\ &\Longrightarrow x^* = -x^* \\ &\Longrightarrow x^* = 0 \\ &\Longrightarrow Z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir.•

2.3. Dual Vektörler Uzayı ($\mathbb{D}$ Modül)

Tanım 2.3.1. Birimi 1 olan değişmeli bir halka H olsun. H üzerindeki bir modül diye bir S değişmeli grubu ile aşağıdaki özelliklere sahip olan S üzerindeki bir

$$\begin{aligned} H \times S &\rightarrow S \\ (a, \alpha) &\longrightarrow a\alpha \end{aligned}$$

dış işlemine denir.

$a, b \in H$ ve $\alpha, \beta \in S$ olmak üzere

$M_1 : a(\alpha + \beta) = a\alpha + b\beta$

$M_2 : (a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$

$M_3 : (ab)\alpha = a(b\alpha)$

$M_4 : 1.\alpha = \alpha.$

$\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} = \mathbb{D}^3$ bir modüldür. $\mathbb{D}$ nin, birimi $(1, 0) = 1$ olan değişmeli bir halka olduğu Teorem 2.1.1 de gösterilmişti. $\mathbb{D}^3$ ün $\mathbb{D}$ üzerinde bir modül olduğunu göstermek için önce $(\mathbb{D}^3, +)$ nın bir değişmeli grup olduğunu sonra da $\mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$ dış işleminin M_1, M_2, M_3, M_4 aksiyomlarını sağladığı gösterilmelidir.

$$\mathbb{D}^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{D}\}$$

cümlesinin herbir elemanı büyük harf ile gösterilirse $A \in \mathbb{D}^3$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i), (i = 1, 2, 3)$ gösterimlerinden birisi kullanılır.

Tanım 2.3.2. $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için

$$A = B \Longleftrightarrow A_i = B_i \, (i = 1, 2, 3)$$

dir.

Tanım 2.3.3. $A = (A_i), B = (B_i) \in \mathbb{D}^3$ için

$$\begin{array}{rcccl} + : & \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 & \to & \mathbb{D}^3 & \\ & (A, B) & \to & A + B & = (A_i + B_i) \;\; (i = 1, 2, 3) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan iç işleme $\mathbb{D}^3$ de A ile B nin **toplamı** denir.

Tanım 2.3.4. $\lambda \in \mathbb{D}$ ve $A \in \mathbb{D}^3$ için

$$\begin{array}{cccl} \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 & \to & \mathbb{D}^3 & \\ (\lambda, A) & \to & \lambda A & = (\lambda A_i) \;\; (i = 1, 2, 3) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dış işleme A nın λ skaları ile **çarpımı** denir.

Teorem 2.3.1. $(\mathbb{D}^3, +)$ sistemi bir değişmeli gruptur.

İspat

$G_1 : \forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.3 den $A + B \in \mathbb{D}^3$ dür.

$G_2 : \forall A, B, C \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.3 ve H_2 den

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

dir.

$G_3 : 0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere Tanım 2.3.3 ve H_3 den $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için

$$A + 0 = 0 + A$$

dır. Buna göre $0 = (0, 0, 0)$ elemanı $(+)$ işlemine göre $\mathbb{D}^3$ deki **birim elemandır**.

$G_4 : \forall A \in \mathbb{D}^3$ için $A + X = X + A = 0$ olacak şekilde bir tek

$$X = -A = -(A_i) \in \mathbb{D}^3, \ \ (1 \leq i \leq 3)$$

elemanı vardır. $-A$, $(+)$ işlemine göre A nın tersidir.

$G_5 : \forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.3 den $A + B = B + A$ dır. O halde $(\mathbb{D}^3, +)$ bir değişmeli gruptur.•

Teorem 2.3.2. $(\mathbb{D}^3, +, .)$ sistemi $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür.

İspat Teorem 2.3.1 den $(\mathbb{D}^3, +)$ nın bir değişmeli grup olduğu ve Teorem 2.2.1 den $\mathbb{D}$ nin birimi 1 ve değişimli bir halka olduğu da bilinmektedir.

Şimdi Tanım 2.3.4 de tanımlanan skaler ile çarpma işleminin Tanım 2.3.1 deki M_1, M_2, M_3, M_4 aksiyomları sağladığı gösterilecek:

$M_1 : \forall \alpha \in \mathbb{D}$ ve $\forall A, B \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.4 den $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$ dir.

$M_2 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}$ ve $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.4 den $(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$ dir.

$M_3 : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{D}$ ve $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için Tanım 2.3.4 den $(\alpha\beta) A = \alpha (\beta A)$ dir.

$M_4 : (1, 0) \in \mathbb{D}$ elemanının $\mathbb{R}$ deki izomorfu 1 olmak üzere Tanım 2.3.4 ve H_6 dan $\forall A \in \mathbb{D}^3$ için $1.A = A$ dır.•

Bundan sonra $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası üzerinde tanımlanan bu modül $\mathbb{D}$ **-Modül** olarak adlandırılacaktır.

Tanım 2.3.5. $\mathbb{D}$ **-**Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere **dual vektörler** denir.

Teorem 2.3.3. $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^3$ üç boyutlu reel vektör uzayını göstermektedir.) olmak üzere $\mathbb{D}$ **-**Modül'de herbir $\overrightarrow{A}$ dual vektörü

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*},\ \varepsilon = (1,0) \in \mathbb{D}$$

şeklinde yazılabilir.

İspat $\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, A_3),\ A_i = a_i + \varepsilon a_i^*, 1 \leq i \leq 3$ olduğundan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} &= (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon\,(a_1^*, a_2^*, a_3^*) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)\,, \overrightarrow{a^*} = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ dersek $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ olur.
Bu teoremde görülüyor ki dual vektörler birer sıralı reel vektör ikilileridir. Yani $\overrightarrow{A} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$dır.•

Teorem 2.3.4. $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ dual vektörünün $\lambda \in \mathbb{R}$ skaları ile çarpımı

$$\lambda\overrightarrow{A} = \left(\lambda\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{a^*}\right)$$

dır.

İspat $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı $(\lambda, 0)$ dual sayısına izomorftur.

$$\lambda\overrightarrow{A} = (\lambda, 0)\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right) = \left(\lambda\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{a^*}\right)$$

dır.•

Teorem 2.3.5. $\overrightarrow{A} = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right),\ \overrightarrow{B} = \left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b^*}\right) \in \mathbb{D}$ **-**Modül için

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \text{ ve } \overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{b^*}$$

dır.

İspat $\overrightarrow{A} = (A_1, A_2, A_3),\ A_i = a_i + \varepsilon a_i^*,\ \overrightarrow{B} = (B_1, B_2, B_3),\ B_i = b_i + \varepsilon b_i^*,\ 1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} &= (a_1 + \varepsilon a_1^*, a_2 + \varepsilon a_2^*, a_3 + \varepsilon a_3^*) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + \varepsilon\,(a_1^*, a_2^*, a_3^*) \\ &= \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \end{aligned}$$

dir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= (b_1+\varepsilon b_1^*, b_2+\varepsilon b_2^*, b_3+\varepsilon b_3^*) \\ &= (b_1,b_2,b_3)+\varepsilon\,(b_1^*,b_2^*,b_3^*) \\ &= \overrightarrow{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\end{aligned}$$

dır. Tanım 2.3.2 dual vektörlerin eşitliğinden

$$\begin{aligned}A &= B \Leftrightarrow A_i = B_i\,(i=1,2,3) \\ &\Leftrightarrow a_i = b_i \ ve\ a_i^* = b_i^* \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \ ve\ \overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{b^*}\end{aligned}$$

dir.●

Teorem 2.3.6. $\mathbb{D}$ **-**Modül'ün, elemanları $\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right)$ şeklinde olan bir alt cümlesi $\mathbb{R}^3$ vektör uzayına izomorftur.

İspat Bir $f:\mathbb{D}$ **-**Modül$\rightarrow\mathbb{R}^3$ fonksiyonu $f\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right)=\overrightarrow{a}$ olarak tanımlansın. f nin bir izomorfizm olduğunu gösterelim.

i) f lineerdir: $\forall\overrightarrow{A}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right),\overrightarrow{B}=\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{0}\right)\in\mathbb{D}$ **-**Modül olmak üzere

$$\begin{aligned}f\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right) &= f\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b},\overrightarrow{0}\right) \\ &= \overrightarrow{a}+\overrightarrow{b} \\ &= f\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right)+f\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{0}\right) \\ &= f\left(\overrightarrow{A}\right)+f\left(\overrightarrow{B}\right)\end{aligned}$$

olur. $\forall\lambda\in\mathbb{D}$ ve $\forall\overrightarrow{A}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right)\in\mathbb{D}$ **-**Modül için

$$\begin{aligned}f\left(\lambda\overrightarrow{A}\right) &= f\left(\lambda\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right) \\ &= \lambda\overrightarrow{a} \\ &= \lambda f\left(\overrightarrow{A}\right)\end{aligned}$$

olur.

$ii)$ f birebirdir: $\forall \overrightarrow{A}=\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right),\overrightarrow{B}=\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{0}\right)\in\mathbb{D}$ -Modül olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{A}\neq\overrightarrow{B} & \Longrightarrow & \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b} \\ & \Longrightarrow & f\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{0}\right)\neq f\left(\overrightarrow{b},\overrightarrow{0}\right) \\ & \Rightarrow & f\left(\overrightarrow{A}\right)\neq f\left(\overrightarrow{B}\right) \end{array}$$

olduğundan f birebirdir.

$iii)$ f örtendir: $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{R}^3$ reel vektörü, bir tek $\overrightarrow{X}=\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{0}\right)$ dual vektörünün f altındaki görüntüsüdür. Yani $f\left(\overrightarrow{x},\overrightarrow{0}\right)=\overrightarrow{x}$ dır.•

Bu teoremden görüldüğü gibi $\mathbb{D}$ -Modül, $\mathbb{R}^3$ reel vektör uzayından daha geniştir.

Tanım 2.3.6. $\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{0}\right)\in\mathbb{D}$ -Modül dual vektörüne sıfır dual vektör denir ve Teorem 2.3.6 da verilen f izomorfizminde karşılık geldiği $\overrightarrow{0}$ reel vektörü ile gösterilir.

2.4. $\mathbb{D}$ -Modül Üzerinde İç Çarpım

Tanım 2.4.1. $\mathbb{D}-$Modül de alınan $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ ve $\overrightarrow{B}=\overrightarrow{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}$ dual vektörlerinin iç çarpımı

$$f:\mathbb{D}^3\times\mathbb{D}^3\to\mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f\left(\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right)=\left\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\overrightarrow{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right\rangle$$

olarak tanımlanır.

Vektör uzayı üzerinde olduğu gibi iç çarpım önermelerini $\mathbb{D}-$Modül üzerinde de kabul edebiliriz. Bu önermeler şunlardır.

$\dot{I}_1:\forall\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\in\mathbb{D}-$Modül için

$$\left\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{B},\overrightarrow{A}\right\rangle$$

(Simetri özeliği)

$\dot{I}_2:\forall\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\in\mathbb{D}-$Modül ve $\forall\alpha\in\mathbb{D}$ için

$$\left\langle\alpha\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle=\left\langle\overrightarrow{A},\alpha\overrightarrow{B}\right\rangle=\alpha\left\langle\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle$$

(Skalar ile çarpımın birleşme özeliği)

$\dot{I}_3 : \forall \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in \mathbb{D}-$Modül için

$$\left\langle \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle$$

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \right\rangle$$

(Dağılma özeliği)

$\dot{I}_4 : \forall \overrightarrow{A} \in \mathbb{D}-$Modül için

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$$

Bu önermeler reel vektör uzayındaki iç çarpım önermeleri ile aynıdır. Buna göre

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon \left[\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right] = \left\langle \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \right\rangle$$

yazılabilir.

2.5. Dual Vektörlerin Normlanması

Tanım 2.5.1. Bir $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün normu

$$\left\| \overrightarrow{A} \right\| = \left(\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\| \overrightarrow{a} \| , \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\| \overrightarrow{a} \|} \right), \overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$$

dual sayısına denir. Bu dual sayı

$$a = \| \overrightarrow{a} \| \text{ ve } a^* = \frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\| \overrightarrow{a} \|}$$

olmak üzere

$$\left\| \overrightarrow{A} \right\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılır.

Tanım 2.5.2. Normu reel birime karşılık gelen $(1, 0)$ dual sayısı olan dual vektöre **birim dual vektör** denir.

Teorem 2.5.1. $\overrightarrow{A}=\overrightarrow{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$ birim dual vektör ise

$$\|\overrightarrow{a}\|=1,\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle=0$$

dır.

İspat Norm tanımından

$$\left(\|\overrightarrow{a}\|,\frac{\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|}\right)=(1,0)\Longrightarrow\|\overrightarrow{a}\|=1\ ve\ \frac{\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|}=0$$

olduğundan $\|\overrightarrow{a}\|=1$ ve $\left\langle\overrightarrow{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle=0$ elde edilir.$\bullet$

Teorem 2.5.2. $\overrightarrow{A}\neq\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{a^*}\right)\in\mathbb{D}$ -modül olmak üzere $\overrightarrow{U}=\dfrac{\overrightarrow{A}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\|}$ bir birim dual vektördür.

İspat $\{\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\}$ sistemi $\mathbb{R}^3$ de standart baz olsun.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}&=\overrightarrow{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\\&=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}+\varepsilon\left(a_1^*\overrightarrow{e_1}+a_2^*\overrightarrow{e_2}+a_3^*\overrightarrow{e_3}\right)\\&=\left(a_1+\varepsilon a_1^*\right)\overrightarrow{e_1}+\left(a_2+\varepsilon a_2^*\right)\overrightarrow{e_2}+\left(a_3+\varepsilon a_3^*\right)\overrightarrow{e_3}\end{aligned}$$

ve

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|=a+\varepsilon a^*$$

olduğundan

$$\overrightarrow{U}=\frac{\overrightarrow{A}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\|}=\frac{a_1+\varepsilon a_1^*}{a+\varepsilon a^*}\overrightarrow{e_1}+\frac{a_2+\varepsilon a_2^*}{a+\varepsilon a^*}\overrightarrow{e_2}+\frac{a_3+\varepsilon a_3^*}{a+\varepsilon a^*}\overrightarrow{e_3}$$

elde edilir. Her terim için bölme işlemi yapılırsa

$$\begin{aligned}\overrightarrow{U}&=\left(\frac{a_1}{a}+\varepsilon\frac{aa_1^*-a^*a_1}{a^2}\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\frac{a_2}{a}+\varepsilon\frac{aa_2^*-a^*a_2}{a^2}\right)\overrightarrow{e_2}+\left(\frac{a_3}{a}+\varepsilon\frac{aa_3^*-a^*a_3}{a^2}\right)\overrightarrow{e_3}\\&=\left(\frac{a_1}{a},\frac{a_2}{a},\frac{a_3}{a}\right)+\varepsilon\left(\frac{aa_1^*}{a^2},\frac{aa_2^*}{a^2},\frac{aa_3^*}{a^2}\right)-\varepsilon\left(\frac{a^*a_1}{a^2},\frac{a^*a_2}{a^2},\frac{a^*a_2}{a^2}\right)\\&=\frac{1}{a}\left(a_1,a_2,a_3\right)+\varepsilon\frac{1}{a}\left(a_1^*,a_2^*,a_3^*\right)-\varepsilon\frac{a^*}{a^2}\left(a_1,a_2,a_3\right)\end{aligned}$$

olduğundan $a=\|\overrightarrow{a}\|$ ve $a^{*}=\dfrac{\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{a^{*}}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|}$ konulursa

$$\overrightarrow{U}=\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}+\varepsilon\left(\frac{\overrightarrow{a^{*}}}{\|\overrightarrow{a}\|}-\frac{\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{a^{*}}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|^{2}}.\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\right)$$

elde edilir. $k=\dfrac{\left\langle \overrightarrow{a},\overrightarrow{a^{*}}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|^{2}}$ alınırsa

$$\overrightarrow{U}=\overrightarrow{u}+\varepsilon\overrightarrow{u^{*}}=\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}+\varepsilon\left(\frac{\overrightarrow{a^{*}}-k\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\right)$$

olur. $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{u}+\varepsilon\overrightarrow{u^{*}}$ birim dual vektöründe

$$\overrightarrow{u}=\frac{\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}\text{ ve }\overrightarrow{u^{*}}=\frac{\overrightarrow{a^{*}}-k\overrightarrow{a}}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

dır. $\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\rangle=1$ ve $\left\langle\overrightarrow{u},\overrightarrow{u^{*}}\right\rangle=0$ olduklarından $\overrightarrow{U}$ bir birim dual vektördür.
Yukarıdaki teoreme göre

$$\overrightarrow{A}=\left\|\overrightarrow{A}\right\|.\overrightarrow{U}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik

$$\overrightarrow{A}=a\overrightarrow{u}+\varepsilon\left(a\overrightarrow{u^{*}}+a^{*}\overrightarrow{u}\right)$$

biçiminde veya $a^{*}=k\|\overrightarrow{a}\|=ka$ olduğundan

$$\overrightarrow{A}=a(1+\varepsilon k)\overrightarrow{U}$$

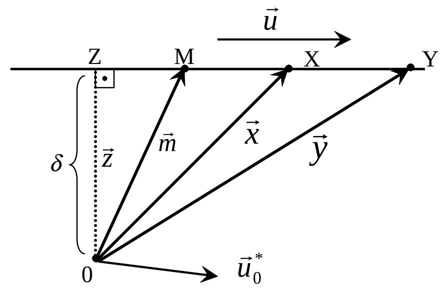
olarak yazılabilir.•

2.6. E-Study Dönüşümü

Tanım 2.6.1 (Birim Dual Küre). $\left\{\overrightarrow{X}=\overrightarrow{x}+\varepsilon\overrightarrow{x^{*}}:\left\|\overrightarrow{X}\right\|=(1,0)\,;\overrightarrow{x},\overrightarrow{x^{*}}\in\mathbb{R}^{3}\right\}$ cümlesine $\mathbb{D}$ - Modül'de **birim dual küre** denir.

Teorem 2.6.1 (E-Study). $\overrightarrow{A}\neq\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{a}\right)\in\mathbb{D}-$Modül olmak üzere $\mathbb{D}-$Modül'de denklemi $\left\|\overrightarrow{A}\right\|=(1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^{3}$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

İspat $\mathbb{R}^3$ deki bir doğru, bir 0 başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirten $\overrightarrow{u}$ vektörü tarafından tamamen belirlenir.



Şekil 2.6.1. R^3 de başlangıç noktası 0 olan yönlü doğru

Böyle bir doğrunun vektörel denklemi

$$(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{m}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \tag{2.6.1}$$

dır.

(2.6.1) denkleminde $\overrightarrow{u}$ yerine $\lambda\overrightarrow{u}$, $(\lambda \in \mathbb{R})$, alınırsa yine aynı doğru belirtilmiş olacağından $\overrightarrow{u}$ birim vektör olarak alınabilir.

$$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_0^*}$$

denirse $\overrightarrow{u_0^*}$ vektörüne $\overrightarrow{u}$ birim vektörünün 0 noktasına göre vektörel momenti olarak bakılabilir. $\overrightarrow{u_0^*}$, X noktasının doğru üzerinde seçilişinden bağımsızdır. Eğer doğru üzerinde X den başka bir Y noktası alınırsa

$$(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{m}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$$

dır. Buradan

$$\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_0^*} \tag{2.6.2}$$

olduğu görülür. $\overrightarrow{u_0^*}$ vektörünün boyu 0 noktasının doğruya olan dik uzaklığına eşittir. 0 noktasından doğruya inilen dikmenin ayağı Z olsun. $\overrightarrow{u_0^*}$ vektörü, X noktasının doğru üzerindeki seçilişinden bağımsız olduğundan

$$\overrightarrow{u_0^*} = \overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{u}$$

dur. $\overrightarrow{u_0^*}$ vektürünün boyu

$$\left\|\overrightarrow{u_0^*}\right\| = \|\overrightarrow{z} \wedge \overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{z}\| \, \|\overrightarrow{u}\| \, |\sin\phi| = \|\overrightarrow{z}\| = \delta \qquad (2.6.3)$$

dır. Son eşitliğe göre $\overrightarrow{u_0^*}$, 0 başlangıç noktasının seçilişine bağlıdır. Eğer $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çifti verilmiş ise $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğru tek anlamlı olarak tamamen bellidir.

$$\overrightarrow{u_0^*} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u}$$

olduğundan $\overrightarrow{u_0^*} \perp \overrightarrow{x}$ ve $\overrightarrow{u_0^*} \perp \overrightarrow{u}$ dur. 0 dan geçen ve $\overrightarrow{u_0^*}$ vektörüne dik olan düzlem içinde, 0 merkezli ve δ yarıçaplı çember çizilirse, 0 dan $\overrightarrow{u}$ vektörüne çizilen dik doğru çemberi iki noktada keser. Bu noktalardan çembere çizilen teğetler $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ ve$\left(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çiftlerine karşılık gelen yönlü doğrulardır. Momentin pozitif olduğu, yani $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çiftine karşılık gelen yönlü doğru gözönüne alınırsa bu da bir tanedir. Böylece $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrularla $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çiftleri birebir karşılık gelmektedir. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çifti $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle = 1 \text{ ve } \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*} \right\rangle = 0 \qquad (2.6.4)$$

koşullarını sağlamaktadır. $\mathbb{R}^3$ deki standart baza göre

$$\overrightarrow{u} = u_1\overrightarrow{e_1} + u_2\overrightarrow{e_2} + u_3\overrightarrow{e_3} \text{ ve } \overrightarrow{u_0^*} = u_{01}^*\overrightarrow{e_1} + u_{02}^*\overrightarrow{e_2} + u_{03}^*\overrightarrow{e_3}$$

dür. $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çiftinin

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right) = (u_1, u_2, u_3; u_{01}^*, u_{02}^*, u_{03}^*)$$

altı bileşeni **normlanmış homojen olmayan Plücker doğru koordinatlarıdır.** Eğer $\rho > 0$ olmak üzere $\overrightarrow{u}$ yerine $\overrightarrow{v} = \rho\overrightarrow{u}$ ve $\overrightarrow{u_0^*}$ yerine de $\overrightarrow{v_0^*} = \rho\overrightarrow{u_0^*}$ alınırsa (2.6.4) eşitliğinden dolayı

$$\left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0^*} \right\rangle = \left\langle \rho\overrightarrow{u}, \rho\overrightarrow{u_0^*} \right\rangle = \rho^2 \left\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*} \right\rangle = 0$$

koşulu sağlanır. Burada

$$\overrightarrow{v_0^*} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{v}$$

dir. $\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0^*}\right)$ vektör çiftinin

$$\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_0^*}\right) = (\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3; \rho u_{01}^*, \rho u_{02}^*, \rho u_{03}^*)$$

altı bileşeni **normlanmamış homojen Plücker doğru koordinatlarıdır.**

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right) = (u_1, u_2, u_3; u_{01}^*, u_{02}^*, u_{03}^*)$$

şeklindeki normlanmış homojen olmayan Plücker doğru koordinatları $\mathbb{R}^6$ uzayının bir elemanı gibi düşünülebilir ve (2.6.2) eşitliğinden dolayı $\mathbb{R}^6$ uzayının $\mathbb{R}^4$ alt uzayı alınabilir. E. Study'nin yaptığı gibi $\mathbb{R}^6$ uzayı yerine $\mathbb{D}$ - Modül alınacaktır.
$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D} -$ Modül birim dual vektör olsun. Teorem 2.5.1 den

$$\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle = 1, \ \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle = 0$$

olduğu bilinmektedir. Bu ise (2.6.4) ifadesi ile aynıdır. Yani $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}$ vektörüne ve $\overrightarrow{a^*}$ vektörü de $\overrightarrow{u_0^*}$ vektörüne karşılık gelmektedir. O halde $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u_0^*}\right)$ vektör çiftine $\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right)$ vektör çifti karşılık gelmektedir.
$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ birim dual vektörü verildiğinde $\mathbb{R}^3$ deki bir tek yönlü doğru tamamen belirlidir. $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrularla $\mathbb{D}$ - Modül'ün birim dual vektörleri birebir karşılık gelirler. Eğer $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ birim dual vektörleri $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ olarak alınırlarsa $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrular, denklemi

$$\left\| \overrightarrow{A} \right\| = (1, 0)$$

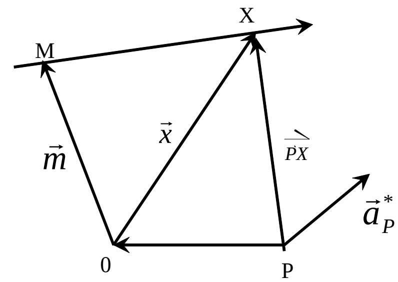
olan birim dual kürenin dual noktalarına birebir karşılık gelirler.•
Teorem 2.6.1 de gösterildiği gibi $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ birim dual vektörü $\mathbb{R}^3$ bir tek yönlü doğru belirtmektedir. $\overrightarrow{a}$ birim vektörü doğrunun yönünü, $\overrightarrow{a^*}$ ise 0 başlangıç noktasına göre $\overrightarrow{a}$ birim vektörünün vektörel momentini ifade göstermektedir. Aynı doğru 0 başlangıç noktasından başka bir P noktasına göre de tek anlamlı olarak belirtilebileceğinden $\overrightarrow{a^*}$ vektörel momenti, 0 yerine başka bir P noktası alındığında, $\overrightarrow{a_p^*}$ şeklinde belirtilir. Böylece $\overrightarrow{a^*}$'ın, $\overrightarrow{a}$ birim vektörünün hangi noktaya göre vektörel momenti olduğu anlaşılır.

Teorem 2.6.2. 0 başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruyu belirten birim dual vektör

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\left(\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a^*}\right)$$

dır.

İspat



Şekil 2.6.2. R^3 de başlangıç noktası P olan yönlü doğru

Yönlü doğruyu P noktasına göre belirten birim dual vektör $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a_p^*}$ dir.

$$\overrightarrow{a_p^*} = \overrightarrow{PX} \wedge \overrightarrow{a} \text{ ve } \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{x}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \overrightarrow{a_p^*} &= \left(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{x}\right) \wedge \overrightarrow{a} \\ &= \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a} \\ &= \overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a^*} \end{aligned}$$

dır. Böylece $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\left(\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{a} + \overrightarrow{a^*}\right)$ elde edilir.●

Tanım 2.6.2. $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*} \in \mathbb{D}-$Modül olmak üzere $\overrightarrow{U} = \dfrac{\overrightarrow{A}}{\|A\|}$ birim dual vektörüne $\overrightarrow{A}$ vektörünün **ekseni** denir.

Tanım 2.6.3. $k = \dfrac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*} \right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|^2}$ reel sayısına $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörünün **adımı** veya **yükselişi** denir.

$\overrightarrow{A} = a(1 + \varepsilon k)\overrightarrow{U}$ dual vektörünü için

i) k sonlu bir sayı ise $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ ve $\overrightarrow{a^*} \neq \overrightarrow{0}$ dır. $\overrightarrow{A}$ dual vektörüne **has dual vektör** veya **vida** denir.

$ii)$ $k=0 \Longrightarrow \overrightarrow{A}=a\overrightarrow{U}$ dur. Buna göre $\overrightarrow{A}$ dual vektörü $\overrightarrow{U}$ ekseni ile çakışık bir doğru gösterir.

$iii)$ $k=\infty \Longrightarrow \overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$ dır. Gerçekten

$$k=\frac{\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\|\overrightarrow{a}\|^2}=\frac{\|\overrightarrow{a}\| . \left\|\overrightarrow{a^*}\right\| \cos \emptyset}{\|\overrightarrow{a}\|^2}=\frac{\left\|\overrightarrow{a^*}\right\| \cos \emptyset}{\|\overrightarrow{a}\|}$$

eşitliğinde k=∞ olması için

$$\|\overrightarrow{a}\|=0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{a}=0$$

olmalıdır. Öyleyse $\overrightarrow{A}$ dual vektörü **sırf dual vektördür.** Yani $\overrightarrow{A}=\left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{a^*}\right)$ şeklindedir. Bu tip dual vektörlere **çift (couple)** denir. Çift dual vektörler için $\overrightarrow{a^*}$ vektörü başlangıç noktasının seçilişine bağlı değildir.

Teorem 2.6.3. Bir $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{n}+\varepsilon\overrightarrow{n^*}$ doğrusunun, normali $\overrightarrow{V}=\overrightarrow{v}+\varepsilon\overrightarrow{v^*}$ olan ve başlangıç noktasından geçen bir E düzlemi içinde kalması için gerek ve yeter şart

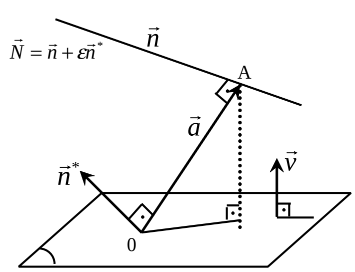
$$\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}\rangle=0 \text{ ve } \left\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n^*}\right\rangle=0$$

olmasıdır. Ayrıca N doğrusunun başlangıç noktasından geçmesi ve E düzlemi içinde kalması için gerek ve yeter şart

$$\langle\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}\rangle=0 \text{ ve } \left\|\overrightarrow{n^*}\right\|=0$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat $\overrightarrow{N}$ doğrusu üzerinde bir A noktasını gözönüne alalım. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$ olsun. Teorem 2.6.1 den dolayı $\overrightarrow{n^*}$ vektörü A noktasının N doğrusu üzerindeki yerinden bağımsızdır. Bu nedenle $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{n}$ alınabilir.



Şekil 2.6.3. R^3 de başlangıç noktasından geçen düzlem ve doğrunun durumu

$\overrightarrow{n^*} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{n}$ olduğundan $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n^*}$ yazılabilir. $\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = 0$ olması $\overrightarrow{N}$ doğrusunun E düzlemine paralel olması demektir. Bu koşul ile birlikte aynı zamanda

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{a} \rangle = \left\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n^*} \right\rangle = \det\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n^*} \right) = 0$$

eşitliği de sağlanırsa $\overrightarrow{N}$ doğrusu E düzlemi içinde kalır. $\left\| \overrightarrow{n^*} \right\| = \delta, \overrightarrow{N}$ doğrusunun 0 başlangıç noktasına olan uzaklığıdır. Eğer

$$\langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{n} \rangle = 0 \text{ ve } \left\| \overrightarrow{n^*} \right\| = 0$$

eşitlikleri de sağlanıyorsa $\overrightarrow{N}$ doğrusu 0'dan geçer ve E düzlemine paralel olur. Dolayısıyla $\overrightarrow{N}$ doğrusu E düzleminde kalır.$\bullet$

2.7. Dual Açı

$\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörler olsunlar. $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ nin Tanım 2.4.1 ile verilen

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right)$$

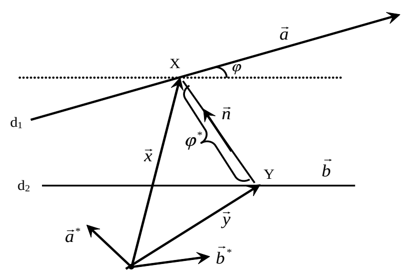
iç çarpımını inceleyelim. Teorem 2.6.1 gereğince $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ de iki yönlü doğru belirtirler. Bu doğrular sırası ile d_1, d_2 olsun. d_1 in yönü $\overrightarrow{a}$, yeri $\overrightarrow{a^*}$ ve d_2 nin yönü $\overrightarrow{b}$, yeri de $\overrightarrow{b^*}$ ile belli olduklarından $\overrightarrow{a}$ ile $\overrightarrow{b}$ arasındaki açı φ ise

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle \right)$$

iç çarpımının reel kısmı

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = \left\| \overrightarrow{a} \right\| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \cos\varphi = \cos\varphi, \; 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle$ iç çarpımının dual kısmı olan $\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle$ ifadesinin geometrik anlamı:



Şekil 2.7.1. Dual açı

$\overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b^*}$ sırası ile d_1 ve d_2 yönlü doğruları üzerindeki X ve Y noktalarının seçilişinden bağımsız olduklarından X ve Y noktaları, d_1 ve d_2 doğrularının ortak dikmesinin ayakları olarak düşünülebilir. Bu ortak dikme yönündeki birim vektör

$$\overrightarrow{n} = \pm \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|}$$

dir. d_1 ve d_2 arasındaki en kısa uzaklık φ^* ile gösterilirse

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \pm \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|} \varphi^*$$

dır. $\overrightarrow{a^*} = \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}$ ve $\overrightarrow{b^*} = \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{b}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\ &= -\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{y} \right\rangle \\ &= -\left\langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{y} \right\rangle \\ &= -\left\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle \\ &= \left\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \end{aligned}$$

dır. Buna göre

$$
\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\
&= \pm \left\langle \frac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|} \varphi^*, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\
&= \pm \frac{\varphi^*}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|} \left\langle \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\rangle \\
&= \pm \frac{\varphi^*}{\left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|} \left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\|^2 \\
&= \pm \varphi^* \left\| \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} \right\| \\
&= \pm \varphi^* \left\| \overrightarrow{a} \right\| \left\| \overrightarrow{b} \right\| \sin \varphi \\
&= \pm \varphi^* \sin \varphi
\end{aligned}
$$

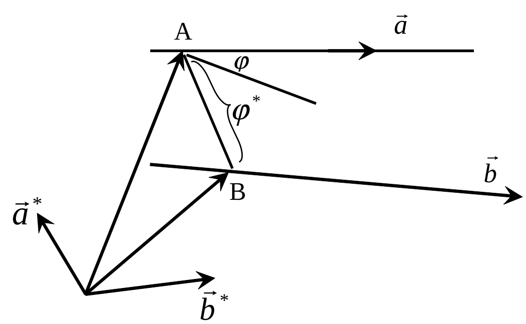
bulunur. Sonuç olarak $\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle$ nin iç çarpımı

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \cos \varphi \pm \varepsilon \varphi^* \sin \varphi$$

olur. Son idade de $(-)$ ifadesi göz önüne alınırsa $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ bir dual sayı olmak üzere Taylor formülüne göre

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \cos \varphi - \varepsilon \varphi^* \sin \varphi = \cos(\varphi + \varepsilon \varphi^*) = \cos \phi \tag{2.7.1}$$

elde edilir.



Şekil 2.7.2. $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim vektörleri arasındaki dual açı

Tanım 2.7.1. $\phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual sayısına $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim vektörleri arasındaki **dual açı** denir.

Görüldüğü gibi ϕ dual açısı, $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ de belirttikleri yönlü doğrular arasındaki φ açısı ile bu iki doğru arasındaki en kısa uzaklık olan φ^* dan oluşmaktadır. $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerinin uçları $\mathbb{D}$- Modül'de 0 merkezli birim dual kürenin A ve B dual noktalarını belirteceğinden $\overrightarrow{A}$ ile $\overrightarrow{B}$ arasındaki $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı A ve B dual noktalarından geçen dual büyük dairenin $\widehat{AB}$ dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir.
Eğer $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ dual vektörleri birim değiller ise bunların

$$\overrightarrow{U} = \frac{\overrightarrow{A}}{\left\|\overrightarrow{A}\right\|} \text{ ve } \overrightarrow{V} = \frac{\overrightarrow{B}}{\left\|\overrightarrow{B}\right\|}$$

eksenleri birim dual vektörlerdir (Teorem 2.5.2). $\overrightarrow{U}$ ve $\overrightarrow{V}$ arasındaki dual açı ϕ olsun.

$$\left\langle \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V} \right\rangle = \cos\phi$$

olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \left\|\overrightarrow{A}\right\| \left\|\overrightarrow{B}\right\| \cos\phi \tag{2.7.2}$$

dir. Yukarıdaki eşitlikten yararlanarak $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğruların birbirlerine göre durumları incelenebilir:

i)

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \text{sırf dual} \Leftrightarrow \cos\varphi &= 0, \quad \varphi^* \neq 0 \\ \Leftrightarrow \varphi &= \frac{\pi}{2} \quad \varphi^* \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ birim dual vektörlerinin belirttikleri yönlü doğrular dik durumlu fakat aykırıdırlar.

ii)

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle = \text{sırf reel} \Leftrightarrow \varphi^* = 0$$

olduğundan yönlü iki doğru kesişir ve

$$\left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*}, \overrightarrow{b} \right\rangle = 0$$

eşitliği bu iki doğrunun kesişme koşuludur.

iii)

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle &= 0 \Leftrightarrow \cos\varphi = 0\\ &\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \varphi^{*} = 0\end{aligned}$$

olduğundan yönlü doğrular birbirlerini dik olarak keser.

iv)

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle &= (1,0) \Rightarrow \cos\varphi = 1\\ &\Rightarrow \varphi = 0\end{aligned}$$

olduğundan yönlü doğrular paralel ve aynı yönlüdür. Eğer $\varphi^{*}=0$ ise bu iki doğru aynı zamanda çakışıktır.

v)

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\right\rangle &= -(1,0) \Rightarrow \cos\varphi = -1\\ &\Rightarrow \varphi = \pi\end{aligned}$$

olduğundan yönlü doğrular paralel ve zıt yönlüdürler. Eğer $\varphi^{*}=0$ ise doğrular çakışıktır.

2.8. $\mathbb{D}-$Modül Üzerinde Dış Çarpım

Tanım 2.8.1. $\forall\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\in\mathbb{D}-$Modül dual vektörlerinin dış çarpımı $\Lambda:\mathbb{D}^3\times\mathbb{D}^3\rightarrow\mathbb{D}^3$ şeklinde bir işlemdir ve

$$\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}=\overrightarrow{a}\Lambda\overrightarrow{b}+\varepsilon\left(\overrightarrow{a}\Lambda\overrightarrow{b^{*}}+\overrightarrow{a^{*}}\Lambda\overrightarrow{b}\right)$$

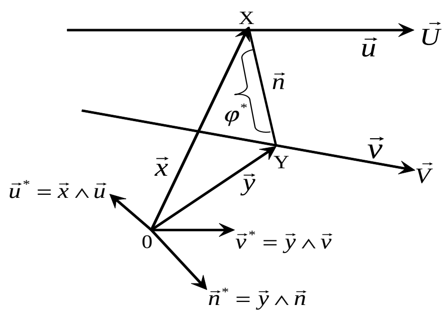
olarak tanımlanır.

Teorem 2.8.1. $\overrightarrow{A},\overrightarrow{B}\in\mathbb{D}-$Modül için

$$\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}=\left\|\overrightarrow{A}\right\|\left\|\overrightarrow{B}\right\|\sin\phi\overrightarrow{N}$$

dir.

İspat $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ nin eksenleri sırası ile, $\overrightarrow{U}$ ve $\overrightarrow{V}$ olsun.



Şekil 2.8.1. $\mathbb{D}$ – Modül de karma çarpım

$\overrightarrow{u}$ ile $\overrightarrow{v}$ vektörleri arasındaki açı φ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V} &= \left(\overrightarrow{u} + \varepsilon\overrightarrow{u^*}\right) \wedge \left(\overrightarrow{v} + \varepsilon\overrightarrow{v^*}\right) \\
&= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \varepsilon\left(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v^*} + \overrightarrow{u^*} \wedge \overrightarrow{v}\right) \\
&= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \varepsilon\left(\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{y} \wedge \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{v}\right) \\
&= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \varepsilon\left[\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{y} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{y}\rangle \overrightarrow{v} + \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{x}\right] \\
&= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \varepsilon\left[\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{y}\rangle \overrightarrow{v} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\rangle (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})\right] \\
&= \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \varepsilon\left[\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{v}\rangle \overrightarrow{u} - \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{y}\rangle \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cos\varphi\right]
\end{aligned}$$

dir. $n^* = x \wedge n = y \wedge n$ olduğundan

$$\begin{aligned}
n^* &= x \wedge n \\
&= x \wedge \left(\pm\frac{u \wedge v}{\|u \wedge v\|}\right) \\
&= \pm\frac{1}{\|u \wedge v\|} x \wedge (u \wedge v) \\
&= \pm\frac{1}{\sin\varphi} \left(\langle x, v\rangle u - \langle x, u\rangle v\right)
\end{aligned}$$

veya x yerine y yazılırsa

$$n^* = \pm\frac{1}{\sin\varphi} \left(\langle y, v\rangle u - \langle y, u\rangle v\right)$$

bulunur. Son iki eşitlikten

$$\langle x, v\rangle u - \langle y, u\rangle v = \pm n^* \sin\varphi$$

elde edilir.

$$\frac{\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|}=\pm\overrightarrow{n}\Longrightarrow\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\pm\overrightarrow{n}\,\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\sin\varphi=\pm\overrightarrow{n}\sin\varphi$$

yazılabilir.

$$\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}\pm\overrightarrow{n}\varphi^{*},\ \ \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}=\pm\overrightarrow{n}\sin\varphi \text{ ve } \langle x,v\rangle u-\langle y,u\rangle v=\pm n^{*}\sin\varphi$$

eşitlikleri $\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}$ de kullanılırsa

$$\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=\pm\overrightarrow{n}\sin\varphi+\varepsilon\left[\pm\overrightarrow{n^{*}}\sin\varphi\pm\varphi^{*}\overrightarrow{n}\cos\varphi\right]$$

elde edilir. Bu son ifade de $(+)$ işareti dikkate alınırsa ve $\varepsilon^{2}=0$ olduğundan $\varepsilon^{2}\varphi^{*}\overrightarrow{n^{*}}\cos\varphi$ terimi ilave edilirse

$$\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=\left(\overrightarrow{n}+\varepsilon\overrightarrow{n^{*}}\right)\left(\sin\varphi+\varepsilon\varphi^{*}\cos\varphi\right)$$

bulunur. $\overrightarrow{N}=\overrightarrow{n}+\varepsilon\overrightarrow{n^{*}}$ bir birim dual vektördür ve Taylor formülünden de

$$\sin\varphi+\varepsilon\varphi^{*}\cos\varphi=\sin\phi$$

dir. Öyleyse

$$\overrightarrow{U}\wedge\overrightarrow{V}=\overrightarrow{N}\sin\phi \tag{2.8.1}$$

bulunur.

$$\overrightarrow{A}=\left\|\overrightarrow{A}\right\|\overrightarrow{U} \text{ ve } \overrightarrow{B}=\left\|\overrightarrow{B}\right\|\overrightarrow{V}$$

olduklarından

$$\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}=\left\|\overrightarrow{A}\right\|\left\|\overrightarrow{B}\right\|\overrightarrow{N}\sin\phi \tag{2.8.2}$$

elde edilir.

$\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ dual vektörlerinin adımları sırası ile k_a ve k_b olmak üzere (2.8.2) formülü ve

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}&=a\left(1+k_a\varepsilon\right)\overrightarrow{U}\\ \overrightarrow{B}&=b\left(1+k_b\varepsilon\right)\overrightarrow{V}\end{aligned}$$

eşitliklerini kullanarak

$$\overrightarrow{A}\wedge\overrightarrow{B}=ab\left[1+\varepsilon\left(k_a+k_b\right)\right]\sin\phi\overrightarrow{N} \tag{2.8.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $k_a = k_b = 0$ ise

$$\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = ab \sin\phi \overrightarrow{N} \tag{2.8.4}$$

dir.$\bullet$

Teorem 2.8.2. $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ gibi iki has dual vektörün dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıktır.

İspat $\overrightarrow{A}$ ve $\overrightarrow{B}$ has dual vektörler olduklarından $\overrightarrow{A} \wedge \overrightarrow{B} = ab \sin\phi \overrightarrow{N}$ eşitliğinde $\sin\phi = 0$ olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \sin\phi = 0 \Rightarrow \quad & \sin\varphi + \varepsilon\varphi^* \cos\varphi = 0 \\ \Rightarrow \quad & \sin\varphi = 0 \text{ ve } \varphi^* \cos\varphi = 0 \end{aligned}$$

dır.

$$\sin\varphi = 0 \Longleftrightarrow \varphi = 0 \text{ veya } \varphi = \pi$$

ve

$$\varphi^* \cos\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi^* = 0$$

elde edilir.$\bullet$

2.9. $\mathbb{D}-$Modül Üzerinde Karma Çarpım

Tanım 2.9.1. $\forall \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in \mathbb{D}-$Modül dual vektörlerinin karma çarpımı

$$f : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

şeklinde bir dönüşümdür ve

$$f\left(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}\right) = \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right\rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a} \Lambda \overrightarrow{b^*}, \overrightarrow{c} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{a^*} \Lambda \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \right\rangle \right)$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.9.1. $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ has dual vektörlerinin eksenleri paralel veya ortak bir normale sahip ise

$$\left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = 0$$

dır.

İspat $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ has dual vektörlerinin eksenleri paralel ise

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = 0$$

olacağından

$$\left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = 0$$

dır. Eğer $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ ve $\overrightarrow{C}$ nin eksenleri ortak bir normale sahip ise bu normal $\overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}$ has dual vektörünün eksenidir. Bu eksen $\overrightarrow{C}$ nin eksenini de dik keseceğinden

$$\left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = 0$$

olur.•

Reel vektörler için var olan özellikler dual vektörler için de geçerlidir:

$i) \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{B} \Lambda \overrightarrow{C}, \overrightarrow{A} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{C} \Lambda \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle$

$ii) \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \Lambda \overrightarrow{C} \right\rangle$

$iii) \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle = 0$

$iv) \overrightarrow{A} \Lambda \left(\overrightarrow{B} \Lambda \overrightarrow{C} \right) = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \right\rangle \overrightarrow{B} - \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \right\rangle \overrightarrow{C}$

$v) \overrightarrow{A} \Lambda \left(\overrightarrow{B} \Lambda \overrightarrow{C} \right) + \overrightarrow{B} \Lambda \left(\overrightarrow{C} \Lambda \overrightarrow{A} \right) + \overrightarrow{C} \Lambda \left(\overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B} \right) = 0$

$vi) \left\langle \overrightarrow{A} \Lambda \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \Lambda \overrightarrow{D} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{C} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{D} \right\rangle - \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{D} \right\rangle \left\langle \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \right\rangle$

2.10. Dual Vektörlerin Lineer Bağımlılığı, Lineer Bağımsızlığı ve Bazlar

Tanım 2.10.1. $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in \mathbb{D}-$Modül has dual vektörler ve $\lambda_i = c_i^* + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$$

eşitliği $\forall \lambda_i = 0$ için sağlanıyorsa $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ has dual vektörleri **lineer bağımsızdır** denir.

Tanım 2.10.2. $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in \mathbb{D}-$Modül ve $\lambda_i = c_i^* + \varepsilon c_i \in \mathbb{D}$; $c_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 3$ için

$$\lambda_1 \overrightarrow{A} + \lambda_2 \overrightarrow{B} + \lambda_3 \overrightarrow{C} = \overrightarrow{0}$$

eşitliği en az bir $\lambda_i \neq 0$ için sağlanıyorsa, $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C}$ dual vektörleri **lineer bağımlıdır** denir.

Dual vektörler için lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık tanımlarının reel vektörlerden farklı oluşunun iki nedeni vardır:

$i)$ $\overrightarrow{X} = \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{x^*}\right)$ ve $\lambda = \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{c^*}\right)$ ise $\lambda \overrightarrow{X} = \overrightarrow{0}$ dır.

$ii)$ $\lambda = \left(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{c^*}\right)$ şeklindeki dual sayılarla bölüm tanımsızdır.

Teorem 2.10.1. $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ ise $S = \left\{\overrightarrow{A} = \overrightarrow{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}\right\}$ cümlesi lineer bağımsızdır.

İspat $\lambda = c + \varepsilon c^*$ olsun.

$$\lambda \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0}$$

ifadesi bileşenleri cinsinden yazılırsa

$$\lambda \left(A_i\right) = 0, \ 1 \leq i \leq 3$$

elde edilir. Dual sayıların skalar ile çarpımı ve eşitlik tanımından

$$a_i c = 0 \text{ ve } a_i c^* + a_i^* c = 0$$

dır. $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ olduğundan

$$c = 0 \text{ ve } c^* = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

elde edilir.•

Tanım 2.10.3. $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ deki temsil ettikleri yönlü doğrular bir noktada dik olarak kesişirlerse $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}$ birim dual vektörlerine **ortonormal dual vektörler** denir.

Teorem 2.10.2. $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}$ ortonormal üç birim dual vektör ise $S = \left\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}\right\}$ cümlesi lineer bağımlıdır.

İspat

$$\lambda_1 \overrightarrow{A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_2} + \lambda_3 \overrightarrow{A_3} = \overrightarrow{0}, \lambda_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3,$$

ifadesinin her iki tarafının $\overrightarrow{A_1}$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\lambda_1 \left\langle \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_1} \right\rangle + \lambda_2 \left\langle \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_1} \right\rangle + \lambda_3 \left\langle \overrightarrow{A_3}, \overrightarrow{A_1} \right\rangle = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \lambda_1 = 0$$

elde edilir. Aynı işlemleri $\overrightarrow{A_2}$ ve $\overrightarrow{A_3}$ ile yaparsak $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = 0$ bulunur.•

Tanım 2.10.4. $\mathbb{D}$- Modül'ün bir S alt cümlesi aşağıdaki iki özeliğe sahipse bu cümleye $\mathbb{D}$- Modül'ün bir **bazı** denir.

$i)$ S lineer bağımsızdır.

$ii)$ $S_p\{S\} = \mathbb{D}$- Modül'dür.

Yani $\forall \overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$- Modül elemanı S deki sonlu sayıda elemanın bir lineer bileşimidir.

Teorem 2.10.3. $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3} \in \mathbb{D}$- Modül vektörleri ortonormal ise $S = \left\{\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}\right\}$ cümlesi $\mathbb{D}$- Modül'ün bir bazıdır.

İspat $i)$ Teorem 2.10.2 den ortonormal vektörler kümesi S lineer bağımsızdır.

$ii)$ $\overrightarrow{A} \in \mathbb{D}$- Modül elemanı $\overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}, \overrightarrow{A_3}$ ortonormal dual vektörlerinin bir lineer bileşimidir. Yani $\lambda_i \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$ için

$$\overrightarrow{A} = \lambda_1 \overrightarrow{A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_2} + \lambda_3 \overrightarrow{A_3} \tag{2.10.1}$$

şeklinde $\overrightarrow{A}$ dual vektörünün yazılışı tektir. Gerçekten $\lambda_i \in \mathbb{D}$, $1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$\overrightarrow{A} = \lambda_1' \overrightarrow{A_1} + \lambda_2' \overrightarrow{A_2} + \lambda_3' \overrightarrow{A_3} \tag{2.10.2}$$

olarak yazıldığını kabul edelim. (2.10.1) ve (2.10.2) eşitliklerinin her iki tarafının $\overrightarrow{A_1}$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A_1} \right\rangle = \lambda_1 \text{ ve } \left\langle \overrightarrow{A}, \overrightarrow{A_1} \right\rangle = \lambda_1'$$

olduğundan $\lambda_1 = \lambda_1'$ dür. Benzer şekilde $\lambda_2 = \lambda_2'$ ve $\lambda_3 = \lambda_3'$ bulunur. Öyleyse $\overrightarrow{A}$ dual vektörünün yazılışı tek türlüdür.

$$\lambda_0 \overrightarrow{A} + \lambda_1 \overrightarrow{A_1} + \lambda_2 \overrightarrow{A_2} + \lambda_3 \overrightarrow{A_3} = \overrightarrow{0}$$

ifadesi lineer bağımlıdır. Eğer $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$ ve $\overrightarrow{A_3}$ dual vektörleri lineer bağımsız olsaydı bu vektörlerin reel kısımları da lineer bağımsız olurdu. Halbuki $\mathbb{R}^n$ de, $n+1$ tane vektör lineer bağımlıdır. O halde $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{A_1}, \overrightarrow{A_2}$ ve $\overrightarrow{A_3}$ vektörleri lineer bağımlıdır.•

Teorem 2.10.4. $\mathbb{D}$- Modül'de $S=\left\{\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{X_2}\right\}$ lineer bağımsız bir cümle ise $\mathbb{D}$- Modül'ün $E=\left\{\overrightarrow{E_1},\overrightarrow{E_2},\overrightarrow{E_3}\right\}$ gibi bir ortonormal bir baz sistemi vardır.

İspat Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi burada da kullanılabilir.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{Y_1} &= \overrightarrow{X_1}\\ \overrightarrow{Y_2} &= \lambda\overrightarrow{Y_1}+\overrightarrow{X_2}\ ,\ \lambda\in\mathbb{D}\end{aligned}$$

denirse

$$\left\langle\overrightarrow{Y_1},\overrightarrow{Y_2}\right\rangle=0$$

olacak şekilde λ bulunabilir.

$$\left\langle\overrightarrow{Y_1},\overrightarrow{Y_2}\right\rangle=\lambda\left\langle\overrightarrow{Y_1},\overrightarrow{Y_1}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{X_2},\overrightarrow{Y_1}\right\rangle=0$$

eşitliğinden

$$\lambda=-\frac{\left\langle\overrightarrow{X_1},\overrightarrow{X_2}\right\rangle}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\|^2}$$

bulunur.

$$\overrightarrow{E_1}=\frac{\overrightarrow{X_1}}{\left\|\overrightarrow{X_1}\right\|}\quad\text{ve}\quad\overrightarrow{E_2}=\frac{\overrightarrow{Y_2}}{\left\|\overrightarrow{Y_2}\right\|}$$

alınırsa

$$\overrightarrow{E_3}=\overrightarrow{E_1}\wedge\overrightarrow{E_2}$$

dir.●

2.11. $\mathbb{D}$-Modülde Dual İzometriler

Tanım 2.11.1. 0 ve $A\in\mathbb{D}^3$ dual noktalarının belirttiği $\overrightarrow{0A}=\overrightarrow{A}$ dual vektörünün normu

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|=a+\varepsilon a^*$$

sayısıdır. Bu dual sayıyı

$$\left\|\overrightarrow{A}\right\|=d\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{A}\right)$$

ile gösterirsek P ve $Q \in \mathbb{D}^3$ dual noktalarının belirttiği $\overrightarrow{PQ}$ dual vektörünün normu

$$\|P-Q\| = d\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}\right)$$

olur. $\forall \overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q} \in \mathbb{D}$-Modül için $F : \mathbb{D}$-Modül $\rightarrow \mathbb{D}$-Modül dönüşümünde

$$d\left[F\left(\overrightarrow{P}\right), F\left(\overrightarrow{Q}\right)\right] = d\left(\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}\right)$$

ise F ye $\mathbb{D}$-Modül'ün bir **dual izometrisi** denir.

Tanım 2.11.2. Elemanları dual sayılar olan bir A matrisine **dual matris** denir ve

$$A = [A_{ij}] \ , \ A_{ij} = a_{ij} + \varepsilon a_{ij}^*$$

şeklinde gösterilir.

Reel matrisler için geçerli olan işlemler dual matrisler içinde geçerlidir.

Tanım 2.11.3. $A = [A_{ij}]_{nxn}$ karesel bir dual matris olmak üzere

$$A_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} (1,0) & , \quad i = j \\ (0,0) & , \quad i \neq j \end{cases}$$

ise A dual matrisine **birim dual matris** veya **özdeşlik matrisi** denir ve

$$I_n = [\delta_{ij}]_{nxn}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.11.4. $A \in \mathbb{D}_n^n$ için

$$AA^T = A^T A = I_n$$

ise A dual matrisine **ortogonal dual matris** denir.

$\overrightarrow{X} = \overrightarrow{x} + \varepsilon \overrightarrow{x^*} \in \mathbb{D}$-Modül dual vektörü

$$X = \begin{bmatrix} x_1 + \varepsilon x_1^* \\ x_2 + \varepsilon x_2^* \\ x_3 + \varepsilon x_3^* \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

şeklinde bir dual sütün matrisi olarak yazılabilir. X ve Y iki dual vektör iseler iç çarpım tanımı ve dual matrislerin çarpım kuralından

$$\left\langle \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \right\rangle = X^T Y$$

olduğu görülür.

Teorem 2.11.1. $A = [A_{ij}]_{3x3}$ bir dual matris olmak üzere

$$\begin{array}{rcccc} L_A & : & \mathbb{D} - Mod\ddot{u}l & \to & \mathbb{D} - Mod\ddot{u}l \\ & & X & \to & AX \end{array}$$

dönüşümü lineerdir.

İspat $\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} \in \mathbb{D}-$ Modül iki dual vektör olsun.

$$\begin{aligned} L_A(X) &= AX \\ L_A(Y) &= AY \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L_A(X+Y) &= A(X+Y) \\ &= AX + AY \\ &= L_A(X) + L_A(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bir skaler ile bir matrisin çarpımının tanımı dual matrislerde de aynen alınarak $C \in \mathbb{D}$ için

$$L_A(CX) = A(CX) = C(AX) = CL_A(X)$$

dir.•

Teorem 2.11.2. A bir dual ortogonal matris ise

$$\begin{array}{rcccc} L_A & : & \mathbb{D} - Mod\ddot{u}l & \to & \mathbb{D} - Mod\ddot{u}l \\ & & X & \to & AX \end{array}$$

lineer dönüşümünde

$i)$ İç çarpım değişmez kalır.

$ii)$ L_A, $\mathbb{D}-$ Modül'de bir izometridir.

$iii)$ L_A dönüşümü dual açıları değişmez bırakır.

İspat $i)$ $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \in \mathbb{D}-$ Modül için

$$\begin{aligned} L_A(X_2) &= AX_2 = Y_2 \\ L_A(X_1) &= AX_1 = Y_1 \end{aligned}$$

olsun. Buna göre

$$\left\langle \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \right\rangle = Y_1^T Y_2 = \left(X_1^T A^T\right)(AX_2) = X_1^T \left(A^T A\right) X_2 = X_1^T X_2 = \left\langle \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \right\rangle$$

bulunur.

$ii)$

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{Y_1} \right\|^2 &= \left\langle \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_1} \right\rangle = Y_1^T Y_1 \\ &= \left(X_1^T A^T\right)(AX_2) \\ &= X_1^T \left(A^T A\right) X_1 \\ &= X_1^T X_1 \\ &= \left\| \overrightarrow{X_1} \right\|^2 \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$d(0, Y_1) = d\left[L_A(0), L_A(X_1)\right] = d(0, X_1)$$

dir. Aynı şekilde

$$\begin{aligned} \left\| \overrightarrow{Y_1} - \overrightarrow{Y_2} \right\|^2 &= (Y_1 - Y_2)^T (Y_1 - Y_2) \\ &= \left(Y_1^T - Y_2^T\right)(Y_1 - Y_2) \\ &= \left(X_1^T A^T - X_2^T A^T\right)(AX_1 - AX_2) \\ &= \left\| \overrightarrow{X_1} - \overrightarrow{X_2} \right\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse

$$d(Y_1, Y_2) = d\left[L_A(X_1), L_A(X_2)\right] = d(X_1, X_2)$$

dir.

$iii)$ $\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2}$ has dual vektörlerinin eksenleri arasındaki dual açı ϕ ve f altındaki görüntüleri $\overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2}$ dual vektörlerinin eksenleri arasındaki dual açı da ϕ' olsun. 2.7.2 dual açı formülünden

$$Cos\phi = \frac{\left\langle \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{X_1} \right\| . \left\| \overrightarrow{X_2} \right\|}$$

ve

$$Cos\phi' = \frac{\left\langle \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \right\rangle}{\left\| \overrightarrow{Y_1} \right\| . \left\| \overrightarrow{Y_2} \right\|}$$

teorem 2.11.2 nin i şıkkından

$$\left\langle \overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{X_2} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{Y_1}, \overrightarrow{Y_2} \right\rangle$$

ve ii şıkkından

$$\left\| \overrightarrow{Y_1} \right\| = \left\| \overrightarrow{X_1} \right\|, \quad \left\| \overrightarrow{Y_2} \right\| = \left\| \overrightarrow{X_2} \right\|$$

bulunur. Buna göre $\phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ ve $\phi' = \varphi' + \varepsilon\varphi^{*\prime}$ olmak üzere

$$Cos\phi = Cos\phi' \Rightarrow \varphi' = 2k\pi \pm \varphi \text{ ve } \varphi^{*\prime} = \varphi^*$$

elde edilir.●

$X_1^T X_2 = 0$ ise $Y_1^T Y_2 = 0$ olacağından ortogonal has dual vektörler yine ortogonal has dual vektörlere dönüşür.

3. E^3 ÖKLİD UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu bölümde referanslarımız Sabuncuoğlu (2006) ve Chen (2003) olacaktır.

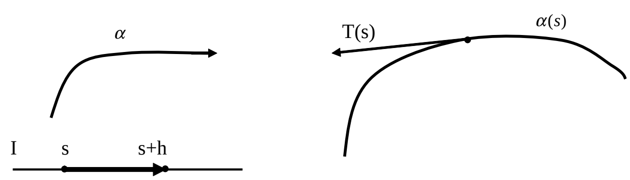
3.1. Frenet Vektör Alanları

Bu bölümde $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisini $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı bir eğri olarak göz önüne alacağız. $s \in I$ için eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki hız vektörünü $\alpha'(s)$ olarak göstereceğiz. $\alpha'(s)$ vektörü $\alpha(s)$ noktasında eğriye teğet bir vektördür. Uzunluğu 1 dir. s değişkeni I da artarak değiştirildiğinde $\alpha(s)$ vektörü hangi yönde ilerliyorsa $\alpha'(s)$ vektörü de o yöndedir.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$T(s) = \alpha'(s) \qquad (3.1.1)$$

eşitliği ile belirli $T(s)$ eğrisine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birim teğet vektörü** denir.



Şekil 3.1.1. α eğrisinin birim teğet vektörü

T, I aralığının her bir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T(s)$ teğet vektörünü karşılık getiren bir fonksiyondur (Şekil 3.1.1). Buna göre T, α eğrisi üstünde bir vektör alanıdır. Bu vektör alanına, α eğrisinin **birim teğet vektör alanı** denir ve T=α' olarak yazılır. $T(s)$ vektörü, $\alpha(s)$ noktasında $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayını gerer. Bu alt vektör uzay 1 boyutlu bir alt vektör uzaydır. Geometrik olarak $\alpha(s)$ noktasından geçen ve $T(s)$ vektörüne paralel olan bir doğrudur. Bu doğruya eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **teğet uzayı** denir ve $T_{\alpha(s)}(\alpha(I))$ olarak gösterilir.

Tanım 3.1.2. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$\kappa : I \to \mathbb{R},\ \kappa(s) = \|T'(s)\| \qquad (3.1.2)$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **eğrilik fonksiyonu** denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir.

$T = \alpha'$ olduğundan $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$ olur. Bu nedenle $T'(s)$ vektörünün uzunluğuna eğrilik adı verilir.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$N(s) = \frac{1}{\kappa(s)} T'(s) \tag{3.1.3}$$

eşitliği ile belirli $N(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **birinci dik vektörü (asli normali)** denir. N vektör alanına, α eğrisinin **birinci dik vektör alanı (asli normal vektör alanı)** denir.

$\langle T, T \rangle$, I aralığının her bir noktasına, $\langle T(s), T(s) \rangle$ sayısına karşılık getiren

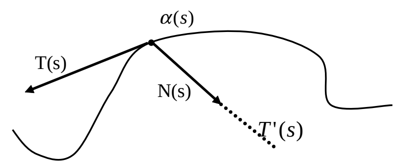
$$\langle T, T \rangle : I \to \mathbb{R}, \ \ \langle T, T \rangle (s) = \langle T(s), T(s) \rangle$$

biçiminde bir fonksiyondur. Her $s \in I$ için

$$\langle T(s), T(s) \rangle = 1$$

olduğundan $\langle T, T \rangle : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit fonksiyondur. Buna göre her $s \in I$ için $\langle T, T \rangle' = 0$ dır.

$$\begin{aligned}
\langle T, T \rangle' &= 0 \\
\langle T', T \rangle + \langle T, T' \rangle &= 0 \\
2 \langle T', T \rangle &= 0 \\
\langle T', T \rangle &= 0
\end{aligned}$$



Şekil 3.1.2. α eğrisinin normal vektörü

bulunur. O halde I aralığının herbir s noktasında $T'(s)$ vektörü, $T(s)$ vektörüne diktir. Yani T' vektör alanı T vektör alanına diktir. (Şekil 3.1.2)

Tanım 3.1.3 e göre N vektör alanı da T vektör alanına diktir. $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ olduğundan (3.1.3) esitliği

$$N(s) = \frac{1}{\|T'(s)\|} T'(s) \tag{3.1.4}$$

biçiminde de yazılabilir. Öyleyse, her $s \in I$ için, $\|N(s)\| = 1$ dir.

$T \times N$, I aralığının herbir s noktasına, $\alpha(s)$ noktasındaki $T_{\alpha(s)}(\mathbb{R}^3)$ teğet uzayının $T(s) \times N(s)$ elemanını karşılık getiren bir fonksiyondur.

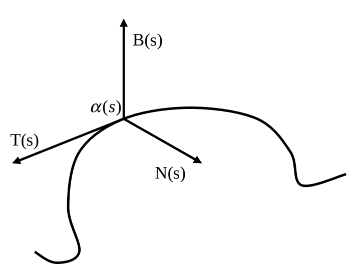
Tanım 3.1.4. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisi için

$$B(s) = T(s) \times N(s) \tag{3.1.5}$$

eşitliği ile tanımlı $B(s)$ vektörüne, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **ikinci dik vektörü (binormali)** denir B vektör alanına, α eğrisinin **ikinci dik vektör alanı (binormal vektör alanı)** denir. Vektör çarpımının özelliklerinden dolayı $B(s)$ vektörü, $T(s)$ ve $N(s)$ vektörlerinin her ikisine de diktir. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ pozitif yönlü bir çatıdır. Ayrıca her $s \in I$ için

$$\|B(s)\| = \|T(s)\| \, \|N(s)\| \left|\sin \frac{\pi}{2}\right| = 1$$

dir. Sonuç olarak $\{T(s), N(s), B(s)\}$ kümesi ortanormal bir tabandır. (Şekil 3.1.3)



Şekil 3.1.3. α eğrisinin binormal vektörü

Tanım 3.1.5. $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet vektörleri** denir.

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$

kümesine, α eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Frenet çatısı** denir. T, N, B vektör alanlarına, α eğrisi üstünde **Frenet vektör alanları** denir.

Tanım 3.1.6. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere

$$\tau : I \to \mathbb{R},\ \tau(s) = -\langle B'(s), N(s)\rangle \tag{3.1.6}$$

fonksiyonuna, α eğrisinin **burulma fonksiyonu** denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B ise

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

dir.

İspat (3.1.3) eşitliğinden $T' = \kappa N$ elde edilir. $N' = aT + bN + cB$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', T\rangle = a$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, T\rangle = 0 \ &\Rightarrow\ \langle N', T\rangle + \langle N, T'\rangle = 0 \\ &\Rightarrow\ \langle N', T\rangle = -\langle N, T'\rangle = -\langle N, \kappa N\rangle = -\kappa \end{aligned}$$

olduğundan $a = -\kappa$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', N\rangle = b$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, N\rangle = 1 \ &\Rightarrow\ \langle N', N\rangle + \langle N, N'\rangle = 0 \\ &\Rightarrow\ 2\langle N', N\rangle = 0 \\ &\Rightarrow\ \langle N', N\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N' = aT+bN+cB$ eşitliğinin her iki yanını B ile çarpımı yapılarak $\langle N', B\rangle = c$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, B\rangle = 0 \Rightarrow & \quad \langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow & \quad \langle N', B\rangle = -\langle N, B'\rangle &= \tau \end{aligned}$$

olduğundan $c = \tau$ bulunur. O halde $N' = -\kappa T + \tau B$ dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T\rangle = d$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, T\rangle = 0 \Rightarrow & \quad \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow & \quad \langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle &= -\langle B, -\kappa N\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $d = 0$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', N\rangle = e$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, N\rangle = 0 \Rightarrow & \quad \langle B', N\rangle + \langle B, N'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow & \quad \langle B', N\rangle = -\langle B, N'\rangle &= -\langle B, -\kappa T + \tau B\rangle = -\tau \end{aligned}$$

olduğundan $e = -\tau$ olur.

Şimdi $B' = dT+eN+fB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T\rangle = f$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, B\rangle = 1 \Rightarrow & \quad \langle B', B\rangle + \langle B, B'\rangle = 0 \\ \Rightarrow & \quad \langle B', B\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Öyleyse $B' = -\tau N$ dir.$\bullet$

Bu teoremden elde edilen eşitliklere, birim hızlı α eğrisi için **Frenet formülleri** denir. Frenet formüllerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix}$$

ters simetrik bir matristir.

Tanım 3.1.7. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki birim hızlı $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olsun.

$\{T(s), N(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **oskülatör düzlem (dokunum düzlemi)** denir.

$\{T(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlem (doğrultma düzlemi)** denir.

$\{N(s), B(s)\}$ kümesinin gerdiği düzleme, $\alpha(s)$ noktasındaki **normal düzlem (dik düzlem)** denir.

$\alpha(s)$ noktasındaki oskülatör düzlem , $B(s)$ vektörüne dik olan düzlemdir.

$\alpha(s)$ noktasındaki rektifiyan düzlem , $N(s)$ vektörüne dik olan düzlemdir.

$\alpha(s)$ noktasındaki normal düzlem , $T(s)$ vektörüne dik olan düzlemdir.

Teorem 3.1.2. $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olduğuna göre

$$\begin{aligned} N \times B &= T \\ B \times T &= N \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

dir.

İspat Her u, v, $w \in \mathbb{R}^3$ için

$$\begin{aligned} u \times (v \times w) &= \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w \\ (u \times v) \times w &= \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u \end{aligned}$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} N \times B &= N \times (T \times N) = \langle N, N \rangle T - \langle N, T \rangle N = T \\ B \times T &= (T \times N) \times T = \langle T, T \rangle N - \langle N, T \rangle T = N \end{aligned}$$

elde edilir.•

3.2. Rektifiyan Eğrilerin Karakterizasyonları

Eğriliği ve burulması sıfırdan farklı olan bir eğriye **bükümlü eğri** denir. E^3 Öklid uzayında bir eğrinin yer vektörü her noktada oskülatör düzlemde yatıyor ise eğri düzlemseldir. Eğer eğrinin yer vektörü her noktada normal düzlemde yatıyor ise eğri küreseldir. Öyleyse şu soruyu sorabiliriz: Ne zaman $\alpha : I \to E^3$ eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde yatar? $\alpha : I \to E^3$ bir rektifiyan eğri olmak üzere $\alpha(s)$ yer vektörü λ, μ fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)\, T(s) + \mu(s)\, B(s) \tag{3.2.1}$$

şeklinde verilebilir.

Teorem 3.2.1. $\alpha : I \to E^3$ birim hızlı ve eğriliği pozitif olan bir rektifiyan eğri olsun. O halde aşağıdaki önermeler doğrudur:

i) $\rho = \|\alpha\|$ uzaklık fonksiyonu bazı c_1 ve c_2 sabitleri için

$$\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$$

eşitliğini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni bazı b sabit sayısı için

$$\langle \alpha, T \rangle = s + b$$

eşitliği ile verilir.

iii) Eğrinin yer vektörünün α^N normal bileşeni sabit uzunlukludur ve ρ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) τ burulma fonksiyonu sıfırdan farklıdır ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni sabittir. Yani

$$\langle \alpha, B \rangle = \text{sabit}$$

olur.

Karşıt olarak eğriliği pozitif olan bir $\alpha : I \to E^3$ eğrisi (i), (ii), (iii), (iv) şartlarından birini sağlıyor ise α bir rektifiyan eğridir.

İspat α, E^3 de birim hızlı bir eğri ve α eğrisinin yay uzunluğu parametresi s olsun. α nın bir rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. α bir rektifiyan eğri olduğundan $\lambda(s), \mu(s)$ fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s) T(s) + \mu(s) B(s) \tag{3.2.2}$$

olarak yazılabilir. (3.2.2) eşitliğinin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \lambda'(s) T(s) + \lambda(s) T'(s) + \mu'(s) B(s) + \mu(s) B'(s) \\
T(s) &= \lambda'(s) T(s) + \lambda(s) \kappa(s) N(s) + \mu'(s) B(s) + \mu(s)(-\tau(s) N(s)) \\
T(s) &= \lambda'(s) T(s) + [\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s)] N(s) + \mu'(s) B(s)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$[\lambda'(s) - 1] T(s) + [\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s)] N(s) + \mu'(s) B(s) = 0$$

elde edilir. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre

$$\lambda'(s) = 1, \qquad \lambda(s)\kappa(s) = \mu(s)\tau(s), \qquad \mu'(s) = 0 \tag{3.2.3}$$

elde edilir. İlk eşitlikte $\lambda'(s) = 1$ olduğundan b bir sabit sayı olmak üzere

$$\lambda(s) = s + b$$

dir. 3.2.3 eşitliğinde $\mu'(s) = 0$ olduğundan μ sabit bir fonksiyondur. $\lambda\kappa = \mu\tau$ eşitliğine göre $\kappa \neq 0$ olduğundan μ sabiti de sıfırdan farklıdır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, T \rangle &= \langle \lambda T + \mu B, T \rangle \\
&= \lambda \langle T, T \rangle + \mu \langle B, T \rangle \\
&= \lambda \\
&= s + b
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) ispatlanmış oldu.

$\mu = \ell$ sıfırdan farklı sabit olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha \rangle &= \langle \lambda T + \mu B, \lambda T + \mu B \rangle \\
&= \lambda^2 \langle T, T \rangle + 2\lambda\mu \langle T, B \rangle + \mu^2 \langle B, B \rangle \\
&= \lambda^2 + \mu^2 \\
&= \lambda^2 + \ell^2
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre ρ uzaklık fonksiyonu $2b = c_1$, $b^2 + \ell^2 = c_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= |\langle \alpha, \alpha \rangle| \\
&= \left|\lambda^2 + \mu^2\right| \\
&= \left|(s+b)^2 + l^2\right| \\
&= \left|s^2 + 2sb + b^2 + l^2\right| \\
&= \left|s^2 + c_1 s + c_2\right|
\end{aligned}$$

dir. Böylece (i) ispatlandı.

(3.2.2) eşitliğinden α eğrisinin yer vektörünün normal bileşeni $\alpha^N = \mu B$ dir.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, B \rangle &= \langle \lambda T + \mu B, B \rangle \\
&= \lambda \langle T, B \rangle + \mu \langle B, B \rangle \\
&= \mu
\end{aligned}$$

ve μ sabit olduğundan α^N sabit uzunlukludur. Böylece (iii) ispatlandı.

$\langle \alpha, B \rangle = \mu$ ve μ sabit olduğundan $\langle \alpha, B \rangle$ sabittir. $\kappa > 0$, $\lambda = s+b$ ve μ sabit olduğundan (3.2.3) eşitliğine göre τ sıfırdan farklıdır. Böylece (iv) ispatlanır.

Karşıt olarak (i) veya (ii) şartlarından biri sağlansın. O halde b bir sabit sayı olmak üzere $\langle \alpha, T \rangle = s + b$ dir. Bu eşitliğin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', T \rangle + \langle \alpha, T' \rangle &= 1 \\
\langle T, T \rangle + \langle \alpha, \kappa N \rangle &= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\kappa \langle \alpha, N \rangle = 0$$

ve $\kappa > 0$ olduğundan

$$\langle \alpha, N \rangle = 0$$

bulunur. Öyleyse eğri rektifiyandır.

Eğer (iii) ün sağlandığını kabul edersek, eğrinin yer vektörünün normal bileşeni α^N sabit uzunlukludur ve uzaklık fonksiyonu ρ sabit değildir. Buna göre $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = \lambda T + \alpha^N$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \left\langle \lambda T + \alpha^N, \lambda T + \alpha^N \right\rangle \\ &= \lambda^2 \langle T, T \rangle + 2\lambda \left\langle T, \alpha^N \right\rangle + \left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle \\ &= \lambda^2 + c \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, T \rangle &= \left\langle \lambda T + \alpha^N, T \right\rangle \\ &= \lambda \langle T, T \rangle + \left\langle \alpha^N, T \right\rangle \\ &= \lambda \end{aligned}$$

değerini (3.2.4) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = \langle \alpha, T \rangle^2 + c$$

elde edilir. Burada c sabittir ve s ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha' \rangle &= 2 \langle \alpha, T \rangle \left[\langle \alpha', T \rangle + \langle \alpha, T' \rangle \right] \\ \langle T, \alpha \rangle + \langle \alpha, T \rangle &= 2 \langle \alpha, T \rangle \left[\langle T, T \rangle + \langle \alpha, \kappa N \rangle \right] \\ 2 \langle \alpha, T \rangle &= 2 \langle \alpha, T \rangle \left[1 + \kappa \langle \alpha, N \rangle \right] \end{aligned}$$

bulunur. Uzaklık fonksiyonu ρ sabit olmadığından $\langle \alpha, T \rangle \neq 0$ dır. $\kappa > 0$ olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olmalıdır. Öyleyse α bir rektifiyan eğridir.

(iv) ün sağlandığını kabul edelim. Yani $\langle \alpha, B \rangle$ sabit olsun.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, B \rangle' &= \langle \alpha', B \rangle + \langle \alpha, B' \rangle \\ 0 &= \langle t, B \rangle + \langle \alpha, -\tau N \rangle \\ 0 &= -\tau \langle \alpha, N \rangle \end{aligned}$$

τ sıfırdan farklı olduğundan $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olur. Buna göre α rektifiyan eğridir.●

3.3. Helislerin Rektifiyan Eğrilere Genellenmesi

E^3 de en iyi bilinen bükümlü eğri genelleştirilmiş helistir. Bir eğrinin genelleştirilmiş helis olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sıfırdan farklı sabit olmasıdır. Diğer yandan rektifiyan eğriler için $\frac{\tau}{\kappa}$ oranı şöyle verilebilir.

Teorem 3.3.1. $\alpha : I \to E^3$ eğriliği pozitif olan bir eğri olsun. α nın bir rektifiyan eğriye denk olabilmesi için gerek ve yeter şart c_1, c_2 sabit reel sayıları için

$$\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2 \ , \ c_1 \neq 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat $\alpha : I \to E^3$ eğriliği pozitif birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α rektifiyan eğri ise (3.2.3) den

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{s+b}{a} \qquad (a \text{ ve } b \text{ sabit})$$

dir. Böylelikle eğrinin burulmasının eğriliğine oranı sabit olmayan lineer fonksiyondur. Karşıt olarak $\alpha : I \to E^3$ eğrisi için $\kappa > 0$ ve $c_1 \neq 0$ ve c_2 sabitleri için $\frac{\tau}{\kappa} = c_1 s + c_2$ olsun. $c_1 = \frac{1}{a}$ ve $c_2 = \frac{b}{a}$ alırsak $\frac{\tau}{\kappa} = \frac{s+b}{a}$ olur. $a\tau = s\kappa + b\tau$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left[\alpha(s) - (s+b)T(s) - aB(s)\right] &= \alpha'(s) - T(s) - (s+b)T'(s) - aB'(s) \\ &= T(s) - T(s) - (s+b)\kappa N(s) - a(-\tau)N(s) \\ &= -(s+b)\kappa N(s) - a(-\tau)N(s) \\ &= (-s\kappa - b\kappa + a\tau)N(s) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Öyleyse D bir sabit sayı olmak üzere

$$\alpha(s) - (s+b)\,T(s) - aB(s) = D$$

dir. Uygun bir öteleme ile $\alpha(s) = (s+b)\,T(s) - aB(s)$ şeklindedir. Buna göre α bir rektifiyan eğridir.●

3.4. Rektifiyan Eğrilerin Sınıflandırılması

S^2 merkezi orijin olan E^3 de birim küre olsun. Aşağıdaki teorem E^3 deki bütün rektifiyan eğrileri belirtir.

Teorem 3.4.1. $\alpha : I \to E^3$ eğriliği pozitif olan bir eğri olsun. α nın rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha(t) = (a\sec t)\,\gamma(t) \tag{3.4.1}$$

olmasıdır. Burada a bir pozitif sayı ve γ, S^2 de birim hızlı bir eğridir.

İspat $\alpha : I \to E^3$ eğriliği pozitif rektifiyan eğri olsun. Genelliği bozmaksızın $0 \in I$ ve $\alpha = \alpha(s)$ nin birim hızlı eğri olduğunu kabul edelim. Teorem 3.2.1 e göre uzaklık fonksiyonu $\rho = \|\alpha\|$ ve c_1, c_2 sabitleri için $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ dir. Uygun ötelemeyle $\rho^2 = s^2 + c$ ($c > 0$ sabit) olarak yazılabilir. $c > 0$ olduğundan $c = a^2$ olacak şekilde pozitif a sayısı vardır. Şimdi S^2 de $\gamma = \dfrac{\alpha}{\rho}$ eğrisini tanımlayalım. Buna göre

$$\alpha(s) = \rho(s)\,\gamma(s) = \sqrt{s^2+a^2}\,\gamma(s) \tag{3.4.2}$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\alpha'(s) = \frac{s}{\sqrt{s^2+a^2}}\gamma(s) + \sqrt{s^2+a^2}\,\gamma'(s) \tag{3.4.3}$$

olur. I aralığındaki herbir s için $\langle\gamma,\gamma\rangle = 1$ ve $\gamma'(s)$ ile $\gamma(s)$ ortogonaldir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle\alpha',\alpha'\rangle &= \frac{s^2}{s^2+a^2}\langle\gamma,\gamma\rangle + 2s\langle\gamma,\gamma'\rangle + \left(s^2+a^2\right)\langle\gamma',\gamma'\rangle \\
\langle T,T\rangle &= \frac{s^2}{s^2+a^2} + \left(s^2+a^2\right)\langle\gamma',\gamma'\rangle \\
1 &= \frac{s^2}{s^2+a^2} + \left(s^2+a^2\right)\langle\gamma',\gamma'\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}=\langle\gamma',\gamma'\rangle=\|\gamma'\|^2$$

dir. Öyleyse

$$\|\gamma'\|=\frac{a}{s^2+a^2}$$

dir. γ nin yay uzunluk fonksiyonu f olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(s) &= t \\
&= \int_0^s \frac{adu}{u^2+a^2} \\
&= \int_0^s \frac{adu}{a^2\left(1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right)} \\
&= \int_0^s \frac{adu}{a^2\left(1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^s \frac{adu}{a^2\left(1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right)} \\
&= \int_0^s \frac{\frac{du}{a}}{\left(1+\left(\frac{u}{a}\right)^2\right)} \qquad \left(\frac{u}{a}=x \text{ olursa }\right) \\
&= \int_0^{\frac{s}{a}} \frac{dx}{1+x^2} \\
&= \arctan(x)\,\Big|_0^{\frac{s}{a}} \\
&= \arctan\left(\frac{s}{a}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $s=a\tan t$ dir. (3.4.2) eşitliğinde s yerine $a\tan t$ yazarsak (3.4.1) eşitliğini elde ederiz.

Karşıt olarak $\alpha : I \to E^3$ eğrisi, a pozitif sayı ve $\gamma=\gamma(s)$, S^2 de birim hızlı eğrisi için

$$\alpha(t)=(a\sec t)\,\gamma(t) \tag{3.4.4}$$

olarak tanımlanırsa

$$
\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \frac{a \sin t}{\cos^2 t}\gamma(t) + \frac{a}{\cos t}\gamma'(t) \\
&= \frac{a}{\cos^2 t}\left[\sin t\gamma(t) + \cos t\gamma'(t)\right]
\end{aligned} \tag{3.4.5}
$$

olur. $\gamma(t)$ ve $\gamma'(t)$ ortonormal vektör alanları olduğundan

$$
\langle \alpha', \alpha' \rangle = \frac{a^2}{\cos^4 t}\left[\sin^2 t \langle \gamma, \gamma \rangle + \cos^2 t \langle \gamma', \gamma' \rangle\right] = \frac{a^2}{\cos^4 t}
$$

dır. Buna göre

$$
\|\alpha'\|^2 = \frac{a^2}{\cos^4 t} \Rightarrow \|\alpha'\| = \frac{a}{\cos^2 t} = a \sec^2 t \tag{3.4.6}
$$

elde edilir. $(3.4.4)$, $(3.4.5)$ ve $(3.4.6)$ eşitliklerinden

$$
\left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle = \rho^2(t) - \frac{\langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle^2}{|\alpha'(t)|^2} = a^2
$$

elde edilir. Öyleyse yer vektörünün normal bileşeni α^N sabit uzunlukludur ve ρ uzaklık fonksiyonu $\rho = a \sec t$ sabit değildir. Buna göre Teorem 3.2.1 den α rektifiyan eğridir.$\bullet$

4. 3 BOYUTLU MİNKOWSKİ UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu bölümde E_1^3 Minkowski 3-boyutlu uzayında rektifiyan eğrilerin bazı karakterizasyonları incelenecektir ve burada referanslarımız Ò.Neil (1983), Güngör (2007), Lopez (2008) ve İlarslan (2003) olacaktır.

4.1. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayı

Tanım 4.1.1. $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{E}^n$ olmak üzere,

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

iç çarpımına **Minkowski(Lorentz) iç çarpımı** denir.

Tanım 4.1.2. Minkowski iç çarpımı ile tanımlı $\mathbb{E}^n$ Öklid uzayına **Minkowski uzayı** yada **Lorentz uzayı** denir ve $\mathbb{E}_1^n$ ile gösterilir.
Özel olarak $n = 3$ alınır ise, $\mathbb{E}_1^3$ uzayına **3-boyutlu Minkowski uzayı** denir. Bu durumda bu uzayın standart metriği, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

dir.
Tanım 4.1.3. $x \in \mathbb{E}_1^3$ olmak üzere,

i) $\langle x, x \rangle > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne **uzaysı (spacelike)** vektör,

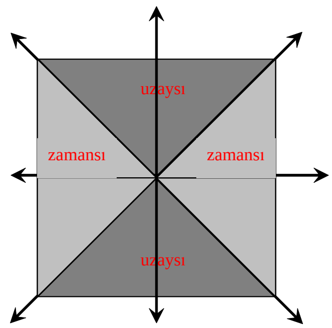
ii) $\langle x, x \rangle < 0$ ise x vektörüne **zamansı (timelike)** vektör,

iii) $\langle x, x \rangle = 0$ ve $x \neq 0$ ise x vektörüne **ışıksı (lightlike, null)** vektör denir.

v vektörünün uzunluğu $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ile tanımlanır.
$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{E}_1^2$ olmak üzere $\mathbb{E}_1^2$ uzayında uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörler şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 &= 0 \\ x_1 &= \pm x_2 \end{aligned}$$

Bu denklemler $\mathbb{E}_1^2$ de I. ve II. açıortay doğrularıdır. Bu doğrular üzerindeki vektörler ışıksı vektörlerdir ($\overrightarrow{0}$ hariç).

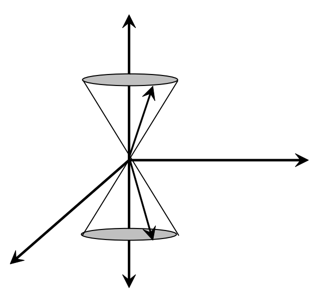


Şekil 4.1.1. $\mathbb{E}_1^2$ uzayında uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörler

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında uzaysı, zamansı ve ışıksı vektörler şu şekilde bulunur:

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \\ x_2^2 + x_3^2 &= x_1^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise koni denklemidir. Bu koniye **ışık konisi** denir. Koni yüzeyinde yatan vektörler ışıksı, koninin iç bölgesinde yatan vektörler zamansı, dış bölgesindeki vektörler uzaysı vektörlerdir.



Şekil 4.1.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında ışık konisi

Tanım 4.1.4. $\mathbb{E}_1^3$ de m sabit bir nokta ve $r > 0$ olmak üzere,

$$S_1^2(m, r) = \left\{ u \in \mathbb{E}_1^3 : \langle u - m, u - m \rangle = r^2 \right\}$$

cümlesine yarı Riemann küresi,

$$H_0^2(m,r) = \left\{u \in \mathbb{E}_1^3 : \langle u-m, u-m\rangle = -r^2\right\}$$

cümlesine yarı Riemann hiperbolik uzayı,

$$C(m) = \left\{u \in \mathbb{E}_1^3 : \langle u-m, u-m\rangle = 0\right\}$$

cümlesine yarı Riemann ışık konisi(quadrik koni) denir.

Tanım 4.1.5. $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. α eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere;

i) $\langle T,T\rangle > 0$ ise α eğrisine **uzaysı (spacelike)** eğri,

ii) $\langle T,T\rangle < 0$ ise α eğrisine **zamansı (timelike)** eğri,

iii) $\langle T,T\rangle = 0$ ise α eğrisine **ışıksı (lightlike veya null)** eğri denir.

Tanım 4.1.6. $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^3$ bir eğri olsun. $\lambda : I \to \mathbb{R}$ ve $\mu : I \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\forall s \in I \subset \mathbb{R}$ için α nın yer vektörü,

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

biçiminde ise, α eğrisine **rektifiyan eğri** denir. Başka bir ifade ile α eğrisi rektifiyan düzlemde yatıyor ise, α eğrisine **rektifiyan eğri** denir.

Teorem 4.1.1. $\mathbb{E}_1^n$ $(n \geq 3)$ Minkowski uzayı ve $\alpha : I \to \mathbb{E}_1^n$ de diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğrinin herhangi bir noktasındaki Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, ..., V_n\}$ ve $\varepsilon_{i-1} = \langle V_i, V_i\rangle$ olmak üzere, α eğrisinin eğrilikleri,

$$k_i = \varepsilon_i \langle V_i', V_{i+1}\rangle$$

dir. Özel olarak $n = 3$ olsun. $V_1 = T$, $V_2 = N$ ve $V_3 = B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \langle T,T\rangle \\
\varepsilon_1 &= \langle N,N\rangle \\
\varepsilon_2 &= \langle B,B\rangle
\end{aligned}$$

dir. Buradan eğrilikler

$$\kappa = k_1 = \varepsilon_1 \langle T', N \rangle \tag{4.1.1}$$

$$\tau = k_2 = \varepsilon_2 \langle N', B \rangle \tag{4.1.2}$$

olarak bulunur.

4.2. $\mathbb{E}_1^3$ Minkowski Uzayında Eğrilerin Frenet Formülleri

4.2.1. Zamansı eğrilerin ve asli normali uzaysı veya zamansı olan uzaysı eğrilerin Frenet formülleri

α bir zamansı eğri veya asli normali uzaysı yada zamansı bir eğri olsun. Bu durumda, Bu durumda $\varepsilon_0 = \langle T, T \rangle = \mp 1$, $\varepsilon_1 = \langle N, N \rangle = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \langle B, B \rangle = \mp 1$ $\langle T, N \rangle = 0$, $\langle T, B \rangle = 0$, $\langle N, B \rangle = 0$ olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{\kappa} \Rightarrow T' = \kappa N \tag{4.2.1}$$

olarak bulunur. $\mathbb{E}_1^3$ deki vektörler $\{T, N, B\}$ Frenet çatısının lineer birleşimi olarak yazılabileceğinden;

$$N' = aT + bN + cB \tag{4.2.2}$$

olarak yazılabilir. (4.2.2) eşitliği T ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', T \rangle = \varepsilon_0 a$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, T \rangle = 0 \Rightarrow & \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle = 0 \\ \Rightarrow & \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = -\langle N, \kappa N \rangle = -\varepsilon_1 \kappa \end{aligned}$$

olduğundan

$$\varepsilon_0 a = -\varepsilon_1 \kappa$$

dır. Eşitliği ε_0 ile çarparsak

$$a = -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa$$

olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', N\rangle = \varepsilon_1 b$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, N\rangle &= \varepsilon_1 \Rightarrow & \langle N', N\rangle + \langle N, N'\rangle &= 0 \\ & \Rightarrow & 2\langle N', N\rangle &= 0 \\ & \Rightarrow & \langle N', N\rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', B\rangle = \varepsilon_2 c$ bulunur. Diğer taraftan $\tau = k_2 = \varepsilon_2 \langle N', B\rangle$ olduğundan

$$\begin{aligned} \langle N, B\rangle = 0 & \Rightarrow & \langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle &= 0 \\ & \Rightarrow & \langle N', B\rangle = -\langle N, B'\rangle &= \varepsilon_2 \tau \end{aligned}$$

olur. Buna göre $c = \tau$ bulunur. O halde $N' = -\varepsilon_0\varepsilon_1\kappa T + \tau B$ dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T\rangle = \varepsilon_0 d$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, T\rangle = 0 & \Rightarrow & \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle &= 0 \\ & \Rightarrow & \langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle &= -\langle B, \kappa N\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $d = 0$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', N\rangle = \varepsilon_1 e$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, N\rangle = 0 & \Rightarrow & \langle B', N\rangle + \langle B, N'\rangle &= 0 \\ & \Rightarrow & \langle B', N\rangle = -\langle B, N'\rangle &= -\langle B, -\varepsilon_0\varepsilon_1\kappa T + \tau B\rangle = -\varepsilon_2\tau \end{aligned}$$

ve $\langle B', N\rangle = \varepsilon_1 e$ olduğundan

$$\varepsilon_1 e = -\varepsilon_2 \tau$$

bulunur. Buna göre

$$e = -\varepsilon_1\varepsilon_2\tau$$

dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpımı yaparsak $\langle B', B \rangle = \varepsilon_2 f$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, B \rangle = 1 \ \Rightarrow \ \langle B', B \rangle + \langle B, B' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \quad \langle B', B \rangle = 0 & \end{aligned}$$

olduğundan $f = 0$ bulunur. Öyleyse $B' = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau N$ dir.$\bullet$

Frenet formüllerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_0 \varepsilon_1 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.3}$$

dır.

4.2.2. Asli Normali Işıksı Olan Uzaysı Eğrilerin Frenet Formülleri

Asli normali ışıksı olan uzaysı bir eğrinin Frenet formüllerini bulalım. Bu durumda,

$$\langle T, T \rangle = 1, \ \langle N, N \rangle = 0, \ \langle B, B \rangle = 0, \ \langle T, N \rangle = 0, \ \langle T, B \rangle = 0, \ \langle N, B \rangle = 1$$

olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{\kappa} \Rightarrow T' = \kappa N \tag{4.2.4}$$

olarak bulunur. $\mathbb{E}_1^3$ deki vektörler $\{T, N, B\}$ Frenet çatısının lineer birleşimi olarak yazılabileceğinden;

$$N' = aT + bN + cB \tag{4.2.5}$$

olarak yazılabilir. (4.2.5) eşitliği T ile çarpımı yapılarak $\langle N', T \rangle = a$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, T \rangle = 0 \ \Rightarrow \quad \langle N', T \rangle + \langle N, T' \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \ \langle N', T \rangle = -\langle N, T' \rangle = - \ \langle N, \kappa N \rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $a = 0$ elde edilir.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle N', N\rangle = c$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, N\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle N', N\rangle + \langle N, N'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; 2\langle N', N\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; \langle N', N\rangle &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan $c = 0$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını B ile çarpımı yapılarak $\langle N', B\rangle = b$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, B\rangle = 1 \;\Rightarrow\; \langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; \langle N', B\rangle = -\langle N, B'\rangle &= \tau \end{aligned}$$

olduğundan $b = \tau$ bulunur. O halde $N' = \tau N$ dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T\rangle = d$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, T\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; \langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle &= -\langle B, \kappa N\rangle = -\kappa \end{aligned}$$

olduğundan $d = -\kappa$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', N\rangle = f$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, N\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle B', N\rangle + \langle B, N'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; \langle B', N\rangle = -\langle B, N'\rangle &= -\langle B, \tau N\rangle = -\tau \end{aligned}$$

olduğundan $f = -\tau$ dur.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', B\rangle = e$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, B\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \langle B', B\rangle + \langle B, B'\rangle &= 0 \\ \Rightarrow\; \langle B', B\rangle = 0 & \end{aligned}$$

olduğundan $e = 0$ bulunur. Öyleyse

$$B' = -\kappa T - \tau B$$

dir.●

Frenet formüllerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

dır. Böylece asli normali ışıksı olan uzaysı eğrilerin Frenet formülleri elde edilmiş olur.

4.2.3. Işıksı Eğrilerin Frenet Formülleri

α ışıksı bir eğri ve

$$\langle T,T\rangle = 0,\ \langle N,N\rangle = 1,\ \langle B,B\rangle = 0,\ \langle T,N\rangle = 0,\ \langle T,B\rangle = 1,\ \langle N,B\rangle = 0$$

olmak üzere,

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{T'}{\kappa} \Rightarrow T' = \kappa N \tag{4.2.7}$$

olarak bulunur. $\mathbb{E}_1^3$ deki vektörler $\{T,N,B\}$ Frenet çatısının lineer birleşimi olarak yazılabileceğinden;

$$N' = aT + bN + cB \tag{4.2.8}$$

olarak yazılabilir. (4.2.8) eşitliği T ile çarpımı yapılarak $\langle N',T\rangle = c$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N,T\rangle = 0 &\Rightarrow \langle N',T\rangle + \langle N,T'\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N',T\rangle = -\langle N,T'\rangle = -\langle N,\kappa N\rangle = -\kappa \end{aligned}$$

olduğundan $c = -\kappa$ elde edilir.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle N',N\rangle = b$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N,N\rangle = 1 &\Rightarrow \langle N',N\rangle + \langle N,N'\rangle = 0 \\ &\Rightarrow 2\langle N',N\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle N',N\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $b = 0$ olur.

$N' = aT + bN + cB$ eşitliğinin her iki yanını B ile çarpımı yapılarak $\langle N', B\rangle = a$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle N, B\rangle = 0 \Rightarrow \quad & \langle N', B\rangle + \langle N, B'\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle N', B\rangle = -\langle N, B'\rangle = \tau \end{aligned}$$

olduğundan $a = \tau$ bulunur. O halde $N' = \tau T - \kappa B$ dir.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki yanını T ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', T\rangle = f$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, T\rangle = 1 \Rightarrow \quad & \langle B', T\rangle + \langle B, T'\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle B', T\rangle = -\langle B, T'\rangle = -\langle B, \kappa N\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $f = 0$ olur.

$B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını N ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', N\rangle = e$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, N\rangle = 0 \Rightarrow \quad & \langle B', N\rangle + \langle B, N'\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle B', N\rangle = -\langle B, N'\rangle = -\langle B, \tau T - \kappa B\rangle = -\tau \end{aligned}$$

olduğundan $e = -\tau$ dur.

Şimdi $B' = dT + eN + fB$ eşitliğinin her iki yanını B ile iç çarpımı yapılarak $\langle B', B\rangle = d$ bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle B, B\rangle = 0 \Rightarrow \quad & \langle B', B\rangle + \langle B, B'\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle B', B\rangle = 0 \end{aligned}$$

olduğundan $e = 0$ bulunur. Öyleyse

$$B' = -\tau N$$

dir.●

Frenet formüllerinin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \tau & 0 & -\kappa \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \tag{4.2.9}$$

dır. Böylece ışıksı eğrilerin Frenet formülleri elde edilmiş olur.

4.3. E_1^3 de Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Teorem 4.3.1. α, E_1^3 de birim hızlı ve eğriliği pozitif olan bir zamansı veya uzaysı rektifiyan eğri ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\rho = \|\alpha\|$ uzaklık fonksiyonu $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}_0$ için

$$\rho^2 = \left|\varepsilon_0 s^2 + c_1 s + c_2\right|$$

eşitliğini sağlar.

ii) α yer vektörünün teğet bileşeni bazı c sabit sayısı için

$$\langle \alpha, T \rangle = \varepsilon_0 s + c$$

dir.

iii) Eğrinin yer vektörünün α^N normal bileşeni sabit uzunlukludur ve ρ uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) τ burulma fonksiyonu sıfırdan farklıdır ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni sabittir. Yani $\langle \alpha, B \rangle =$ sabit olur.

Karşıt olarak α, E_1^3 de eğriliği pozitif olan bir birim hızlı ışıksı olmayan ve (i) , (ii) , (iii) , (iv) şartlarından birini sağlayan eğri ise α bir rektifiyan eğridir.

İspat İlk olarak $\alpha = \alpha(s)$ eğrisinin birim hızlı ışıksı olmayan rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. α bir rektifiyan eğri olduğundan $\lambda(s)$, $\mu(s)$ fonksiyonları için

$$\alpha(s) = \lambda(s)\, T(s) + \mu(s)\, B(s) \tag{4.3.1}$$

olarak yazılabilir. (4.3.1) eşitliğinin türevini alıp (4.2.3) Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \lambda'(s)\, T(s) + \lambda(s)\, T'(s) + \mu'(s)\, B(s) + \mu(s)\, B'(s) \\
T(s) &= \lambda'(s)\, T(s) + \lambda(s)\, \kappa(s) N(s) + \mu'(s)\, B(s) - \mu(s)\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau N(s) \\
T(s) &= \lambda'(s)\, T(s) + [\lambda(s)\, \kappa(s) - \mu(s)\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau]\, N(s) + \mu'(s)\, B(s) \\
0 &= [\lambda'(s) - 1]\, T(s) + [\lambda(s)\, \kappa(s) - \mu(s)\, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tau]\, N(s) + \mu'(s)\, B(s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\{T,\ N,\ B\}$ Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır.

$$\lambda'(s) = 1, \qquad \lambda(s)\,\kappa(s) - \mu(s)\,\varepsilon_1\varepsilon_2\tau = 0, \qquad \mu'(s) = 0 \tag{4.3.2}$$

elde edilir. Burada

$$\langle N, N\rangle = \varepsilon_1 = \pm 1 \text{ ve } \langle B, B\rangle = \varepsilon_2 = \pm 1$$

dir. Buna göre

$$\lambda(s) = s + b,\ b \in \mathbb{R}, \quad \mu(s) = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}, \qquad \lambda(s)\,\kappa(s) = \mu(s)\,\varepsilon_1\varepsilon_2\tau \neq 0 \tag{4.3.3}$$

olur. Böylece $\lambda\kappa = \varepsilon_1\varepsilon_2\mu\tau$ denkleminde $\kappa \neq 0$ olduğundan μ sabiti sıfırdan farklıdır. $\mu(s) = \ell \neq 0$, $\tau(s) \neq 0$ bulunur. (4.3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= |\langle \alpha, \alpha\rangle| \\
&= |\langle \lambda(s)\,T(s) + \mu(s)\,B(s)\,, \lambda(s)\,T(s) + \mu(s)\,B(s)\rangle| \\
&= \left|\lambda^2(s)\,\langle T(s)\,, T(s)\rangle + \mu^2(s)\,\langle B(s)\,, B(s)\rangle\right| \\
&= \left|\lambda^2(s)\,\varepsilon_0 + \mu^2(s)\,\varepsilon_2\right| \\
&= \left|\varepsilon_0\lambda^2(s) + \varepsilon_2\mu^2(s)\right|
\end{aligned}$$

ve (4.3.3) deki eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= \left|\varepsilon_0\lambda^2(s) + \varepsilon_2\mu^2(s)\right| \\
&= \left|\varepsilon_0\,(s+b)^2 + \varepsilon_2\ell^2\right| \\
&= \left|\varepsilon_0(s^2 + 2sb + b^2) + \varepsilon_2\ell^2\right| \\
&= \left|\varepsilon_0 s^2 + 2\varepsilon_0 bs + \varepsilon_0 b^2 + \varepsilon_2\ell^2\right| \\
&= \left|\varepsilon_0 s^2 + c_1 s + c_2\right|
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (i) ispatlandı. (4.3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, T\rangle &= \langle \lambda(s) T(s) + \mu(s) B(s), T(s)\rangle \\
&= \lambda(s) \langle T(s), T(s)\rangle + \mu(s) \langle B(s), T(s)\rangle \\
&= \varepsilon_0 \lambda(s) \\
&= \varepsilon_0 (s + b) \\
&= \varepsilon_0 s + \varepsilon_0 b \\
&= \varepsilon_0 s + c
\end{aligned}$$

olduğundan (ii) önermesinin doğruluğu ispatlandı.
(4.3.1) eşitliğinden α eğrisinin yer vektörünün normal bileşeni $\alpha^N = \mu B$ dir.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, B\rangle &= \langle \lambda T + \mu B, B\rangle \\
&= \lambda \langle T, B\rangle + \mu \langle B, B\rangle \\
&= \mu \varepsilon_2
\end{aligned}$$

ve μ sabit olduğundan α^N sabit uzunlukludur yani

$$\left\|\alpha^N\right\| = |\ell| \neq 0$$

dır. Böylece (iii) ispatlandı.
$\langle \alpha, B\rangle = \mu\varepsilon_2$ ve μ sabit olduğundan $\langle \alpha, B\rangle$ sabittir. $\kappa > 0$, $\lambda = s + b$ ve μ sabit olduğundan (4.3.3) ün son eşitliğine göre τ sıfırdan farklıdır. Böylece (iv) ispatlandı.

Karşıt olarak (i) veya (ii) şartlarından biri sağlansın. O halde b bir sabit sayı olmak üzere $\langle \alpha, T\rangle = \varepsilon_0 s + b$ dir. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', T\rangle + \langle \alpha, T'\rangle &= \varepsilon_0 \\
\langle T, T\rangle + \langle \alpha, \kappa N\rangle &= \varepsilon_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\kappa \langle \alpha, N\rangle = 0$$

ve $\kappa > 0$ olduğundan

$$\langle \alpha, N \rangle = 0$$

bulunur. Öyleyse eğri rektifiyandır.

Eğer (iii) ün sağlandığını kabul edersek, eğrinin yer vektörünün normal bileşeni α^N sabit uzunlukludur ve uzaklık fonksiyonu ρ sabit değildir. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha = \lambda T + \alpha^N$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \alpha \rangle &= \left\langle \lambda T + \alpha^N, \lambda T + \alpha^N \right\rangle \\ &= \lambda^2 \langle T, T \rangle + 2\lambda \left\langle T, \alpha^N \right\rangle + \left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle \\ &= \lambda^2 \varepsilon_0 + \left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

olduğundan

$$\left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle = \langle \alpha, \alpha \rangle - \lambda^2 \varepsilon_0$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \langle \alpha, T \rangle &= \left\langle \lambda T + \alpha^N, T \right\rangle \\ &= \lambda \langle T, T \rangle + \left\langle \alpha^N, T \right\rangle \\ &= \lambda \varepsilon_0 \end{aligned}$$

değerini (4.3.4) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\langle \alpha, \alpha \rangle - \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \alpha, T \rangle^2 = \left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle$$

bulunur. α^N sabit olduğundan c bir sabit olmak üzere $\left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle = c$ şeklindedir. Buna göre son eşitliği

$$\langle \alpha, \alpha \rangle - \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \alpha, T \rangle^2 = c$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\begin{aligned} \langle \alpha', \alpha \rangle + \langle \alpha, \alpha' \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_0} 2 \langle \alpha, T \rangle \left[\langle \alpha', T \rangle + \langle \alpha, T' \rangle \right] \\ \langle T, \alpha \rangle + \langle \alpha, T \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_0} 2 \langle \alpha, T \rangle \left[\langle T, T \rangle + \langle \alpha, \kappa N \rangle \right] \\ \langle \alpha, T \rangle &= \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \alpha, T \rangle \left[\varepsilon_0 + \kappa \langle \alpha, N \rangle \right] \end{aligned}$$

bulunur. Uzaklık fonksiyonu ρ sabit olmadığından $\langle \alpha, T\rangle \neq 0$ dır. $\kappa > 0$ olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için $\langle \alpha, N\rangle = 0$ olmalıdır. Öyleyse α bir rektifiyan eğridir.

(iv) ün sağladığını kabul edelim. Yani $\langle \alpha, B\rangle$ sabit olsun. Buna göre

$$\begin{aligned}\langle \alpha, B\rangle' &= \langle \alpha', B\rangle + \langle \alpha, B'\rangle \\ 0 &= \langle T, B\rangle + \langle \alpha, -\varepsilon_1\varepsilon_2\tau N\rangle \\ 0 &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\tau \langle \alpha, N\rangle\end{aligned}$$

dir. τ sıfırdan farklı olduğundan $\langle \alpha, N\rangle = 0$ olur. Buna göre α rektifiyan eğridir.•

Teorem 4.3.2. α, E_1^3 de bir birim hızlı ışıksı olmayan ve eğriliği pozitif bir eğri olsun. E_1^3 in uygun bir izometrisi ile α eğrisinin rektifiyan eğriye denk olabilmesi için gerek ve yeter şart $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$$

olmasıdır.

İspat α, birim hızlı eğriliği pozitif bir eğri olsun. Eğer α rektifiyan eğri ise Teorem 4.3.1 ve (4.3.2) ve (4.3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} &= \frac{\dfrac{\lambda(s)\kappa(s)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\mu(s)}}{\kappa(s)} \\ &= \frac{\lambda(s)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\mu(s)} \\ &= \frac{s+b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell} \qquad (4.3.5)\end{aligned}$$

dir. Burada $b \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}_0$ dır. Buna göre $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$$

biçiminde yazılabilir.

Karşıt olarak $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ için $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$ eşitliği sağlansın. $c_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}$ ve

$c_2 = \dfrac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}$ alalım. Burada $b \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}_0$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ dir.

$$
\begin{aligned}
\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} &= \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}s + \frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell} \\
&= \frac{s+b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}
\end{aligned}
$$

dir. Frenet formüllerini kullanarak

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left[\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s)\right] &= \alpha'(s) - T(s) - (s+b)T'(s) - \ell B'(s) \\
&= T(s) - T(s) - (s+b)\kappa N(s) - \ell\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\tau\right)N(s) \\
&= -(s+b)\kappa N(s) - \ell\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\tau\right)N(s) \\
&= -s\kappa N(s) - b\kappa N(s) + \varepsilon_1\varepsilon_2\ell\tau N(s)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\ell\tau = s\kappa + b\kappa$$

olduğundan

$$\frac{d}{ds}\left[\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s)\right] = 0$$

bulunur. Öyleyse D bir sabit sayı olmak üzere

$$\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s) = D$$

dir. Uygun bir öteleme ile

$$\alpha(s) = (s+b)T(s) + \ell B(s)$$

şeklinde yazılır. Buna göre α rektifiyan bir eğridir.•

Teorem 4.3.3. $\alpha = \alpha(s)$ E_1^3 de birim hızlı ışıksı olmayan eğri olsun. O halde aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) α, yer vektörü uzaysı rektifiyan düzlemde yatan bir rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha(t) = \gamma(t)\frac{\ell}{\cos t},\ \ \ell \in \mathbb{R}_0^+ \tag{4.3.6}$$

olmasıdır. Burada $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede birim hızlı uzaysı eğridir.

ii) α, yer vektörü zamansı rektifiyan düzlemde yatan ve yer vektörü uzaysı(zamansı) olan bir uzaysı(zamansı) rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha(t) = \gamma(t)\frac{\ell}{\sinh t}, \ell \in \mathbb{R}_0^+ \tag{4.3.7}$$

olmasıdır. Burada $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede (H_0^2 pseudo hiporbolik uzayda) birim hızlı zamansı(uzaysı) eğridir.

iii) α, yer vektörü zamansı rektifiyan düzlemde yatan ve yer vektörü zamansı (uzaysı) olan bir uzaysı (zamansı) rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha(t) = \gamma(t)\frac{\ell}{\cosh t}, \ \ell \in \mathbb{R}_0^+ \tag{4.3.8}$$

olmasıdır. Burada $\gamma(t)$, H_0^2 pseudo hiperbolic uzayda (S_1^2 pseudo küresinde) birim hızlı uzaysı (zamansı) eğridir.

İspat $\alpha(s)$, E_1^3 de yer vektörü uzaysı rektifiyan düzlemde yatan birim hızlı ışıksı olmayan bir rektifiyan eğri olsun. Yer vektörü uzaysı rektifiyan düzlemde yattığından $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$, $\langle T, T \rangle = 1$ ve $\langle B, B \rangle = 1$ dir. Teorem 4.3.1 e göre uzaklık fonksiyonu

$$\rho^2 = \|\alpha\|^2 = (s+b)^2 + \ell^2, \ b \in \mathbb{R}, \ \ell \in \mathbb{R}_0,$$

dir. $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ seçebiliriz. Aynı zamanda uygun ötelemeler ile

$$\rho^2 = s^2 + \ell^2$$

olarak yazılabilir. Şimdi S_1^2 pseudo kürede yatan bir γ eğrisini

$$\gamma(s) = \frac{\alpha(s)}{\rho(s)}$$

ile tanımlayalım. Buradan

$$\alpha(s) = \gamma(s)\,\rho(s) = \gamma(s)\sqrt{s^2 + \ell^2}$$

olur. Türev alırsak

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \gamma'(s)\sqrt{s^2+\ell^2} + \gamma(s)\frac{s}{\sqrt{s^2+\ell^2}} \\
T(s) &= \gamma'(s)\sqrt{s^2+\ell^2} + \gamma(s)\frac{s}{\sqrt{s^2+\ell^2}}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ olduğundan bu eşitliğin türevini alırsak $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle T, T \rangle &= \left\langle \gamma' \sqrt{s^2 + \ell^2} + \gamma \frac{s}{\sqrt{s^2 + \ell^2}}, \gamma' \sqrt{s^2 + \ell^2} + \gamma \frac{s}{\sqrt{s^2 + \ell^2}} \right\rangle \\
&= \left(s^2 + \ell^2\right) \langle \gamma', \gamma' \rangle + s \langle \gamma', \gamma \rangle + s \langle \gamma, \gamma' \rangle + \frac{s^2}{s^2 + \ell^2} \langle \gamma, \gamma \rangle \\
&= \left(s^2 + \ell^2\right) \langle \gamma', \gamma' \rangle + \frac{s^2}{s^2 + \ell^2}
\end{aligned}$$

ve $\langle T, T \rangle = 1$ olduğundan

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle \left(s^2 + \ell^2\right) = 1 - \frac{s^2}{s^2 + \ell^2} \Rightarrow \langle \gamma', \gamma' \rangle = \frac{\ell^2}{\left(s^2 + \ell^2\right)^2} > 0$$

dir. Buna göre γ uzaysı eğridir.

$$\|\gamma'(s)\| = \frac{\ell}{s^2 + \ell^2}$$

dir. γ eğrisinin pseudo yay uzunluklu parametresi $t = \int\limits_0^s \|\gamma'(u)\| \, du$ olduğundan

$$\begin{aligned}
t &= \int\limits_0^s \frac{\ell}{u^2 + \ell^2} du \\
&= \int\limits_0^s \frac{\ell}{\ell^2 (1 + \frac{u^2}{\ell^2})} \\
&= \frac{1}{\ell} \int\limits_0^s \frac{1}{(1 + \left(\frac{u}{\ell}\right)^2)} \\
&= \int \frac{dx}{1 + x^2} \\
&= \arctan \frac{u}{l} \,\Big|_0^s \\
&= \arctan \frac{s}{\ell}
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{s}{\ell} = \tan t \Rightarrow s = \ell \tan t$$

dir. s değerini $\alpha\,(s) = \gamma(s)\sqrt{s^2+\ell^2}$ denkleminde yerine yazarsak $\alpha(t) = \gamma(t)\dfrac{\ell}{\cos t}$ elde edilir. Karşıt olarak α eğrisi $\alpha(t) = \gamma(t)\dfrac{\ell}{\cos t}$ olarak verilsin. $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede birim hızlı uzaysı eğri olsun. α eğrisinin hız vektörü

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \frac{\gamma'(t)\ell\cos t + \sin t\ell y(t)}{\cos^2 t} \\
&= \frac{\ell}{\cos^2 t}\left(\gamma'(t)\cos t + \sin t\gamma(t)\right)
\end{aligned}$$

dir. $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$ ve $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ olduğundan $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha' \rangle &= \left\langle \gamma(t)\frac{\ell}{\cos t}, \frac{\ell}{\cos^2 t}\left(\gamma'(t)\cos t + \sin t\gamma(t)\right)\right\rangle \\
&= \langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle \frac{\ell^2}{\cos^2 t} + \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle \frac{\ell^2 \sin t}{\cos^3 t} \\
&= \frac{\ell^2 \sin t}{\cos^3 t} \qquad (4.3.9)
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', \alpha' \rangle &= \left\langle \frac{\ell}{\cos^2 t}\left(\gamma'\cos t + \sin t\gamma\right), \frac{\ell}{\cos^2 t}\left(\gamma'\cos t + \sin t\gamma\right)\right\rangle \\
&= \frac{\ell^2}{\cos^4 t}\left[\langle \gamma', \gamma' \rangle \cos^2 t + \langle \gamma', \gamma \rangle \cos t \sin t + \langle \gamma, \gamma' \rangle \sin t \cos t + \langle \gamma, \gamma \rangle \sin^2 t\right] \\
&= \frac{\ell^2}{\cos^4 t}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) \\
&= \frac{\ell^2}{\cos^4 t} \qquad (4.3.10)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $\|\alpha'(t)\| = \dfrac{\ell}{\cos^2 t}$ bulunur. $m \in \mathbb{R}$ ve α^N, α yer vektörünün normal bileşeni olmak üzere $\alpha(t) = m(t)\alpha'(t) + \alpha^N$ biçimindedir. Buna göre

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle = m\,\langle \alpha', \alpha' \rangle + \left\langle \alpha^N, \alpha' \right\rangle \Rightarrow m = \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\langle \alpha^N, \alpha^N \right\rangle &= \langle \alpha - m\alpha', \alpha - m\alpha' \rangle \\
&= \langle \alpha, \alpha \rangle - m\,\langle \alpha, \alpha' \rangle - m\,\langle \alpha', \alpha \rangle + m^2\,\langle \alpha', \alpha' \rangle \\
&= \langle \alpha, \alpha \rangle - \frac{2(\langle \alpha, \alpha' \rangle \langle \alpha, \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle} + \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle^2}{\langle \alpha', \alpha' \rangle^2}\langle \alpha', \alpha' \rangle \\
&= \langle \alpha, \alpha \rangle - \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle^2}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}
\end{aligned}$$

olur. $\langle\alpha,\alpha\rangle = \dfrac{\ell^2}{\cos^2 t}$, (4.3.9) ve (4.3.10) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha^N,\alpha^N\right\rangle &= \frac{\ell^2}{\cos^2 t} - \frac{\dfrac{\ell^4 \sin^2 t}{\cos^6 t}}{\dfrac{\ell^2}{\cos^4 t}} \\ &= \frac{\ell^2(1-\sin^2 t)}{\cos^2 t} \\ &= \ell^2\end{aligned}$$

dır. Buna göre $\left\langle \alpha^N,\alpha^N\right\rangle = \ell^2$ sabittir. Böylece $\left\|\alpha^N\right\|$ =sbt ve $\rho = \|\alpha\| = \dfrac{\ell}{\cos t}$ sabit değildir. O halde α Teorem 4.3.1 e göre bir rektifiyan eğridir.

ii) α, yer vektörü zamansı düzlemde ve yer vektörü uzaysı olan uzaysı rektifiyan eğri olsun. O halde $\langle\alpha,\alpha\rangle > 0,\ \langle T,T\rangle = \varepsilon_0 = 1$ ve $\langle B,B\rangle = \varepsilon_2 = -1$ dir. Teorem 4.3.1 e göre uzaklık fonksiyonu

$$\rho^2 = \|\alpha\|^2 = \langle\alpha,\alpha\rangle = (s+b)^2 - \ell^2,\ b\in\mathbb{R},\ \ell\in\mathbb{R}_0$$

dır. $\ell\in\mathbb{R}_0^+$ seçebiliriz. Aynı zamanda uygun ötelemelerle

$$\rho^2 = s^2 - \ell^2, \qquad |s| > \ell$$

yazılabilir. Şimdi $\gamma(s)$, S_1^2 pseudo kürede eğri olsun.

$$\gamma(s) = \frac{\alpha(s)}{\rho(s)}$$

olduğundan

$$\alpha(s) = \gamma(s)\rho(s) = \gamma(s)\sqrt{s^2-\ell^2}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha'(s) &= \gamma'(s)\sqrt{s^2-\ell^2} + \gamma(s)\frac{s}{\sqrt{s^2-\ell^2}} \\ T(s) &= \gamma'(s)\sqrt{s^2-\ell^2} + \gamma(s)\frac{s}{\sqrt{s^2-\ell^2}}\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ dir. Bu eşitliğin türevini alırsak $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\langle T, T \rangle &= \left\langle \gamma' \sqrt{s^2 - \ell^2} + \gamma \frac{s}{\sqrt{s^2 - \ell^2}}, \gamma' \sqrt{s^2 - \ell^2} + \gamma \frac{s}{\sqrt{s^2 - \ell^2}} \right\rangle \\
&= \langle \gamma', \gamma' \rangle \left(s^2 - \ell^2 \right) + \langle \gamma', \gamma \rangle s + \langle \gamma, \gamma' \rangle s + \langle \gamma, \gamma \rangle \frac{s^2}{s^2 - \ell^2} \\
&= \langle \gamma', \gamma' \rangle \left(s^2 - \ell^2 \right) + \frac{s^2}{s^2 - \ell^2}
\end{aligned}
$$

ve $\langle T, T \rangle = 1$ olduğundan

$$
\langle \gamma', \gamma' \rangle \left(s^2 - \ell^2 \right) = 1 - \frac{s^2}{s^2 - \ell^2} \Rightarrow \langle \gamma', \gamma' \rangle = \frac{-\ell^2}{\left(s^2 + \ell^2 \right)^2} < 0
$$

dır. Buna göre γ zamansı eğridir.

$$
\|\gamma'(s)\| = \frac{\ell}{s^2 - \ell^2}, \qquad \ell \in \mathbb{R}_0^+ \text{ ve } |s| > \ell
$$

olduğundan. γ eğrisinin pseudo yay uzunluğu parametresi

$$
\begin{aligned}
t &= \int_0^s \|\gamma'(u)\| \, du \\
&= \int_0^s \frac{\ell}{u^2 - \ell^2} du \\
&= \int_0^s \frac{\ell}{\ell^2 (\frac{u^2}{\ell^2} - 1)} \\
&= -\frac{1}{\ell} \int_0^s \frac{du}{(1 - \left(\frac{u}{\ell} \right)^2)} \\
&= -\int \frac{dx}{1 - x^2} \\
&= -\operatorname{arccot} hx \\
&= -\operatorname{arccot} h \frac{u}{l} \; |_0^s \\
&= -\operatorname{arccot} h \frac{s}{\ell}
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre

$$
s = \ell \coth(-t) = -\ell \coth t
$$

dir. s değerini $\alpha(s) = \gamma(s)\sqrt{s^2 - \ell^2}$ denkleminde yerine yazarsak $\alpha(t) = \gamma(t)\dfrac{\ell}{\sinh t}$ elde edilir. Böylece (b) ispatlandı.

Karşıt olarak α eğrisi, $\alpha(t) = \gamma(t)\dfrac{\ell}{\sinh t}$ $\ell \in \mathbb{R}_0^+$ olarak verilsin. $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede birim hızlı zamansı eğri olsun. α eğrisinin hız vektörünü

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \frac{\gamma'(t)\ell\sinh t - \ell\cosh t\gamma(t)}{\sinh^2 t} \\
&= \frac{\ell}{\sinh^2 t}\left(\gamma'(t)\sinh t - \cosh t\gamma(t)\right)
\end{aligned}$$

dir. Burada $\langle \gamma', \gamma' \rangle = -1$, $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ ve sonuç olarak $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ dır. Buna göre

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha' \rangle &= \left\langle \gamma\frac{\ell}{\sinh t}, \frac{\ell}{\sinh^2 t}\left(\gamma'\sinh t - \gamma\cosh t\right) \right\rangle \\
&= \langle \gamma, \gamma' \rangle \frac{\ell^2}{\sinh^3 t} - \langle \gamma, \gamma \rangle \frac{\ell^2\cosh t}{\sinh^3 t} \\
&= -\frac{\ell^2\cosh t}{\sinh^3 t} \qquad (4.3.11)
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', \alpha' \rangle &= \left\langle \frac{\ell}{\sinh^2 t}\left(\gamma'\sinh t - \gamma\cosh t\right), \frac{\ell}{\sinh^2 t}\left(\gamma'\sinh t - \gamma\cosh t\right) \right\rangle \\
&= \frac{\ell^2}{\sinh^4 t}\left[\langle \gamma', \gamma' \rangle \sinh^2 t - \langle \gamma', \gamma \rangle \sinh t\cosh t - \langle \gamma, \gamma' \rangle \sinh t\cosh t + \langle \gamma, \gamma \rangle \cosh^2 t\right] \\
&= \frac{\ell^2}{\sinh^4 t}\left(\cosh^2 t - \sinh^2 t\right) \\
&= \frac{\ell^2}{\sinh^4 t} \qquad (4.3.12)
\end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak $\|\alpha'(t)\| = \dfrac{\ell}{\sinh^2 t}$ dir. $m \in \mathbb{R}$ ve α^N, α yer vektörünün normal bileşeni olmak üzere $\alpha(t) = m(t)\alpha'(t) + \alpha^N$ olarak alınabilir. Buna göre

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle = m\langle \alpha', \alpha' \rangle + \left\langle \alpha^N, \alpha' \right\rangle \Rightarrow m = \frac{\langle \alpha, \alpha' \rangle}{\langle \alpha', \alpha' \rangle}$$

dır.

$$\alpha(t) = m(t)\alpha'(t) + \alpha^N \Rightarrow \alpha^N = \alpha(t) - m(t)\alpha'(t)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle\alpha^N,\alpha^N\right\rangle &= \langle\alpha-m\alpha',\alpha-m\alpha'\rangle\\ &= \langle\alpha,\alpha\rangle-m\langle\alpha,\alpha'\rangle-m\langle\alpha',\alpha\rangle+m^2\langle\alpha',\alpha'\rangle\\ &= \langle\alpha,\alpha\rangle-\frac{2\langle\alpha,\alpha'\rangle\langle\alpha,\alpha'\rangle}{\langle\alpha',\alpha'\rangle}+\frac{\langle\alpha,\alpha'\rangle^2}{\langle\alpha',\alpha'\rangle^2}\langle\alpha',\alpha'\rangle\\ &= \langle\alpha,\alpha\rangle-\frac{\langle\alpha,\alpha'\rangle^2}{\langle\alpha',\alpha'\rangle} \qquad (4.3.13)\end{aligned}$$

dır. Burada $\langle\alpha,\alpha\rangle=\dfrac{\ell^2}{\sinh^2 t}$ ifadesi (4.3.12) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left\langle\alpha^N,\alpha^N\right\rangle &= \frac{\ell^2}{\sinh^2 t}-\frac{\dfrac{\ell^4\cosh t}{\sinh^6 t}}{\dfrac{\ell^2}{\sinh^4 t}}\\ &= \frac{\ell^2}{\sinh^2 t}-\frac{\ell^2\cosh^2 t}{\sinh^2 t}\\ &= \frac{\ell^2\left(1-\cosh^2 t\right)}{\sinh^2 t}\\ &= \frac{\ell^2\left(-\sinh^2 t\right)}{\sinh^2 t}\\ &= -\ell^2\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\left\|\alpha^N\right\|=$ sabit olur. $\rho=\dfrac{\ell}{\sinh t}$ sabit değildir. Teorem 4.3.1 den α rektifiyan eğridir.

α yer vektörü zamansı rektifiyan düzlemde yatan zamansı rektifiyan eğrisi ve yer vektörü zamansı ise ispat benzer biçimde yapılır.

iii) İspat (*i*) ve (*ii*) deki gibi benzer biçimde yapılır.●

Teorem 4.3.4. E_1^3 de eğriliği 1 ve yer vektörü ışıksı rektifiyan düzlemde birim hızlı ışıksı olmayan rektifiyan eğriler yoktur.

İspat α, eğriliği 1 olan E_1^3 de yer vektörü ışıksı rektifiyan düzlemde yatan birim hızlı ışıksı olmayan eğri olsun. Öyleyse α bir uzaysı eğridir ve yer vektörü $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere

$$\alpha(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)B(s)$$

eşitliğini sağlar. Yukarıdaki eşitlikte türev alıp (4.2.6) Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\alpha'(s) &= \lambda'(s)\,T(s) + \lambda(s)\,T'(s) + \mu'(s)\,B(s) + \mu(s)\,B'(s) \\
T(s) &= \lambda'(s)\,T(s) + \lambda(s)\,\kappa(s)N(s) + \mu'(s)\,B(s) - \mu(s)\,\kappa(s)\,T(s) - \mu(s)\,\tau(s)\,B(s) \\
0 &= [\lambda'(s) - 1 - \mu(s)\,\kappa(s)]\,T(s) + \lambda(s)\,\kappa(s)N(s) + [\mu'(s) - \mu(s)\,\tau(s)]\,B(s)
\end{aligned}$$

Kabülümüzden $\kappa(s) = 1$ idi.

$$\lambda(s)\,\kappa(s) = 0 \Rightarrow \lambda(s) = 0$$

$$\lambda'(s) - 1 - \mu(s)\,\kappa(s) = 0 \Rightarrow \mu = -1$$

$$\mu'(s) - \mu(s)\,\tau(s) = 0 \Rightarrow \tau = 0$$

dır. Sonuç olarak $\alpha(s) = -B(s)$, $\tau(s) = 0$ ve Frenet formüllerinden $\alpha'(s) = T$, $\alpha''(s) = N$, $\alpha'''(s) = 0$ dir. α eğrisi için MacLaurin açılımı

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \alpha'(0)\frac{s}{1!} + \alpha''(0)\frac{s^2}{2!} + \alpha'''(0)\frac{s^3}{3!} + ...$$

ve $\alpha'''(s) = 0$ olduğundan $\alpha(s)$, $\{\alpha'(0), \alpha''(0)\}$ vektörlerinin gerdiği düzlemde yani oskülatör düzlemdedir. Bu ise bir çelişkidir.•

Teorem 4.3.5. $\alpha(s)$ E_1^3 de birim hızlı eğriliği 1 olan ışıksı rektifiyan eğri olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\rho = \|\alpha\|$ uzaklık fonksiyonu $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri için

$$\rho^2 = |c_1 s + c_2|$$

eşitliğini sağlar.

ii) Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni $\langle \alpha, T \rangle$ sabittir.

iii) Burulma $\tau(s) \neq 0$ ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni $\langle \alpha, B \rangle = s + c$ dir. Burada $c \in \mathbb{R}$ dir.

Karşıt olarak eğer $\alpha(s)$, E_1^3 de eğriliği 1 olan birim hızlı bir ışıksı eğri ve (i), (ii), (iii) önermelerinden biri sağlanıyorsa, α bir rektifiyan eğridir.

İspat $\alpha(s)$, E_1^3 de eğriliği 1 olan birim hızlı ışıksı rektifiyan eğri olsun. O halde α eğrisinin yer vektörü

$$\alpha(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \tag{4.3.14}$$

biçimindedir. Burada λ, μ, s pseudo yay uzunluğu parametreli herhangi fonksiyonlardır. Yukarıdaki denklemde türev alıp (4.2.9) Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) + \mu'(s)B(s) + \mu(s)B'(s) \\ T(s) &= \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)\kappa(s)N(s) + \mu'(s)B(s) - \mu(s)\tau(s)N(s) \\ &= \lambda'(s)T(s) + [\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau]N(s) + \mu'(s)B(s) \end{aligned}$$

ve buradan

$$0 = [\lambda'(s) - 1]T(s) + [\lambda(s)\kappa(s) - \mu(s)\tau(s)]N(s) + \mu'(s)B(s)$$

olduğundan

$$\lambda'(s) = 1\ ,\ \mu'(s) = 0,\ \lambda(s)\kappa(s) = \mu(s)\tau(s)$$

elde edilir. Buna göre

$$\lambda(s) = s + b \text{ ve } \mu(s) = \ell\ (\ell \in \mathbb{R})$$

dir. Böylece $\kappa = 1$ olduğundan $\lambda\kappa = \mu\tau$ denkleminde $\mu(s)\tau(s) \neq 0$ dır. Bu nedenle μ sabiti sıfırdan farklıdır. $\mu(s) = \ell \in \mathbb{R}_0$ ve $\tau(s) \neq 0$ dır. (4.3.14) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle &= \langle \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s), \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s) \rangle \\ &= \lambda^2(s)\langle T(s), T(s) \rangle + \mu^2(s)\langle B(s), B(s) \rangle + 2\lambda(s)\mu(s)\langle T(s), B(s) \rangle \\ &= 0 + 0 + 2\lambda(s)\mu(s) \\ &= 2(s+b)\ell \end{aligned}$$

dir. O halde $\rho^2 = \|\alpha\|^2 = |c_1 s + c_2|$ dir. Burada $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ dir. Böylece (i) ispatlandı. (4.3.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s), T(s) \rangle &= \langle \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s), T(s) \rangle \\ &= \lambda(s)\langle T(s), T(s) \rangle + \mu(s)\langle B(s), T(s) \rangle \\ &= \mu(s) \\ &= \ell\ \ (\ell \in \mathbb{R}_0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(s), B(s) \rangle &= \langle \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s), B\,(s) \rangle \\
&= \lambda(s) \langle T(s), B(s) \rangle + \mu(s) \langle B(s), B\,(s) \rangle \\
&= \lambda(s) \\
&= s + b \ \ (b \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) ve (iii) ispatlandı.

Karşıt olarak $\alpha(s)$, E_1^3 de eğriliği 1 olan birim hızlı ışıksı rektifiyan eğri olsun ve (i) deki önerme sağlansın. O halde

$$\rho^2 = |c_1 s + c_2|$$

dir. Burada $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ dir.

$$\rho^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = \pm\,(c_1 s + c_2)$$

olduğundan son eşitlikte iki defa türev alıp Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, \alpha \rangle = \pm\,(c_1 s + c_2) \ &\Rightarrow \ 2\,\langle \alpha', \alpha \rangle = \pm c_1 \\
&\Rightarrow \ \langle T, \alpha \rangle = \pm \frac{c_1}{2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle T', \alpha \rangle + \langle T, \alpha' \rangle &= 0 \\
\langle \kappa N, \alpha \rangle &= 0 \\
\langle N, \alpha \rangle &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde α bir rektifiyan eğridir.

Şimdi (ii) önermesinin sağladığını kabul edelim. Eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni $\langle \alpha, T \rangle$ sabittir. Türev alırsak

$$\begin{aligned}
\langle \alpha', T \rangle + \langle \alpha, T' \rangle = 0 \ &\Rightarrow \ \langle T, T \rangle + \langle \alpha, \kappa N \rangle = 0 \\
&\Rightarrow \ \langle \alpha, N \rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur ki $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olduğundan α bir rektifiyan eğridir.

Son olarak (iii) ün sağladığını kabul edelim. $\tau(s) \neq 0$ ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni $\langle \alpha, B \rangle = s + c$, $c \in \mathbb{R}$ dir. Burada s ye göre türev alıp Frenet formüllerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \langle \alpha', B \rangle + \langle \alpha, B' \rangle = 1 \ &\Rightarrow \ \langle T, B \rangle + \langle \alpha, -\tau N \rangle = 1 \\ &\Rightarrow \ 1 - \tau \langle \alpha, N \rangle = 1 \\ &\Rightarrow \ \tau \langle \alpha, N \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \ \langle \alpha, N \rangle = 0 \end{aligned}$$

bulunur ki $\langle \alpha, N \rangle = 0$ olduğundan α bir rektifiyan eğridir.$\bullet$

Teorem 4.3.2 den ışıksı olmayan rektifiyan eğrinin $\dfrac{\tau}{\kappa}$ oranı lineer fonksiyondur. Aynı özellikler ışıksı rektifiyan eğriler için de sağlanır. Sıradaki teorem bununla ilgilidir.

Teorem 4.3.6. $\alpha = \alpha(s)$, E_1^3 de birim hızlı ışıksı eğri ve $\kappa(s) = 1$ olsun. α eğrisinin rektifiyan eğriye denk olabilmesi için gerek ve yeter şart $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$$

olmasıdır.

İspat İlk olarak $\alpha(s)$ eğrisi rektifiyan olsun. Teorem 4.3.1 ve (4.3.2) ve (4.3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{\tau(s)}{\kappa(s)} &= \frac{\dfrac{\lambda(s)\kappa(s)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\mu(s)}}{\kappa(s)} \\ &= \frac{\lambda(s)}{\varepsilon_1\varepsilon_2\mu(s)} \\ &= \frac{s+b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell} \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

elde edilir. Burada $b \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}_0$ dır. Buna göre $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$$

elde edilir.

Karşıt olarak $\dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)} = c_1 s + c_2$, $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olsun. $c_1 = \dfrac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}$ ve $c_2 = \dfrac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}$ alalım. Burada $b \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}_0$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ dir. Buna göre

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}s + \frac{b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell} = \frac{s+b}{\varepsilon_1\varepsilon_2\ell}$$

dir. Frenet formüllerinden

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left[\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s)\right] &= \alpha'(s) - T(s) - (s+b)T'(s) - \ell B'(s) \\
&= T(s) - T(s) - (s+b)\kappa N(s) - \ell\varepsilon_1\varepsilon_2(-\tau)N(s) \\
&= -(s+b)\kappa N(s) - \ell\varepsilon_1\varepsilon_2(-\tau)N(s) \\
&= -s\kappa N(s) - b\kappa N(s) + \ell\varepsilon_1\varepsilon_2\tau N(s)
\end{aligned}$$

dır. Burada $\varepsilon_1\varepsilon_2\ell\tau = s\kappa + b\kappa$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{ds}\left[\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s)\right] = 0$$

olur. Öyleyse D sabit bir sayı olmak üzere

$$\alpha(s) - (s+b)T(s) - \ell B(s) = D$$

dir. Uygun bir öteleme ile

$$\alpha(s) = (s+b)T(s) + \ell B(s)$$

şeklindedir. Buna göre α eğrisi rektifiyandır.•

Teorem 4.3.7. $\alpha = \alpha(s)$ eğriliği 1 olan E_1^3 de birim hızlı ışıksı eğri olsun. Yer vektörü uzaysı (zamansı) olan bir α eğrisinin rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\alpha(t) = e^t\gamma(t) \tag{4.3.16}$$

olmasıdır. Burada $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede (H_0^2 pseudo hiperbolik uzayda) birim hızlı zamansı (uzaysı) eğridir.

İspat $\alpha(s)$, uzaysı yer vektörlü ve eğriliği 1 olan E_1^3 de birim hızlı ışıksı rektifiyan eğri olsun. Uzaysı olduğundan $\langle \alpha, \alpha \rangle > 0$ dır. Teorem 4.3.5 den $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\langle \alpha, \alpha \rangle = c_1 s + c_2$ ve böylece $\rho^2 = \|\alpha\|^2 = c_1 s + c_2$ dir. Burada $c_1 \in \mathbb{R}_0^+$ alabiliriz. Şimdi S_1^2 de bir γ eğrisini

$$\gamma(s) = \frac{\alpha(s)}{\rho(s)}$$

eşitliği ile tanımlayalım. Buna göre

$$\alpha(s) = \gamma(s)\,\rho(s) = \gamma(s)\sqrt{c_1 s + c_2}$$

dir. Bu eşitliğin türevini alırsak

$$\alpha'(s) = \gamma'(s)\sqrt{c_1 s + c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 s + c_2}}\gamma(s)$$

olduğundan

$$T(s) = \gamma'(s)\sqrt{c_1 s + c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 s + c_2}}\gamma(s) \tag{4.3.17}$$

elde edilir. $\langle \gamma, \gamma \rangle = 1$ eşitliğinin türevi alınırsa $\langle \gamma, \gamma' \rangle = 0$ elde edilir. (4.3.17) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle &= \left\langle \gamma'\sqrt{c_1 s + c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 s + c_2}}\gamma, \gamma'\sqrt{c_1 s + c_2} + \frac{c_1}{2\sqrt{c_1 s + c_2}}\gamma \right\rangle \\ 0 &= (c_1 s + c_2)\langle \gamma', \gamma' \rangle + c_1 \langle \gamma', \gamma \rangle + \frac{c_1^2}{4(c_1 s + c_2)}\langle \gamma, \gamma \rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$(c_1 s + c_2)\langle \gamma', \gamma' \rangle = -\frac{c_1^2}{4(c_1 s + c_2)} \Rightarrow \langle \gamma', \gamma' \rangle = -\frac{c_1^2}{4(c_1 s + c_2)^2} < 0$$

dır. Buna göre γ bir zamansı vektördür. $\|\gamma'(s)\| = \dfrac{c_1}{2(c_1 s + c_2)}$ olduğundan γ eğrisinin pseudo yay uzunluğu parametresi

$$\begin{aligned} t &= \int_0^s \|\gamma'(u)\|\,du \\ &= \int_0^s \frac{c_1}{2(c_1 s + c_2)}du \\ &= \frac{1}{2}\ln(c_1 s + c_2) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} 2t &= \ln(c_1 s + c_2) &\Rightarrow\quad e^{2t} &= c_1 s + c_2 \\ & &\Rightarrow\quad e^{t} &= \sqrt{c_1 s + c_2} \\ & &\Rightarrow\quad \alpha(t) &= \gamma(t)\sqrt{c_1 s + c_2} \\ & &\Rightarrow\quad \alpha(t) &= e^{t}\gamma(t) \end{aligned}$$

dir.

Karşıt olarak α eğrisi $\alpha(t) = e^t\gamma(t)$ eşitliğiyle tanımlansın. Burada $\gamma(t)$, S_1^2 pseudo kürede birim hızlı zamansı eğridir. $\alpha(t)$ eğrisini

$$t = \frac{1}{2}\ln(c_1 s + c_2)$$

ile yeniden parametrelendirelim. Burada s, α ışıksı eğrisinin pseudo yay uzunluğu parametresidir. $c_1 s + c_2 > 0$ ve $c_1 \in \mathbb{R}_0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre

$$\alpha(s) = \gamma(s)\sqrt{c_1 s + c_2}$$

dir. Sonuç olarak $\rho^2 = \|\alpha\|^2 = c_1 s + c_2$ olduğundan Teorem 4.3.5 den α rektifiyan eğridir.

Aynı ispat α, zamansı yer vektörlü E_1^3 de birim hızlı ışıksı rektifiyan eğri olduğunda ispat benzer biçimde yapılabilir.$\bullet$

5. DUAL UZAYDA REKTİFİYAN EĞRİLER

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ kümesi

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}^3 &= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = (\alpha_1 + \varepsilon\alpha_1^*, \alpha_2 + \varepsilon\alpha_2^*, \alpha_3 + \varepsilon\alpha_3^*)\} \\
&= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \varepsilon(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)\} \\
&= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{R}^3\}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür. Herhangi bir $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}, \overrightarrow{\widehat{\gamma}} = \overrightarrow{\gamma} + \varepsilon\overrightarrow{\gamma^*} \in \mathbb{D}^3$ elemanları için skalar (iç çarpım) ve vektörel çarpım sırasıyla şu şekilde tanımlanır.

$$
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\gamma}} \right\rangle = \langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma} \rangle + \varepsilon \left(\left\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\alpha^*}, \overrightarrow{\gamma} \right\rangle \right)
$$

$$
\overrightarrow{\widehat{\alpha}} \wedge \overrightarrow{\widehat{\gamma}} = (\widehat{\alpha}_2\widehat{\gamma}_3 - \widehat{\alpha}_3\widehat{\gamma}_2, \widehat{\alpha}_3\widehat{\gamma}_1 - \widehat{\alpha}_1\widehat{\gamma}_3, \widehat{\alpha}_1\widehat{\gamma}_2 - \widehat{\alpha}_2\widehat{\gamma}_1)
$$

burada $\widehat{\alpha}_i = \alpha_i + \varepsilon\alpha_i^*$, $\widehat{\gamma}_i = \gamma_i + \varepsilon\gamma_i^* \in \mathbb{D}$, $1 \le i \le 3$. Eğer $\alpha \ne 0$ ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}$ vektörünün normu şu şekilde tanımlanır:

$$
\left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle} = \| \overrightarrow{\alpha} \| + \varepsilon \frac{\left\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha^*} \right\rangle}{\| \overrightarrow{\alpha} \|}
$$

$\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual vektörünün normu 1 ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual vektörüne **birim dual vektör** denir.
$\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere

$$
S^2 = \left\{ \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}, \ \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\| = (1, 0); \ \overrightarrow{\alpha}, \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{R}^3 \right\}
$$

cümlesine $\mathbb{D}^3$ de $\widehat{0}$ merkezli **dual birim küre** denir.
Her $\alpha_i(t)$ ve $\alpha_i^*(t)$, $1 \le i \le 3$, türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, dual eğri

$$
\begin{aligned}
\widehat{\alpha} : I \subset \mathbb{R} &\to \mathbb{D}^3 \\
t &\to \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)} = (\alpha_1(t) + \varepsilon\alpha_1^*(t), \alpha_2(t) + \varepsilon\alpha_2^*(t), \alpha_3(t) + \varepsilon\alpha_3^*(t)) \\
&\phantom{\to \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}} = \overrightarrow{\alpha(t)} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*(t)}
\end{aligned}
$$

$\mathbb{D}^3$ de türevlenebilir. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}$, eğrisinin dual yay uzunluğu t_1 den t ye aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$
\widehat{s} = \int_{t_1}^{t} \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}' \right\| dt = \int_{t_1}^{t} \left\| \overrightarrow{\alpha(t)}' \right\| dt + \varepsilon \int_{t_1}^{t} \left\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\alpha^*(t)}' \right\rangle dt = s + \varepsilon s^* \tag{5.1}
$$

Burada $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{\alpha(t)}$ nin birim teğet vektörüdür. Bundan sonra t parametresi yerine $\overrightarrow{\alpha(t)}$ nin yay uzunluk parametresi olan s yi alacağız.

Şimdi $\mathbb{D}^3$ dual Frenet formüllerini verelim.

$$\begin{array}{rcccl} \widehat{\alpha} & : & I & \to & \mathbb{D}^3 \\ & & s & \to & \overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} = \overrightarrow{\alpha(s)} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*(s)} \end{array}$$

dual eğrisini göz önüne alalım. O halde

$$\frac{d\overrightarrow{\widehat{\alpha}}}{d\widehat{s}} = \frac{d\overrightarrow{\widehat{\alpha}}}{ds}\frac{ds}{d\widehat{s}} = \overrightarrow{\widehat{T}}$$

vektörüne $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}$ dual eğrisinin **dual birim teğet vektörü** denir. (5.1.1) eşitliğinden

$$\widehat{s} = s + \varepsilon\int\limits_{t_1}^{t}\left\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\alpha^*(s)}' \right\rangle ds$$

dır. Son eşitliğin türevini aldığımızda $\frac{d\widehat{s}}{ds} = 1 + \varepsilon\Delta$, burada $\Delta = \left\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\alpha^*(s)}' \right\rangle$ dir. Böylece $\overrightarrow{\widehat{T}}$ nin sabit uzunluğu 1 dir ve $\widehat{s}$ ye göre türevi

$$\frac{d\overrightarrow{\widehat{T}}}{d\widehat{s}} = \frac{d\overrightarrow{\widehat{T}}}{ds}\frac{ds}{d\widehat{s}} = \frac{d^2\overrightarrow{\widehat{\alpha}}}{d\widehat{s}^2} = \widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}}$$

olur. $\frac{d\overrightarrow{\widehat{T}}}{d\widehat{s}}$ dual vektörünün normuna $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}$ dual eğrisinin **dual eğrilik fonksiyonu** denir. Bundan sonra $\widehat{\kappa} : I \to \mathbb{D}$ fonksiyonunu sırf dual almayacağız. $\overrightarrow{\widehat{N}} = \frac{1}{\widehat{\kappa}}\frac{d\overrightarrow{\widehat{T}}}{d\widehat{s}}$ dual birim vektörüne, $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}$ dual eğrisinin **dual asli normali** denir. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}$ nin dual binormal vektörü $\overrightarrow{\widehat{B}} = \overrightarrow{\widehat{T}} \wedge \overrightarrow{\widehat{N}}$ dir. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}$ dual eğrisinin $\widehat{\alpha}(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\left\{ \overrightarrow{\widehat{T}},\ \overrightarrow{\widehat{N}},\ \overrightarrow{\widehat{B}} \right\}$ dir. Dual Frenet formülleri

$$\frac{d}{d\widehat{s}}\begin{bmatrix} \overrightarrow{\widehat{T}} \\ \overrightarrow{\widehat{N}} \\ \overrightarrow{\widehat{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{\kappa} & 0 \\ -\widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau} \\ 0 & -\widehat{\tau} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overrightarrow{\widehat{T}} \\ \overrightarrow{\widehat{N}} \\ \overrightarrow{\widehat{B}} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

dir. Burada $\widehat{\kappa} = \kappa + \varepsilon\kappa^*$ sırf dual olmayan dual eğrilik fonksiyonu ve $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ sırf dual olmayan dual burulma fonksiyonudur. Bir dual eğriliğin her bir noktasında

$\left\{\overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{N}}\right\}$, $\left\{\overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}}\right\}$ ve $\left\{\overrightarrow{\widehat{N}}, \overrightarrow{\widehat{B}}\right\}$ tarafından gerilen dual düzlemlere sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem denir.

Bir $\widehat{\alpha}$ dual eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde ise eğriye **rektifiyan dual eğri** denir. $\widehat{\alpha}$ bir rektifiyan dual eğri ise yer vektörü, $\widehat{\lambda}$ ve $\widehat{\mu}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} = \widehat{\lambda}(s)\,\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\mu}(s)\,\overrightarrow{\widehat{B}}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

5.1. $\mathbb{D}^3$ de Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Teorem 5.1.1. $\widehat{\alpha} : I \to \mathbb{D}^3$ birim hızlı ve dual eğriliği pozitif olan $\mathbb{D}^3$ dual uzayında bir dual rektifiyan eğri olsun. O halde aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\widehat{\rho} = \left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}\right\|$ dual uzaklık fonksiyonu bazı $\widehat{c}_1$ ve $\widehat{c}_2$ dual sabitleri için

$$\widehat{\rho}^2 = \widehat{s}^2 + \widehat{c}_1\widehat{s} + \widehat{c}_2$$

eşitliğini sağlar.

ii) Dual eğrinin yer vektörünün teğet bileşeni bazı $\widehat{b}$ dual sabit sayısı için

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle = \widehat{s} + \widehat{b}$$

dir.

iii) Dual eğrinin yer vektörünün $\widehat{\alpha}^N$ normal bileşeni dual sabit uzunlukludur ve $\widehat{\rho}$ dual uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonu sıfırdan farklı, sırf dual değildir ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni dual sabittir. Yani

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = \text{dual sabit}$$

olur.

Karşıt olarak dual eğriliği pozitif olan bir $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ eğrisi (i), (ii), (iii), (iv) önermelerinden birini sağlıyor ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir dual rektifiyan eğridir.

İspat $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$, $\mathbb{D}^3$ de birim hızlı bir dual eğri ve $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual eğrisinin yay uzunluğu parametresi $\widehat{s}$ olsun. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ nın bir dual rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir dual rektifiyan eğri olduğundan $\widehat{\lambda}(s), \widehat{\mu}(s)$ dual fonksiyonları için

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} = \widehat{\lambda}(s)\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\mu}(s)\overrightarrow{\widehat{B}}(s) \tag{5.1.1}$$

olarak yazılabilir. (5.1.1) eşitliğinin türevini alıp Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widehat{\alpha}}'(s) &= \widehat{\lambda}'(s)\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\lambda}(s)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}' + \widehat{\mu}'(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)} + \widehat{\mu}(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)}' \\
\overrightarrow{\widehat{T}(s)} &= \widehat{\lambda}'(s)\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s)\overrightarrow{\widehat{N}(s)} + \widehat{\mu}'(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)} + \widehat{\mu}(s)\left(-\widehat{\tau}(s)\overrightarrow{\widehat{N}(s)}\right) \\
\overrightarrow{\widehat{T}(s)} &= \widehat{\lambda}'(s)\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \left[\widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s) - \widehat{\mu}(s)\widehat{\tau}(s)\right]\overrightarrow{\widehat{N}(s)} + \widehat{\mu}'(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$0 = \left[\widehat{\lambda}'(s) - 1\right]\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \left[\widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s) - \widehat{\mu}(s)\widehat{\tau}(s)\right]\overrightarrow{\widehat{N}(s)} + \widehat{\mu}'(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)}$$

elde edilir. $\left\{\overrightarrow{\widehat{T}(s)},\ \overrightarrow{\widehat{N}(s)},\ \overrightarrow{\widehat{B}(s)}\right\}$ dual Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre

$$\widehat{\lambda}'(s) = (1,0) = 1 + \varepsilon 0 = 1, \qquad \widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s) = \widehat{\mu}(s)\widehat{\tau}(s), \qquad \widehat{\mu}'(s) = 0 \tag{5.1.2}$$

elde edilir. İlk eşitlikte $\widehat{\lambda}'(s) = 1$ olduğundan $\widehat{b}$ bir dual sabit sayı olmak üzere

$$\widehat{\lambda}(s) = \widehat{s} + \widehat{b}$$

dir. (5.1.2) eşitliğinden $\widehat{\mu}'(s) = 0$ olduğundan $\widehat{\mu}$ sabit bir dual fonksiyondur. $\widehat{\lambda}\widehat{\kappa} = \widehat{\mu}\widehat{\tau}$ eşitliğine göre $\widehat{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\widehat{\mu}$ dual sabiti de sıfırdan farklıdır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \widehat{\mu}\left\langle \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda} \\
&= \widehat{s} + \widehat{b}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) ispatlanmış oldu. $\widehat{\mu}=\widehat{\ell}$ sıfırdan farklı dual sabit olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}}, \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}^2\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + 2\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \widehat{\mu}^2\left\langle \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}^2+\widehat{\mu}^2 \\
&= \widehat{\lambda}^2+\widehat{\ell}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $\widehat{\rho}$ dual uzaklık fonksiyonu $2\widehat{b}=\widehat{c}_1$, $\widehat{b}^2+\widehat{\ell}^2=\widehat{c}_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}^2 &= \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\|^2 \\
&= \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}^2+\widehat{\mu}^2 \\
&= \left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)^2+\widehat{\ell}^2 \\
&= \widehat{s}^2+2\widehat{s}\widehat{b}+\widehat{b}^2+\widehat{\ell}^2 \\
&= \widehat{s}^2+\widehat{c}_1\widehat{s}+\widehat{c}_2
\end{aligned}$$

dir. Böylece (i) ispatlandı. (5.1.1) eşitliğinden $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual eğrisinin yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N=\widehat{\mu}\widehat{B}$ dir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \widehat{\mu}\left\langle \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \widehat{\mu}
\end{aligned}$$

$\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan $\widehat{\alpha}^N$ dual sabit uzunlukludur. Böylece (iii) ispatlandı. $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle=\widehat{\mu}$ ve $\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle$ dual sabittir. $\widehat{\kappa}>0$, $\widehat{\lambda}=\widehat{s}+\widehat{b}$ ve $\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan (5.1.2) eşitliğine göre $\widehat{\tau}$ sıfırdan farklıdır. Böylece (iv) ispatlanır. Karşıt olarak (i) veya (ii) önermelerinden biri sağlansın. O halde $\widehat{b}$ bir dual sabit sayı olmak üzere $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle=\widehat{s}+\widehat{b}$ dir. Bu eşitliğin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}}' \right\rangle &= 1 \\
\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle &= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\widehat{\kappa}\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$$

ve $\widehat{\kappa} > 0$ olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$$

bulunur. Öyleyse eğri dual rektifiyan eğridir.

Eğer (iii) ün sağlandığını kabul edersek, eğrinin yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N$ dual sabit uzunlukludur ve dual uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}$ dual sabit değildir. $\widehat{\lambda} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N, \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N \right\rangle \\ &= \widehat{\lambda}^2 \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}} \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + 2\widehat{\lambda}\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \widehat{\alpha}^N \right\rangle + \left\langle \widehat{\alpha}^N, \widehat{\alpha}^N \right\rangle \\ &= \widehat{\lambda}^2 + \widehat{c} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\ &= \widehat{\lambda}\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \widehat{\alpha}^N, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\ &= \widehat{\lambda} \end{aligned}$$

değerini (5.1.5) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle^2 + \widehat{c}$$

elde edilir. Burada $\widehat{c}$ dual sabittir ve $\widehat{s}$ ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}}' \right\rangle &= 2\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}}' \right\rangle \right] \\ \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= 2\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \right] \\ 2\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= 2\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[1 + \widehat{\kappa}\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \right] \end{aligned}$$

bulunur. Dual uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}$ dual sabit olmadığından $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \neq 0$ dır. $\widehat{\kappa} > 0$ olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$ olmalıdır. Öyleyse $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir dual rektifiyan eğridir.

(iv) ün sağlandığını kabul edelim. Yani $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle$ dual sabit olsun.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle' &= \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}}' \right\rangle \\
0 &= \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, -\widehat{\tau}\overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \\
0 &= -\widehat{\tau} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle
\end{aligned}$$

ve $\widehat{\tau}$ sıfırdan farklı olduğundan $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$ olur. Buna göre $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual rektifiyan eğridir.●

Teorem 5.1.2. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan bir dual eğri olsun. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ nın bir dual rektifiyan eğriye denk olabilmesi için gerek ve yeter şart $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ dual sabit sayıları için

$$\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \widehat{c}_1 \widehat{s} + \widehat{c}_2$$

olmasıdır. Burada $\widehat{c}_1 = c_1 + \varepsilon c_1^*$, $\widehat{c}_2 = c_2 + \varepsilon c_2^* \in \mathbb{D}$ ve $c_1 \neq 0$ dır.

İspat $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan birim hızlı dual eğri olsun. Eğer $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual rektifiyan eğri ise (5.1.3) eşitliğinden

$$\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\mu}} = \frac{\widehat{s} + \widehat{b}}{\widehat{a}} \qquad (\widehat{a} \text{ ve } \widehat{b} \text{ dual sabit})$$

dir. Böylelikle dual eğrinin burulmasının eğriliğine oranı sabit olmayan dual lineer fonksiyondur.

Karşıt olarak $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan dual eğri olmak üzere c_1, $c_2 \in \mathbb{D}$ ve $c_1 \neq 0$ için $\dfrac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \widehat{c}_1 \widehat{s} + \widehat{c}_2$ olsun. $\widehat{c}_1 = \dfrac{1}{\widehat{a}}$ ve $\widehat{c}_2 = \dfrac{\widehat{b}}{\widehat{a}}$ alırsak $\dfrac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \dfrac{\widehat{s} + \widehat{b}}{\widehat{a}}$ olur.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\widehat{s}} \left[\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} - \left(\widehat{s} + \widehat{b}\right) \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \widehat{a} \overrightarrow{\widehat{B}(s)} \right] &= \overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}' - \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \left(\widehat{s} + \widehat{b}\right) \overrightarrow{\widehat{T}(s)}' - \widehat{a} \overrightarrow{\widehat{B}(s)}' \\
&= \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \left(\widehat{s} + \widehat{b}\right) \widehat{\kappa} \overrightarrow{\widehat{N}(s)} - \widehat{a}\left(-\widehat{\tau}\right) \overrightarrow{\widehat{N}(s)} \\
&= -\left(\widehat{s} + \widehat{b}\right) \widehat{\kappa} \overrightarrow{\widehat{N}(s)} - \widehat{a}\left(-\widehat{\tau}\right) \overrightarrow{\widehat{N}(s)} \\
&= \left(-\widehat{s}\widehat{\kappa} - \widehat{b}\widehat{\kappa} + \widehat{a}\widehat{\tau}\right) \overrightarrow{\widehat{N}(s)}
\end{aligned}$$

dir. Burada $\widehat{a}\widehat{\tau}=\widehat{s}\widehat{\kappa}+\widehat{b}\widehat{\tau}$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\widehat{s}}\left[\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}-\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}\right]=0$$

bulunur. $\widehat{D}$ bir dual sabit sayı olmak üzere

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}-\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}=\widehat{D}$$

dir. Uygun bir öteleme ile $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}=\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}$ şeklindedir. Buna göre $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual rektifiyan eğridir.●

5.2. Dual Rektifiyan Eğrilerin Sınıflandırılması

Teorem 5.2.1. $\widehat{\alpha}:I\rightarrow\mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan bir dual eğri olsun. $\widehat{\alpha}(s)$ nın dual rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t)=(\widehat{a}\sec t)\,\widehat{\gamma}\,(t) \tag{5.2.1}$$

olmasıdır. Burada $\widehat{a}=a+\varepsilon a^*$ $(a>0)$ bir dual sayı ve $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma}\,(t)$, S^2 de birim hızlı dual eğridir.

İspat $\widehat{\alpha}:I\rightarrow\mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan birim hızlı bir dual rektifiyan eğri olsun. Teorem 5.1.1 e göre dual uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}=\left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}\right\|$ ve $\widehat{c}_1,\widehat{c}_2$ dual sabitleri için $\widehat{\rho}^2=\widehat{s}^2+\widehat{c}_1\widehat{s}+\widehat{c}_2$ dir. Uygun ötelemelerle $\widehat{\rho}^2=\widehat{s}^2+\widehat{c}$ ($\widehat{c}=c+\varepsilon c^*$, $c>0$ dual sabit) olarak yazılabilir. $\widehat{c}=c+\varepsilon c^*$, $c>0$ olduğundan $\widehat{c}=\widehat{a}^2$ olacak şekilde $\widehat{a}$ dual sayısı vardır. Şimdi S_1^2 dual birim kürede $\widehat{\gamma}=\dfrac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}}$ dual eğrisini tanımlayalım. Buna göre

$$\widehat{\alpha}\,(s)=\widehat{\rho}\,(s)\,\widehat{\gamma}\,(s)=\sqrt{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}\widehat{\gamma}\,(s) \tag{5.2.2}$$

eşitliğinin türevini alırsak

$$\widehat{\alpha}'\,(s)=\frac{\widehat{s}}{\sqrt{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}}\widehat{\gamma}\,(s)+\sqrt{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}\widehat{\gamma}'\,(s) \tag{5.2.3}$$

elde edilir. I aralığındaki herbir s için $\langle\widehat{\gamma}\,(s)\,,\widehat{\gamma}\,(s)\rangle=1$ ve $\widehat{\gamma}'\,(s)$ ile $\widehat{\gamma}\,(s)$ ortogonaldir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\left\langle\widehat{\alpha}',\widehat{\alpha}'\right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}\left\langle\widehat{\gamma},\widehat{\gamma}\right\rangle+2\widehat{s}\left\langle\widehat{\gamma},\widehat{\gamma}'\right\rangle+\left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle\\
\left\langle\widehat{T},\widehat{T}\right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}+\left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle\\
1 &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}+\left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{\widehat{a}^2}{\left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)^2} = \left\langle \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}' \right\rangle = \left\| \widehat{\gamma}' \right\|^2$$

dir. Öyleyse

$$\left\| \widehat{\gamma}' \right\| = \frac{\widehat{a}}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}$$

dir. $\widehat{\gamma}$ nin dual yay uzunluk fonksiyonu f olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\widehat{s}) &= \widehat{t} \\ &= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{u}^2+\widehat{a}^2} \\ &= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{a}^2\left(1+\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \\ &= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\frac{d\widehat{u}}{\widehat{a}}}{\left(1+\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \qquad \left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}} = \widehat{x} \text{ olursa }\right) \\ &= \int_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \frac{d\widehat{x}}{1+\widehat{x}^2} \\ &= \arctan\left(\widehat{x}\right) \Big|_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \\ &= \arctan\left(\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\widehat{s} = \widehat{a}\tan\widehat{t}$ dir. (5.2.2) eşitliğinde $\widehat{s}$ yerine $\widehat{a}\tan\widehat{t}$ yazarsak (5.2.1) eşitliğini elde ederiz.

Karşıt olarak $\widehat{\alpha} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğrisi, $\widehat{a} = a + \varepsilon a^*$ $(a > 0)$ dual sayı ve $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(s)$, S_1^2 de dual birim hızlı eğri için

$$\widehat{\alpha}(t) = \left(\widehat{a}\sec t\right)\widehat{\gamma}\left(\widehat{t}\right)$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}'(t) &= \frac{\widehat{a}\sin t}{\cos^2 t}\widehat{\gamma}(t) + \frac{\widehat{a}}{\cos t}\widehat{\gamma}'(t) \\ &= \frac{\widehat{a}}{\cos^2 t}\left[\sin t\widehat{\gamma}(t) + \cos t\widehat{\gamma}'(t)\right] \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

olur. $\widehat{\gamma}(t)$ ve $\widehat{\gamma}'(t)$ ortonormal vektörler olduğundan

$$\left\langle \widehat{\alpha}'(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 t}\left[\sin^2 t \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}(t) \right\rangle + \cos^2 t \left\langle \widehat{\gamma}'(t), \widehat{\gamma}'(t) \right\rangle\right] = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 t}$$

ve buradan

$$\left\| \widehat{\alpha}'(t) \right\|^2 = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 t} \Rightarrow \left\| \widehat{\alpha}'(t) \right\| = \frac{\widehat{a}}{\cos^2 t} = \widehat{a} \sec^2 t \tag{5.2.5}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\alpha}(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{\widehat{a}}{\cos t}\widehat{\gamma}(t), \frac{\widehat{a}}{\cos^2 t}\left[\sin t \widehat{\gamma}(t) + \cos t \widehat{\gamma}'(t)\right] \right\rangle \\
&= \frac{\widehat{a}^2 \sin t}{\cos^3 t} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}(t) \right\rangle + \widehat{a} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}'(t) \right\rangle \\
&= \frac{\widehat{a}^2 \sin t}{\cos^3 t} \qquad (5.2.6)
\end{aligned}$$

dir. $(5.2.4)$, $(5.2.5)$ ve $(5.2.6)$ eşitliklerinden

$$\left\langle \widehat{\alpha}^N, \widehat{\alpha}^N \right\rangle = \widehat{\rho}^2(t) - \frac{\left\langle \widehat{\alpha}(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle^2}{\left| \widehat{\alpha}'(t) \right|^2} = \widehat{a}^2$$

dir. Bu ise yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N$ nin dual sabit uzunluklu ve $\widehat{\rho}$ dual uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho} = \widehat{a} \sec t$ nin dual sabit olmadığını gösterir. Teorem 5.1.1 den $\widehat{\alpha}$ dual rektifiyan eğridir.●

6. DUAL LORENTZ UZAYINDA REKTİFİYAN EĞRİLER

Bu bölümde referansımız Özbey ve Oral (2009) olacaktır.

$\mathbb{D}^3 = \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ kümesi

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^3 &= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = (\alpha_1 + \varepsilon\alpha_1^*, \alpha_2 + \varepsilon\alpha_2^*, \alpha_3 + \varepsilon\alpha_3^*)\} \\ &= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + \varepsilon(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*)\} \\ &= \{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : \overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}\ ,\ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{R}^3\}\end{aligned}$$

$\mathbb{D}$ halkası üzerinde bir modüldür. Herhangi bir $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}$, $\overrightarrow{\widehat{\gamma}} = \overrightarrow{\gamma} + \varepsilon\overrightarrow{\gamma^*} \in \mathbb{D}^3$ elemanları için Lorentz metriği

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\gamma}} \right\rangle = \langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma} \rangle + \varepsilon\left(\left\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\gamma^*} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\alpha^*}, \overrightarrow{\gamma} \right\rangle\right)$$

ile tanımlanır. Lorentz metriği ile birlikte $\mathbb{D}^3$ dual uzayı **dual Lorentz uzayı** olarak adlandırılır ve $\mathbb{D}_1^3$ şeklinde gösterilir. $\overrightarrow{\alpha}$ vektörü uzaysı, zamansı ve ışıksı ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} \in \mathbb{D}_1^3$ dual vektörüne uzaysı, zamansı ve ışıksı denir. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = (\widehat{\alpha_1}, \widehat{\alpha_2}, \widehat{\alpha_3})$ ve $\overrightarrow{\widehat{\gamma}} = (\widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2, \widehat{\gamma}_3)$ dual vektörlerin Lorentz vektörel çarpımı

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}} \wedge \overrightarrow{\widehat{\gamma}} = (-\widehat{\alpha}_2\widehat{\gamma}_3 + \widehat{\alpha}_3\widehat{\gamma}_2, \widehat{\alpha}_3\widehat{\gamma}_1 - \widehat{\alpha}_1\widehat{\gamma}_3, \widehat{\alpha}_1\widehat{\gamma}_2 - \widehat{\alpha}_2\widehat{\gamma}_1)$$

ile tanımlanır. $\overrightarrow{\alpha} \neq 0$ olmak üzere $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*}$ dual vektörünün normu

$$\left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}}\right\| = \sqrt{\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle} = \|\overrightarrow{\alpha}\| + \varepsilon\frac{\left\langle \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha^*} \right\rangle}{\|\overrightarrow{\alpha}\|}$$

şeklinde tanımlanır. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual vektörünün normu 1 ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual vektörüne **birim dual vektör** denir.

$i)$ $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere

$$S_1^2 = \left\{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} :\ \left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}}\right\| = (1,0);\ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \alpha \text{ vektörü uzaysı}\right\}$$

cümlesine $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{0}$ merkezli **pseudo dual küre** denir.

$i)$ $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere

$$H_0^2 = \left\{\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \overrightarrow{\alpha} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*} :\ \left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}}\right\| = (1,0);\ \overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\alpha^*} \in \mathbb{R}_1^3 \text{ ve } \alpha \text{ vektörü zamansı}\right\}$$

kümesine $\mathbb{D}_1^3$ de $\widehat{0}$ merkezli **pseudo dual hiperbolik uzay** denir.

Her $\alpha_i(t)$ ve $\alpha_i^*(t)$, $1 \leq i \leq 3$, türevlenebilir reel değerli fonksiyonlar olmak üzere, dual Lorentz eğrisi

$$\begin{array}{rcl} \widehat{\alpha} : I \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{D}_1^3 \\ t & \rightarrow & \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)} = (\alpha_1(t) + \varepsilon\alpha_1^*(t), \alpha_2(t) + \varepsilon\alpha_2^*(t), \alpha_3(t) + \varepsilon\alpha_3^*(t)) \\ & & \phantom{\overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}} = \overrightarrow{\alpha(t)} + \varepsilon\overrightarrow{\alpha^*(t)} \end{array}$$

$\mathbb{D}_1^3$ de türevlenebilir. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}$ eğrisinin dual yay uzunluğu t_1 den t ye aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\widehat{s} = \int_{t_1}^{t} \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}' \right\| dt = \int_{t_1}^{t} \left\| \overrightarrow{\alpha(t)}' \right\| dt + \varepsilon \int_{t_1}^{t} \left\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{\alpha^*(t)}' \right\rangle dt = s + \varepsilon s^*$$

Burada $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{\alpha(t)}$ eğrisinin birim teğet vektörüdür. Bundan sonra t paramatresi yerine $\overrightarrow{\alpha(t)}$ nin yay uzunluk parametresi olan s yi alacağız.

Tanım 6.1.Bir dual Lorentz eğrisinin $\widehat{\kappa} = \kappa + \varepsilon\kappa^*$ eğriliği ve $\widehat{\tau} = \tau + \varepsilon\tau^*$ burulması sırf dual olmasın. $\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle = \varepsilon_0$, $\left\langle \overrightarrow{\widehat{N}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = \varepsilon_1$, $\left\langle \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = \varepsilon_2$, $\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{\widehat{N}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = 0$ olmak üzere dual Frenet formüllerinin matris formu

$$\frac{d}{d\widehat{s}} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widehat{T}} \\ \overrightarrow{\widehat{N}} \\ \overrightarrow{\widehat{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{\kappa} & 0 \\ -\varepsilon_0\varepsilon_1\widehat{\kappa} & 0 & \widehat{\tau} \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{\widehat{T}} \\ \overrightarrow{\widehat{N}} \\ \overrightarrow{\widehat{B}} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\left\{ \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\}$, $\left\{ \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\}$ ve $\left\{ \overrightarrow{\widehat{N}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\}$ vektör alanları tarafından gerilen düzlemlere sırasıyla oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem ve normal düzlem denir.

Bir $\widehat{\alpha}$ dual Lorentz eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde ise eğriye **rektifiyan dual Lorentz eğrisi** denir. $\widehat{\alpha}$ bir rektifiyan dual Lorentz eğrisi ise yer vektörü, $\widehat{\lambda}$ ve $\widehat{\mu}$ dual fonksiyonlar olmak üzere

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} = \widehat{\lambda}(s)\,\overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\mu}(s)\,\overrightarrow{\widehat{B}}(s)$$

şeklinde yazılabilir.

6.1. $\mathbb{D}_1^3$ de Rektifiyan Eğrilerin Bazı Karakterizasyonları

Teorem 6.1.1. $\widehat{\alpha} : I \to \mathbb{D}_1^3$ birim hızlı ve dual eğriliği pozitif olan bir dual zamansı veya dual uzaysı rektifiyan eğri olsun. O halde aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\widehat{\rho} = \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} \right\|$ dual uzaklık fonksiyonu bazı $\widehat{c}_1$ ve $\widehat{c}_2$ dual sabitleri için

$$\widehat{\rho}^2 = \left| \varepsilon_0 \widehat{s}^2 + \widehat{c}_1 \widehat{s} + \widehat{c}_2 \right|$$

eşitliğini sağlar.

ii) Dual Lorentz eğrisinin yer vektörünün teğet bileşeni bazı $\widehat{b}$ dual sabit sayısı için

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle = \varepsilon_0 \widehat{s} + \widehat{b}$$

dir.

iii) Dual Lorentz eğrisinin yer vektörünün $\widehat{\alpha}^N$ normal bileşeni dual sabit uzunlukludur ve $\widehat{\rho}$ dual Lorentz uzaklık fonksiyonu sabit değildir.

iv) $\widehat{\tau}$ dual burulma fonksiyonu sıfırdan farklı, sırf dual değildir ve eğrinin yer vektörünün binormal bileşeni dual sabittir. Yani

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = \text{dual sabit}$$

olur.

Karşıt olarak dual eğriliği pozitif olan bir $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğrisi (i), (ii), (iii), (iv) önermelerinden birini sağlıyor ise $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir rektifiyan dual Lorentz eğrisidir.

İspat $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$, $\mathbb{D}_1^3$ de birim hızlı bir dual Lorentz eğri ve $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual Lorentz eğrisinin yay uzunluğu parametresi $\widehat{s}$ olsun. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ nın ışıksı olmayan bir dual Lorentz rektifiyan eğri olduğunu kabul edelim. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir dual Lorentz rektifiyan eğri olduğundan $\widehat{\lambda}(s), \widehat{\mu}(s)$ dual fonksiyonları için

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} = \widehat{\lambda}(s) \overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\mu}(s) \overrightarrow{\widehat{B}}(s) \qquad (6.1.1)$$

olarak yazılabilir. (6.1.1) eşitliğinin türevini alıp Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\widehat{\alpha}}'(s) &= \widehat{\lambda}'(s) \overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\lambda}(s) \overrightarrow{\widehat{T}(s)}' + \widehat{\mu}'(s) \overrightarrow{\widehat{B}(s)} + \widehat{\mu}(s) \overrightarrow{\widehat{B}(s)}' \\
\overrightarrow{\widehat{T}(s)} &= \widehat{\lambda}'(s) \overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \widehat{\lambda}(s) \widehat{\kappa}(s) \overrightarrow{\widehat{N}(s)} + \widehat{\mu}'(s) \overrightarrow{\widehat{B}(s)} + \widehat{\mu}(s) \left(-\varepsilon_1 \varepsilon_2 \widehat{\tau}(s) \overrightarrow{\widehat{N}(s)} \right) \\
\overrightarrow{\widehat{T}(s)} &= \widehat{\lambda}'(s) \overrightarrow{\widehat{T}(s)} + \left[\widehat{\lambda}(s) \widehat{\kappa}(s) - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \widehat{\mu}(s) \widehat{\tau}(s) \right] \overrightarrow{\widehat{N}(s)} + \widehat{\mu}'(s) \overrightarrow{\widehat{B}(s)}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$0=\left[\widehat{\lambda}'(s)-1\right]\overrightarrow{\widehat{T}(s)}+\left[\widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s)-\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\mu}(s)\widehat{\tau}(s)\right]\overrightarrow{\widehat{N}(s)}+\widehat{\mu}'(s)\overrightarrow{\widehat{B}(s)}$$

elde edilir. $\left\{\overrightarrow{\widehat{T}(s)},\ \overrightarrow{\widehat{N}(s)},\ \overrightarrow{\widehat{B}(s)}\right\}$ dual Frenet çatısı lineer bağımsız olduğundan katsayılar sıfıra eşit olmalıdır. Buna göre

$$\widehat{\lambda}'(s)=(1,0)=1+\varepsilon 0=1,\qquad \widehat{\lambda}(s)\widehat{\kappa}(s)=\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\mu}(s)\widehat{\tau}(s),\qquad \widehat{\mu}'(s)=0 \tag{6.1.2}$$

elde edilir. İlk eşitlikte $\widehat{\lambda}'(s)=1$ olduğundan $\widehat{b}$ bir dual sabit sayı olmak üzere

$$\widehat{\lambda}(s)=\widehat{s}+\widehat{b}$$

dir. Üçüncü eşitlikte $\widehat{\mu}'(s)=0$ olduğundan $\widehat{\mu}$ sabit bir dual fonksiyondur. $\widehat{\lambda}\widehat{\kappa}=\widehat{\mu}\widehat{\tau}$ eşitliğine göre $\widehat{\kappa}\neq 0$ olduğundan $\widehat{\mu}$ dual sabiti de sıfırdan farklıdır. Öyleyse

$$\begin{aligned}\left\langle\overrightarrow{\widehat{\alpha}},\overrightarrow{\widehat{T}}\right\rangle &= \left\langle\widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}},\overrightarrow{\widehat{T}}\right\rangle\\ &= \widehat{\lambda}\left\langle\overrightarrow{\widehat{T}},\overrightarrow{\widehat{T}}\right\rangle+\widehat{\mu}\left\langle\overrightarrow{\widehat{B}},\overrightarrow{\widehat{T}}\right\rangle\\ &= \varepsilon_0\widehat{\lambda}\\ &= \varepsilon_0\widehat{s}+\widehat{b}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (ii) ispatlanmış oldu. $\widehat{\mu}=\widehat{\ell}$ sıfırdan farklı dual sabit olduğundan

$$\begin{aligned}\left\langle\overrightarrow{\widehat{\alpha}},\overrightarrow{\widehat{\alpha}}\right\rangle &= \left\langle\widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}},\widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}}+\widehat{\mu}\overrightarrow{\widehat{B}}\right\rangle\\ &= \widehat{\lambda}^2\left\langle\overrightarrow{\widehat{T}},\overrightarrow{\widehat{T}}\right\rangle+2\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left\langle\overrightarrow{\widehat{T}},\overrightarrow{\widehat{B}}\right\rangle+\widehat{\mu}^2\left\langle\overrightarrow{\widehat{B}},\overrightarrow{\widehat{B}}\right\rangle\\ &= \varepsilon_0\widehat{\lambda}^2+\varepsilon_2\widehat{\mu}^2\\ &= \widehat{\lambda}^2+\widehat{\ell}^2\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $\widehat{\rho}$ dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $2\varepsilon_0\widehat{b}=\widehat{c}_1$, $\varepsilon_0\widehat{b}^2+\widehat{\ell}^2=\widehat{c}_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}^2 &= \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\|^2 \\
&= \left| \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle \right| \\
&= \left| \varepsilon_0 \widehat{\lambda}^2 + \widehat{\mu}^2 \right| \\
&= \left| \varepsilon_0 \left(\widehat{s} + \widehat{b} \right)^2 + \widehat{l}^2 \right| \\
&= \left| \varepsilon_0 \widehat{s}^2 + 2\varepsilon_0 \widehat{s}\widehat{b} + \varepsilon_0 \widehat{b}^2 + \widehat{l}^2 \right| \\
&= \left| \varepsilon_0 \widehat{s}^2 + \widehat{c}_1 \widehat{s} + \widehat{c}_2 \right|
\end{aligned}$$

dir. Böylece (i) ispatlandı. (6.1.1) eşitliğinden $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual eğrisinin yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N = \widehat{\mu}\widehat{B}$ dir.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda} \overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\mu} \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda} \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \widehat{\mu} \left\langle \overrightarrow{\widehat{B}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle \\
&= \varepsilon_2 \widehat{\mu}
\end{aligned}$$

$\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan $\widehat{\alpha}^N$ dual sabit uzunlukludur. Böylece (iii) ispatlandı. $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle = \widehat{\mu}$ ve $\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle$ dual sabittir. $\widehat{\kappa} > 0$, $\widehat{\lambda} = \widehat{s} + \widehat{b}$ ve $\widehat{\mu}$ dual sabit olduğundan (6.1.2) eşitliğine göre $\widehat{\tau}$ sıfırdan farklıdır. Böylece (iv) ispatlanır. Karşıt olarak (i) veya (ii) önermelerinden biri sağlansın. O halde $\widehat{b}$ bir dual sabit sayı olmak üzere $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle = \varepsilon_0 \widehat{s} + \widehat{b}$ dir. Bu eşitliğin türevini alırsak,

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}}' \right\rangle &= \varepsilon_0 \\
\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \widehat{\kappa} \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle &= \varepsilon_0 \\
\varepsilon_0 + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \widehat{\kappa} \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle &= \varepsilon_0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\widehat{\kappa} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$$

ve $\widehat{\kappa} > 0$ olduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$$

bulunur. Öyleyse dual Lorentz eğrisi rektifiyan eğridir.

Eğer (iii) ün sağlandığını kabul edersek, eğrinin yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N$ dual sabit uzunlukludur ve dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}$ dual sabit değildir. $\widehat{\lambda} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\overrightarrow{\widehat{\alpha}} = \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N, \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda}^2 \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}} \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + 2\widehat{\lambda} \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \widehat{\alpha}^N \right\rangle + \left\langle \widehat{\alpha}^N, \widehat{\alpha}^N \right\rangle \\
&= \varepsilon_0 \widehat{\lambda}^2 + \widehat{c} \qquad (6.1.3)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= \left\langle \widehat{\lambda}\overrightarrow{\widehat{T}} + \widehat{\alpha}^N, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\
&= \widehat{\lambda} \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \widehat{\alpha}^N, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \\
&= \varepsilon_0 \widehat{\lambda}
\end{aligned}$$

değerini (6.1.3) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle = \varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle^2 + \widehat{c}$$

elde edilir. Burada $\widehat{c}$ dual sabittir ve $\widehat{s}$ ye göre türev alırsak

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}}' \right\rangle &= 2\varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}}' \right\rangle \right] \\
\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= 2\varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[\left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \right] \\
2\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle &= 2\varepsilon_0 \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \left[\varepsilon_0 + \widehat{\kappa} \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}$ dual sabit olmadığından $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{T}} \right\rangle \neq 0$ dır. $\widehat{\kappa} > 0$ olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$ olmalıdır. Öyleyse $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ bir dual Lorentz rektifiyan eğridir.

(iv) ün sağlandığını kabul edelim. Yani $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle$ dual sabit olsun.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle' &= \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}', \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{B}}' \right\rangle \\
0 &= \left\langle \overrightarrow{\widehat{T}}, \overrightarrow{\widehat{B}} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, -\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau}\overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle \\
0 &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\tau \left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle
\end{aligned}$$

ve $\widehat{\tau}$ sıfırdan farklı olduğundan $\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}}, \overrightarrow{\widehat{N}} \right\rangle = 0$ olur. Buna göre $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual Lorentz eğrisi rektifiyandır.●

Teorem 6.1.2. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}_1^3$ ışıksı olmayan ve dual eğriliği pozitif olan dual Lorentz eğrisi olsun. $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ nın bir rektifiyan dual Lorentz eğriye denk olabilmesi için gerek ve yeter şart $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ dual sabit reel sayıları için

$$\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \widehat{c}_1\widehat{s} + \widehat{c}_2$$

olmasıdır. Burada $\widehat{c}_1 = c_1 + \varepsilon c_1^*$, $\widehat{c}_2 = c_2 + \varepsilon c_2^* \in \mathbb{D}$ ve $c_1 \neq 0$ dır.

İspat $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan birim hızlı dual Lorentz eğri olsun. Eğer $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual Lorentz rektifiyan eğri ise (6.1.2) eşitliğinden

$$\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\widehat{\lambda}}{\widehat{\mu}} = \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\widehat{s}+\widehat{b}}{\widehat{a}} \qquad (\widehat{a} \text{ ve } \widehat{b} \text{ dual sabit})$$

dir. Böylelikle dual Lorentz eğrisinin burulmasının eğriliğine oranı sabit olmayan dual lineer fonksiyondur.

Karşıt olarak $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}^3$ dual eğriliği pozitif olan dual eğri olmak üzere $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2 \in \mathbb{D}$ ve $c_1 \neq 0$ için $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \widehat{c}_1\widehat{s} + \widehat{c}_2$ olsun. $\widehat{c}_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\widehat{a}}$ ve $\widehat{c}_2 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{b}}{\widehat{a}}$ alırsak $\frac{\widehat{\tau}}{\widehat{\kappa}} = \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\widehat{s}+\widehat{b}}{\widehat{a}}$ olur.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\widehat{s}}\left[\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} - \left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}\right] &= \overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}' - \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}' - \widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}' \\
&= \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \overrightarrow{\widehat{T}(s)} - \left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}(s)} - \widehat{a}\left(-\widehat{\tau}\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\overrightarrow{\widehat{N}(s)} \\
&= -\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\widehat{\kappa}\overrightarrow{\widehat{N}(s)} - \widehat{a}\left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{\tau}\right)\overrightarrow{\widehat{N}(s)} \\
&= \left(-\widehat{s}\widehat{\kappa} - \widehat{b}\widehat{\kappa} + \varepsilon_1\varepsilon_2\widehat{a}\widehat{\tau}\right)\overrightarrow{\widehat{N}(s)}
\end{aligned}$$

dir. Burada $\widehat{a}\widehat{\tau}=\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\widehat{s}\widehat{\kappa}+\widehat{b}\widehat{\tau}\right)$ yerine yazılırsa

$$\frac{d}{d\widehat{s}}\left[\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}-\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}\right]=0$$

bulunur. $\widehat{D}$ bir dual sabit sayı olmak üzere $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}-\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}=\widehat{D}$ dir. Uygun bir öteleme ile $\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}=\left(\widehat{s}+\widehat{b}\right)\overrightarrow{\widehat{T}(s)}-\widehat{a}\overrightarrow{\widehat{B}(s)}$ şeklindedir. Buna göre $\overrightarrow{\widehat{\alpha}}$ dual Lorentz rektifiyan eğridir.•

6.2. Dual Lorentz Eğrilerin Rektifiyan Sınıflandırılması

Teorem 6.2.1. $\widehat{\alpha}:I\rightarrow\mathbb{D}_1^3$ dual eğriliği pozitif bir ışıksı olmayan dual Lorentz eğrisi olsun.

i) $\widehat{\alpha}$, uzaysı rektifiyan düzlemde yatan bir rektifiyan dual Lorentz eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t)=\left(\widehat{a}\sec\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}(t)$$

olmasıdır. Burada $\widehat{a}=a+\varepsilon a^*$ $(a>0)$ bir dual sayı ve $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma}(t)$, S_1^2 pseudo dual küre içinde birim hızlı uzaysı dual eğridir.

ii) a) $\widehat{\alpha}$, yer vektörü uzaysı olan ve zamansı rektifiyan düzlemde yatan bir uzaysı rektifiyan dual Lorentz eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t)=\left(\widehat{a}\cos ech\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}(t)$$

olmasıdır. Burada $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma}(t)$, S_1^2 pseudo dual küre içinde birim hızlı zamansı dual eğridir.

b) $\widehat{\alpha}$, yer vektörü zamansı olan ve zamansı rektifiyan düzlemde yatan bir zamansı rektifiyan dual Lorentz eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t)=\left(\widehat{a}\cos ech\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}(t)$$

olmasıdır. Burada $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma}(t)$, H_0^2 pseudo dual hiperbolik uzayı içinde yatan birim hızlı uzaysı dual eğridir.

iii) *a)* $\widehat{\alpha}$, yer vektörü zamansı olan ve zamansı rektifiyan düzlemde yatan bir uzaysı rektifiyan dual Lorentz eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t) = \left(\widehat{a}\sec\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}(t)$$

olmasıdır. Burada $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(t)$, H_0^2 pseudo dual hiperbolik uzayında birim hızlı uzaysı dual eğridir.

b) $\widehat{\alpha}$, yer vektörü uzaysı olan ve zamansı rektifiyan düzlemde yatan bir zamansı rektifiyan dual Lorentz eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\widehat{\alpha}(t) = \left(\widehat{a}\sec\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}(t)$$

olmasıdır. Burada $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(t)$, S_1^2 pseudo dual küre içinde birim hızlı zamansı dual eğridir.

İspat $\overrightarrow{\widehat{\alpha}} : I \to \mathbb{D}_1^3$ de yer vektörü uzaysı rektifiyan düzlemde yatan dual birim hızlı ışıksı olmayan dual Lorentz rektifiyan eğri olsun. Yer vektörü uzaysı rektifiyan düzlemde bulunduğundan

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)} \right\rangle > 0 \text{ ve } \left\langle \widehat{T}, \widehat{T} \right\rangle = \left\langle \widehat{B}, \widehat{B} \right\rangle = 1$$

dır. Teorem 6.1.1 e göre dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho} = \left\| \overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)} \right\|$ ve $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2$ dual sabitleri için $\widehat{\rho}^2 = \widehat{s}^2 + \widehat{c}_1\widehat{s} + \widehat{c}_2$ dir. Uygun ötelemelerle $\widehat{\rho}^2 = \widehat{s}^2 + \widehat{c}$ ($\widehat{c} = c + \varepsilon c^*$, $c > 0$ dual sabit) olarak yazılabilir. $\widehat{c} = c + \varepsilon c^*$, $c > 0$ olduğundan $\widehat{c} = \widehat{a}^2$ olacak şekilde $\widehat{a}$ dual sayısı vardır. Şimdi S_1^2 pseudo dual birim kürede $\widehat{\gamma} = \dfrac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}}$ dual Lorentz eğrisini tanımlayalım. Buna göre

$$\widehat{\alpha}(s) = \widehat{\rho}(s)\widehat{\gamma}(s) = \sqrt{\widehat{s}^2 + \widehat{a}^2}\,\widehat{\gamma}(s) \tag{6.2.1}$$

dir. Eşitliğin türevini alırsak

$$\widehat{\alpha}'(s) = \frac{\widehat{s}}{\sqrt{\widehat{s}^2 + \widehat{a}^2}}\widehat{\gamma}(s) + \sqrt{\widehat{s}^2 + \widehat{a}^2}\,\widehat{\gamma}'(s) \tag{6.2.2}$$

elde edilir. I aralığındaki herbir s için $\langle \widehat{\gamma}(s), \widehat{\gamma}(s) \rangle = 1$ ve $\widehat{\gamma}'(s)$ ile $\widehat{\gamma}(s)$ ortogonaldir.

Buna göre

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\alpha}', \widehat{\alpha}' \right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}\left\langle \widehat{\gamma}, \widehat{\gamma} \right\rangle + 2\widehat{s}\left\langle \widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}' \right\rangle + \left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}' \right\rangle \\
\left\langle \widehat{T}, \widehat{T} \right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2} + \left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}' \right\rangle \\
1 &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2} + \left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)\left\langle \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}' \right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\frac{\widehat{a}^2}{\left(\widehat{s}^2+\widehat{a}^2\right)^2} = \left\langle \widehat{\gamma}', \widehat{\gamma}' \right\rangle = \left\|\widehat{\gamma}'\right\|^2$$

dir. Öyleyse

$$\left\|\widehat{\gamma}'\right\| = \frac{\widehat{a}}{\widehat{s}^2+\widehat{a}^2}$$

olur. $\widehat{\gamma}$ nin dual Lorentz yay uzunluk fonksiyonu f olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(\widehat{s}) &= \widehat{t} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{u}^2+\widehat{a}^2} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{a}^2\left(1+\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\frac{d\widehat{u}}{\widehat{a}}}{\left(1+\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \qquad \left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}} = \widehat{x} \text{ olursa }\right) \\
&= \int_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \frac{d\widehat{x}}{1+\widehat{x}^2} \\
&= \arctan\left(\widehat{x}\right)\Big|_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \\
&= \arctan\left(\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\widehat{s} = \widehat{a}\tan\widehat{t}$ dir. (6.2.1) eşitliğinde $\widehat{s}$ yerine $\widehat{a}\tan\widehat{t}$ yazarsak

$$\widehat{\alpha}(t) = \left(\widehat{a}\sec\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}\left(t\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

Karşıt olarak $\widehat{\alpha}: I \to \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz eğrisi, $\widehat{a} = a + \varepsilon a^*$ $(a > 0)$ dual sayı ve $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(s)$, S_1^2 pseudo dual küre içinde dual birim hızlı eğri için

$$\widehat{\alpha}(t) = \left(\widehat{a} \sec \widehat{t}\right) \widehat{\gamma}\left(\widehat{t}\right) \tag{6.2.3}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}'(t) &= \frac{\widehat{a} \sin \widehat{t}}{\cos^2 \widehat{t}} \widehat{\gamma}(t) + \frac{\widehat{a}}{\cos t} \widehat{\gamma}'(t) \\ &= \frac{\widehat{a}}{\cos^2 \widehat{t}} \left[\sin \widehat{t} \widehat{\gamma}(t) + \cos \widehat{t} \widehat{\gamma}'(t)\right] \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

olur. $\widehat{\gamma}(t)$ ve $\widehat{\gamma}'(t)$ ortonormal vektörler olduğundan

$$\left\langle \widehat{\alpha}'(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 \widehat{t}} \left[\sin^2 \widehat{t} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}(t) \right\rangle + \cos^2 \widehat{t} \left\langle \widehat{\gamma}'(t), \widehat{\gamma}'(t) \right\rangle\right] = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 \widehat{t}}$$

ve buradan

$$\left\|\widehat{\alpha}'(t)\right\|^2 = \frac{\widehat{a}^2}{\cos^4 \widehat{t}} \Rightarrow \left\|\widehat{\alpha}'(t)\right\| = \frac{\widehat{a}}{\cos^2 \widehat{t}} = \widehat{a} \sec^2 \widehat{t} \tag{6.2.5}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \left\langle \widehat{\alpha}(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle &= \left\langle \frac{\widehat{a}}{\cos \widehat{t}} \widehat{\gamma}(t), \frac{\widehat{a}}{\cos^2 \widehat{t}} \left[\sin t \widehat{\gamma}(t) + \cos t \widehat{\gamma}'(t)\right] \right\rangle \\ &= \frac{\widehat{a}^2 \sin \widehat{t}}{\cos^3 \widehat{t}} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}(t) \right\rangle + \widehat{a} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}'(t) \right\rangle \\ &= \frac{\widehat{a}^2 \sin \widehat{t}}{\cos^3 \widehat{t}} \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

dir. $(6.2.4)$, $(6.2.5)$ ve $(6.2.6)$ eşitliklerinden

$$\left\langle \widehat{\alpha}^N, \widehat{\alpha}^N \right\rangle = \widehat{\rho}^2(t) - \frac{\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)'} \right\rangle^2}{\left|\overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)'}\right|^2} = \widehat{a}^2$$

elde edilir. Bu ise yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N$ nin dual sabit uzunluklu ve $\widehat{\rho}$ dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho} = \widehat{a} \sec \widehat{t}$ nin dual sabit olmadığını gösterir. Teorem 6.1.1 den $\widehat{\alpha}$ dual Lorentz rektifiyan eğridir.

ii) Kabul edelim ki $\widehat{\alpha}$, yer vektörü zamansı rektifiyan düzlemde yatan uzaysı rektifiyan dual Lorentz eğrisi ve yer vektörü uzaysı olsun. O halde

$$\left\langle \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)}, \overrightarrow{\widehat{\alpha}(t)} \right\rangle > 0 \text{ ve } \varepsilon_0 = \left\langle \widehat{T}, \widehat{T} \right\rangle = 1 \text{ ve } \varepsilon_2 = \left\langle \widehat{B}, \widehat{B} \right\rangle = -1$$

dır. Teorem 6.1.1 e göre dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho}=\left\|\overrightarrow{\widehat{\alpha}(s)}\right\|$ ve $\widehat{c}_1,\widehat{c}_2$ dual sabitleri için $\widehat{\rho}^2=\widehat{s}^2+\widehat{c}_1\widehat{s}+\widehat{c}_2$ dir. Uygun ötelemelerle $\widehat{\rho}^2=\widehat{s}^2-\widehat{c}$ ($\widehat{c}=c+\varepsilon c^*$, $c>0$ dual sabit) olarak yazılabilir. $\widehat{c}=c+\varepsilon c^*$, $c>0$ olduğundan $\widehat{c}=\widehat{a}^2$ olacak şekilde $\widehat{a}$ dual sayısı vardır. Şimdi S_1^2 pseudo dual birim kürede $\widehat{\gamma}=\dfrac{\widehat{\alpha}}{\widehat{\rho}}$ dual Lorentz eğrisini tanımlayalım. Buna göre

$$\widehat{\alpha}(s)=\widehat{\rho}(s)\,\widehat{\gamma}(s)=\sqrt{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}\,\widehat{\gamma}(s) \tag{6.2.6}$$

dır. Eşitliğin türevini alırsak

$$\widehat{\alpha}'(s)=\frac{\widehat{s}}{\sqrt{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}}\widehat{\gamma}(s)+\sqrt{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}\,\widehat{\gamma}'(s) \tag{6.2.7}$$

elde edilir. I aralığındaki herbir s için $\langle\widehat{\gamma}(s),\widehat{\gamma}(s)\rangle=1$ ve $\widehat{\gamma}'(s)$ ile $\widehat{\gamma}(s)$ ortogonaldir. Buna göre

$$\begin{aligned}
\left\langle\widehat{\alpha}',\widehat{\alpha}'\right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}\langle\widehat{\gamma},\widehat{\gamma}\rangle+2\widehat{s}\left\langle\widehat{\gamma},\widehat{\gamma}'\right\rangle+\left(\widehat{s}^2-\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle\\
\left\langle\widehat{T},\widehat{T}\right\rangle &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}+\left(\widehat{s}^2-\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle\\
1 &= \frac{\widehat{s}^2}{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}+\left(\widehat{s}^2-\widehat{a}^2\right)\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle
\end{aligned}$$

olduğundan

$$-\frac{\widehat{a}^2}{\left(\widehat{s}^2-\widehat{a}^2\right)^2}=\left\langle\widehat{\gamma}',\widehat{\gamma}'\right\rangle=\left\|\widehat{\gamma}'\right\|^2$$

dir. Öyleyse $\widehat{\gamma}$ zamansı dual eğrisi

$$\left\|\widehat{\gamma}'\right\|=\frac{\widehat{a}}{\widehat{s}^2-\widehat{a}^2}$$

olur. $\widehat{\gamma}$ nin dual Lorentz yay uzunluk fonksiyonu f olmak üzere

$$\begin{aligned}
f(\widehat{s}) &= \widehat{t} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{u}^2-\widehat{a}^2} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\widehat{a}d\widehat{u}}{\widehat{a}^2\left(1-\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \\
&= \int_0^{\widehat{s}} \frac{\frac{d\widehat{u}}{\widehat{a}}}{\left(1-\left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}\right)^2\right)} \qquad \left(\frac{\widehat{u}}{\widehat{a}}=\widehat{x} \text{ olursa }\right) \\
&= \int_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \frac{-d\widehat{x}}{1+\widehat{x}^2} \\
&= -\operatorname{arccot} h\left(\widehat{x}\right)\Big|_0^{\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}} \\
&= \operatorname{arccot} h\left(\frac{\widehat{s}}{\widehat{a}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $\widehat{s}=-\widehat{a}\coth\widehat{t}$ ifadesi (6.2.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\widehat{\alpha}(t)=\left(\widehat{a}\cos echt\right)\widehat{\gamma}\left(t\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

Karşıt olarak $\widehat{\alpha}: I \to \mathbb{D}_1^3$ dual Lorentz eğrisi, $\widehat{\gamma}=\widehat{\gamma}\left(s\right)$, S_1^2 pseudo dual küre içinde dual birim hızlı eğri için

$$\widehat{\alpha}\left(t\right)=\left(\widehat{a}\cos ech\widehat{t}\right)\widehat{\gamma}\left(t\right) \tag{6.2.8}$$

olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\widehat{\alpha}'\left(t\right) &= -\frac{\widehat{a}\cosh\widehat{t}}{\sinh^2\widehat{t}}\widehat{\gamma}\left(t\right)+\frac{\widehat{a}}{\sinh\widehat{t}}\widehat{\gamma}'\left(t\right) \\
&= \frac{\widehat{a}}{\sinh^2\widehat{t}}\left[-\cosh\widehat{t}\widehat{\gamma}\left(t\right)+\sinh\widehat{t}\widehat{\gamma}'\left(t\right)\right] \qquad (6.2.9)
\end{aligned}$$

olur. $\widehat{\gamma}(t)$ ve $\widehat{\gamma}'(t)$ ortonormal vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\langle \widehat{\alpha}'(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle &= \frac{\widehat{a}^2}{\sinh^4 \widehat{t}} \left[\sinh^2 \widehat{t} \left\langle \widehat{\gamma}(t), \widehat{\gamma}(t) \right\rangle - \cosh^2 \widehat{t} \left\langle \widehat{\gamma}'(t), \widehat{\gamma}'(t) \right\rangle \right] \\
&= \frac{\widehat{a}^2}{\sinh^4 \widehat{t}} \left(\sinh^2 t - \cosh^2 t \right) \\
&= \frac{\widehat{a}^2}{\sinh^4 \widehat{t}} \\
\left\| \widehat{\alpha}'(t) \right\|^2 &= \frac{\widehat{a}^2}{\sinh^4 \widehat{t}} \Rightarrow \left\| \widehat{\alpha}'(t) \right\| = \frac{\widehat{a}}{\sinh^2 \widehat{t}} \qquad (6.2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. $(6.2.8)$, $(6.2.9)$ ve $(6.2.10)$ eşitliklerinden

$$\left\langle \widehat{\alpha}^N, \widehat{\alpha}^N \right\rangle = \widehat{\rho}^2(t) - \frac{\left\langle \widehat{\alpha}(t), \widehat{\alpha}'(t) \right\rangle^2}{\left| \widehat{\alpha}'(t) \right|^2} = -\widehat{a}^2$$

elde edilir. Bu ise yer vektörünün normal bileşeni $\widehat{\alpha}^N$ nin dual sabit uzunluklu ve $\widehat{\rho}$ dual Lorentz uzaklık fonksiyonu $\widehat{\rho} = \widehat{a} \cos ec\widehat{ht}$ nin dual sabit olmadığını gösterir. Teorem 6.1.1 den $\widehat{\alpha}$ dual Lorentz rektifiyan eğridir.

iii) İspat *i* ve *ii* durumlarındaki gibi benzer biçimde yapılır.●

KAYNAKLAR

Chen, B. Y. (2003). When does the position vektör of the space curve always lie in its rectifying plane? *Amer. Math. Monthly,* **110:** 147-152.

Güngör İ. (2007). 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Normal Eğrilerin Karakterizasyonları. Yüksek Lisans Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Afyonkarahisar.

Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri Cilt I. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri Cilt II. Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları.

Ilarslan, K. Neŝović, E. ve Petrović-Torgaŝev, M. (2003). Some characterizations of rectifying curves in the Minkowski 3-space. *Novi Sad J. Math.*, **33:** 23-32.

Lopez R. (2008). Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, Mini-Course taught at the Instituto de Matematica e Estatistica (IME-USP), University of Sao Paulo, Brasil.

O Neill B. (1983). Semi Riemannian Geometry with Applications ro Relativity, A.Press, London.

Özbey, E. ve Oral, M. (2009). A study on rectifiying curves in the dual Lorentzian space. *Bull. Korean Math. Soc.,***46:** 967-978.

Sabuncuoğlu, A. (2006). Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınları.

Yücesan, A., Ayyıldız, N. ve Çöken, A. C. (2007). On rectifying dual space curves. *Rev. Mat. Complut*, **20:** 497-506.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Mehmet BOZKIR

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 21.07.1977

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyon Anadolu Öğretmen lisesi, 1995.

Lisans : Konya Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü, 2000.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesi, 2000-2002

Kastamonu İnebolu Anadolu Otelcilik ve Turizm Meslek Lisesi 2004-2005

Afyonkarahisar Anafartalar Anadolu Lisesi, 2005-2009

Afyonkarahisar Milli Piyango Anadolu Lisesi, 2009-

Yayınları (SCI ve Diğer)