KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nevin BİLGİÇLİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Yaşar BOLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2011

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

NEVİN BİLGİÇLİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Yaşar BOLAT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2011

Doç. Dr. Yaşar BOLAT danışmanlığında
Nevin BİLGİÇLİ tarafından hazırlanan
KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN
DAVRANIŞI ÜZERİNE
başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim
yönetmeliğinin ilgili maddeleri
uyarınca
………./………/2011
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği/oyçokluğu ile
kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı, SOYADI İmza

Başkan: Prof. Dr. Fatih NURAY

Üye: Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Üye: Yrd. Doç. Dr.Nurettin DOĞAN

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun

………/……../2011

…………sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mevlüt DOĞAN

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI ÜZERİNE

Yüksek Lisans Tezi

Nevin BİLGİÇLİ

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yaşar BOLAT

Bu tez çalışmasında, kesirli hesapların tarihsel gelişimine yer verilen ilk bölümün ardından ikinci bölümde, gelecek bölümlere temel oluşturacak genel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, öncelikle adi diferensiyel denklemlerden yola çıkarak kesirli diferensiyel denklemler ve çözümleri açıklanmış ve çözümler için en kullanışlı yöntemlerden biri olan Laplace dönüşümü verilmiştir. Son olarak da keyfi mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklemlerin çözümlerini açık şekilde bulmaya imkan tanıyan teoremlere yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise uygulamada önemli yeri olan ve çözümleri salınımlılık gösteren

$$AD^2x(t) + BD^{v}x(t) + Cx(t) = 0, \qquad (A, B, C \text{ keyfi sabitler}, \; v = 1/2,\ 3/2)$$

Bagley-Torvik denklemlerinden ve $0 < v < 1$ için çözümleri sönümlü salınımlı özellik gösteren kesirli diferensiyel denklemlerden bahsedilmiştir.

Bu tezin orijinal bölümü olan beşinci bölümde, Bagley-Torvik denklemlerinin daha genel hali olan

$$D^{2n}x(t) + \lambda D^{1/2}x(t) + \mu x(t) = 0, \qquad (\lambda, \mu > 0 \text{ keyfi sabitler})$$

kesirli diferensiyel denkleminin çözümlerinin salınımlılık davranışı ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

2011, 56 sayfa

Anahtar kelimeler: Kesirli hesaplar, Kesirli diferensiyel denklemler, Bagley-Torvik denklemi, Kesirli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı, salınımlılık, sönümlü salınımlılık.

ABSTRACT

ON THE BEHAVIOUR OF SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

M. Sc. Thesis

Nevin BİLGİÇLİ

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Yaşar BOLAT

After the first section which presented historical development of the fractional calculus, in the second section general information has been presented to underlie of the next section.

In the third section, firstly fractional differential equations and their solutions has been explained in light of the ordinary differential equations and Laplace transform which is one of the most useful method has been presented for the solutions. Lastly theorems that enable to find explicit solutions of the arbitrary order homogenous linear fractional differential equations with constant coefficient have been presented.

In the fourth section has been mentioned about Bagley-Torvik equations

$$AD^2x(t) + BD^v x(t) + Cx(t) = 0, \quad (A, B, C \text{ arbitrary coefficient }, v = 1/2,\ 3/2)$$

which have an important role in applications and have oscillation solutions, and also mentioned about fractional differential equations that have damped oscillation solutions for $0 < v < 1$.

In the fifth section which is the original part of this thesis have been presented some results about the more general form of the Bagley-Torvik equations

$$D^{2n}x(t) + \lambda D^{1/2}x(t) + \mu x(t) = 0, \qquad (\lambda, \mu > 0 \text{ arbitrary coefficient})$$

has oscillate solutions.

2011, 56 pages

Key Words: Fractional calculus, Fractional differential equations, Bagley-Torvik equations, behaviour of the fractional differential equations, oscillation, damping oscillation.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında katkılarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Yaşar BOLAT'a ve çalışmalarım süresince manevi desteklerini yanımda hissettiğim aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nevin BİLGİÇLİ

AFYONKARAHİSAR, Temmuz, 2011

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\sum$	Toplam Sembolü
$\prod$	Çarpım Sembolü
∞	Sonsuz
e	Euler sabiti (2,718282182845…)
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
n!	Faktoriyel (n!=1, 2….n)
$\binom{p}{k}$	p nin k lı kombinasyonu
$\int$	İntegral
D	Türev operatörü
D^{α}	Alt limiti 0 olan α. mertebeden türev operatörü
${}_{a}D^{\alpha}$	Alt limiti a olan α. mertebeden türev operatörü
$\dot{x}(t)$	x(t) fonksiyonunun 1. mertebeden türevi
$\ddot{x}(t)$	x(t) fonksiyonunun 2. mertebeden türevi
$f^{(k)}(x)$	f(x) fonksiyonunun k. mertebeden türevi
$\mathrm{Re}(z)$	z karmaşık sayısının reel kısmı
$\mathrm{Im}(z)$	z karmaşık sayısının sanal kısmı
$\mathcal{L}$	Laplace dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	Ters Laplace dönüşümü
Y(s)	y(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü
$*$	Konvülüsyon çarpımı
lim	Doğal limit fonksiyonu
ln	Doğal logaritma fonksiyonu
Sin	Sinüs fonksiyonu
Cos	Kosinüs fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Kesirli hesapların tarihi, 30 Eylül 1695'te ünlü matematikçi L'Hospital'ın diferensiyel ve türev hesabının yaratıcısı olarak bilinen Leibniz'e yazdığı mektupta 1/2. mertebeden türevin anlamını sormasıyla başlamıştır. Leibniz'in yanıtı: "Bu durum şu anda bir paradoks gibi gözükse de bir gün çok kullanışlı sonuçları ortaya çıkacak." şeklinde olmuştur. Daha sonraları keyfi mertebeden türev ve integral adlandırmasının daha doğru olacağı fark edilse de konunun ismi L'Hospital'dan günümüze kadar kesirli hesaplar olarak gelmiştir.

Euler 1738'de ilk denemeyi yaparak x^a şeklindeki bir fonksiyonun kesirli türevini Gamma fonksiyonu yardımıyla açıklamaya çalışmıştır.

1820'de Lacroix, Eulerin fikrine paralel olarak x^a şeklindeki fonksiyonların yarım (1/2. mertebeden) türevlerini bir formülle ortaya koymuştur.

1822'de Fourier tarafından ilk olarak bir fonksiyonun pozitif keyfi mertebeden türevinin tanımı;

$$\frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{\alpha}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(\lambda x - t\lambda + \alpha \frac{\pi}{2}\right) dt$$

şeklinde yapılmıştır.

1823'te Abel tarafından "Brachistochrone Problemi" olarak bilinen problem formülize edilerek

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} \frac{g(u)}{(x-u)^{1-\alpha}}\, du = f(x)\ , \qquad 0 < \alpha < 1$$

integral denklemi elde edilmiş ve çözümünün

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{0}^{x} \frac{f(u)}{(x-u)^{\alpha}}\, du$$

şeklinde olacağı gösterilmiştir.

1832'de Liouville ile birlikte kesirli hesaplarla ilgili çalışmaların sistematik olarak başladığı söylenebilir. Liouville, bu işe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, e^{a_k x}$ şeklindeki üstel fonksiyonların keyfi mertebeden türevinin

$$D^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \, {a_k}^{\alpha} e^{a_k x} \text{ , (}\alpha \text{ keyfi kompleks sayı)}$$

olduğunu göstererek başlamıştır. Daha sonra bir fonksiyonun herhangi bir mertebeden integralinin

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{(-1)^{\alpha} \, \Gamma(\alpha)} \int_{0}^{\infty} f(x+t) t^{\alpha-1} dt, \qquad -\infty < x < \infty, Re\alpha > 0$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Liouville'nin kesirli diferansiyel denklemleri çözmeye çalışan ilk kişi olduğu söylenebilir.

1847'de Riemann tarafından Liouville'nin çalışmaları geliştirilerek en temel tanım olan

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} \, dt, \qquad x > 0$$

Riemann- Liouville tanımı ortaya konulmuştur (Butzser and Westphal 2000).

Daha sonraları Sonin (1869), Letnikov (1872), Laurent (1884), Nekrasove (1888), Nishimoto (1987) gibi birçok matematikçi;

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} \, dt$$

eşitliği kullanılarak türetilmiş olan

$$D^{\alpha} f(z) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\pi i} \int_{c}^{x^{+}} \frac{f(t)}{(t-z)^{\alpha+1}} \, dt$$

Cauchy kesirli türev tanımını da kullanmıştır.

1967 yılında Caputo tarafından fiziksel uygulamalarda sıkça kullanılan

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha - \mathrm{n})}\int_{a}^{t}\frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 \leq \alpha < n)$$

kesirsel türevi ortaya konulmuştur (Dalir and Bashour 2010).

Görüldüğü gibi kesirli hesaplar 300 yılı aşkın süredir araştırılmakta olan bir konudur. Ancak karmaşık bir konu olması nedeniyle bu araştırmaların modern matematikte anlamlı ve uygun seviyeye gelmesi çok eski değildir. Konunun diğer bilim dallarına uygulanabilir olgunluğa erişip başarılı sonuçlar vermeye başlamasıyla geçtiğimiz yüzyılda önemi giderek artmıştır. Özellikle fizik ve mühendislik bilimlerindeki pek çok durumu, en iyi şekilde açıklayan denklem çeşidinin kesirli diferensiyel denklemler olduğunun anlaşılmasıyla bu denklemlerin çözümüne ve davranışlarına yönelik güvenilir, etkin ve anlaşılır metot arayışları başlamıştır. Bu ihtiyacı karşılamak üzere 1974'te Oldham ve Spainer tarafından kesirli hesapların temel tanım ve metotlarını ortaya koyan ilk kitap yazılmıştır. Ardından Miller-Ross (1993), Samko-Kilbas-Marichev (1993), Podlubny (1999) tarafından yazılan kitaplar birçok çalışmada referans gösterilmiştir.

Kesirli hesapların gelişimi 1974 yılında yapılan ilk uluslararası konferansla hız kazanmıştır. Bu konferans Bernard-Ross tarafından düzenlenmiştir ve Amerika'da New Haven Üniversitesi'nde yapılmıştır. İkincisi, 1984 yılında İskoçya'da (Glasgow), üçüncüsü ise 1989'da Japonya'da (Tokyo) yapılmıştır. Bunları 1999'da Bulgaristan'da (Varna) yapılan konferans izlemiştir (Butzer and Westphal 2000). 2004 yılından beri uluslararası Automatic Control Federasyonu (IFAC) tarafından her iki yılda bir düzenlenen "Fractional Differentiation and Applications" isimli özel bir konferans yapılmaktadır (Nataraj 2010).

Anlaşılacağı üzere bu konu üzerindeki çalışmalar hızla devam etmektedir ve konu gün geçtikçe yeni uygulama alanları bulmaktadır. Fizik ve mühendislik bilimleri başta olmak üzere genetik, tıp, biyoloji, kimya, jeoloji, ekonomi, istatistik, eczacılık, psikoloji vb. pek çok bilim dalında zengin uygulamaları vardır.

Örneğin maddelerin sönüm hareketleri, viskoelastik maddelerin sünme ve gevşeme hareketleri, ses titreşimlerinin yayılma hareketleri (akustik), kirleticilerin yeraltı sularında ve denizlerdeki yayılma hareketleri, doğal olaylardan kaynaklanan kirleticilerin doğadaki yayılma hareketleri, proteinlerin hücre zarı boyunca yayılma hareketi, biyokimyasal kayıt cihazları (EKG, EMG, EEG), ultrasonik dalgaların yayılımı, DNA dizilerinin analizi, deprem titreşim hareketleri, akışkanların hareketleri, dielektik durulma süreçleri, elektromagnetik hareketler ve kaos hareketleri kesirli hesaplar sayesinde modellenmiştir (Nataraj 2010). Hatta son zamanlarda insanların duygusal süreçlerinin açıklanmasında da kullanılmıştır (Song, Xu and Yang 2010).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Bazı Özel Fonksiyonlar

2.1.1. Gamma Fonksiyonu (Γ)

Kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamaları gamma fonksiyonu yardımıyla yapılmaktadır. Dolayısıyla bu fonksiyon kesirli diferensiyel denklemlerin çözümünde temel öneme sahiptir.

Tanım 2.1.1.1: (Limit tanımı) Gamma fonksiyonunun Gauss tarafından yapılan ilk tanımı

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)} \qquad (2.1)$$

dir. Bu tanım yardımıyla z'nin sıfır ve negatif tam sayılar dışındaki tüm değerleri için Γ fonksiyonu hesaplanbilmektedir (Podlubny 1999).

Tanım 2.1.1.2: (İntegral dönüşümü tanımı) Gamma fonksiyonunun Euler tarafından yapılan tanımı

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt \quad , \quad Rez > 0 \qquad (2.2)$$

şeklindedir ve z'nin tüm değeri için Γ fonksiyonunu hesaplamaya imkan tanımıştır (Podlubny 1999).

n tam sayıları için (2.2) eşitliği

$$n! = \int_0^\infty e^{-t}\, t^n dt \qquad (2.3)$$

halini aldığından, Gamma fonksiyonuna faktoriyel fonksiyonu da denilmektedir. Gamma fonksiyonu, faktoriyel fonksiyonunun tüm reel sayılara ve karmaşık sayılara genellenmiş halidir.

Gamma Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

a) (2.1)de z=1 için

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!.n}{1.2\ldots n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \qquad (2.4)$$

dir.

b) (2.2) de $z = 1/2$ için

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \qquad (2.5)$$

dir ve (2.5) diğer gamma değerlerinin hesaplanmasında da oldukça önemlidir. (2.5) eşitliğinin doğruluğunu göstermek için (2.2) denkleminde $t = u^2$ değişken değişimi yapıldığında

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u^2} u^{2z-2}\, 2u du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, u^{2z-1} du, \qquad z > 0 \qquad (2.6)$$

halini alır. (2.6) dan

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = (2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2x-1})(2\int_0^\infty e^{-v^2} v^{2y-1}) \;\; du dv, \;\; x > 0, y > 0 \quad (2.7)$$

yazılabilir.

u = r Cos θ

v= r Sin θ

değişken değişimi yapılmasıyla (2.7) denklemi kutupsal koordinatlarda

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4\int_0^{\pi/2} (Cos\,\theta)^{2x-1}(Sin\theta\,)^{2y-1} \int_0^\infty e^{-r^2}\, r^{2(x+y)-1} dr d\theta \qquad (2.8)$$

şeklini alır.

(2.6) dan

$$\Gamma(x+y) = 2\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(x+y)-1}\, dr \qquad (2.9)$$

biçimindedir.

(2.8) ve (2.9) dan

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{2\Gamma\,(x+y)} = \int_0^{\pi/2} (Cos\,\theta)^{2x-1}(Sin\,\theta)^{2y-1}d\theta, \qquad x>0, y>0 \tag{2.10}$$

elde edilir. $x = y = 1/2$ için (2.10)

$$\frac{\Gamma(1/2).\Gamma\,(1/2)}{2\Gamma(1)} = \int_0^{\pi/2} d\theta \tag{2.11}$$

halini alır.(2.4) den $\Gamma(1) = 1$ olduğundan (2.11)

$$\frac{(\Gamma\,(1/2))^2}{2.1} = \frac{\pi}{2}$$

olur. Buradan

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \tag{2.12}$$

olduğu görülür (Podlubny 1999).

c) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \; z \in \mathbb{Z}$ (2.13)

dir. (2.2) de $z = z + 1$ yazıldığında

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = (-e^{-t}t^z)_0^\infty + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)$$

olduğu görülür.

Ayrıca z = 1,2,..,n doğal sayıları için

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!$$
$$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1! = 2!$$
$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3!$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n! \tag{2.14}$$

dir.

d) $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!.\sqrt{\pi}}{4^n.n!}$

e) $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n!\sqrt{\pi}}{(2n)!}$

f) $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(z+1)\Gamma(z+2)\ldots\Gamma(z+n-1)}$

g) $\binom{-z}{r} = \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(r+1)\Gamma(1-z-r)}$ (BinomFormülü)

h) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,(\pi\, z)},\ (z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ (Yansıma Formülü)

i) $\Gamma(\mathrm{n}x) = \sqrt{\frac{2\pi}{\mathrm{n}}}\left(\frac{\mathrm{n}^{x}}{\sqrt{2\pi}}\right)^{\mathrm{n}} \prod_{\mathrm{k=o}}^{\mathrm{n}-1}\Gamma\left(x+\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}\right)$ (Gauss Çarpım Formülü)

j) $\Gamma(2x)\sqrt{\pi} = 2^{2x-1}\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)$ (Çift Gösterge Formülü)

k) $D\Gamma(1) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}\,\mathrm{Inx}\,\mathrm{d}x = -\gamma$ (γ =Euler sabiti)

l) $D\mathrm{In}\Gamma(\mathrm{z}) = \frac{\mathrm{D}\Gamma(\mathrm{z})}{\Gamma(\mathrm{z})} = \psi(z)$ (Digamma Fonksiyonu) (2.15)

(Oldham and Spanier 1974).

2.1.2. Beta Fonksiyonu (β)

Kesirli hesaplarda çoğu durumda Gamma fonksiyonunun değerlerinin belirli kombinasyonları yerine Beta fonksiyonunun kullanılması daha uygundur.

Tanım 2.1.2.1:

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad Re(x) > 0, Re(y) > 0 \tag{2.16}$$

şeklinde tanımlanan Beta fonksiyonu Euler integralinin ilk türüdür (Arfken and Weber 1993).

Beta Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

a) $\beta\,(x,y) = \beta\,(y,x)$

b) $\beta(x,y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}}dt$

c) $\beta(x,y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(Sin\ \theta)^{2x-1}(Cos\ \theta)^{2y-1}d\theta$

d) $\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ (2.17)

2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu (E)

Üstel fonksiyon pozitif tamsayı mertebeli diferensiyel denklemler teorisinde olduğu gibi kesirli diferensiyel denklemler teorisinde de önemli rol oynamaktadır.

Tanım 2.1.3.1:

$$\mathrm{E_w(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(1+nw)}, \quad w \geq 0 \qquad \text{(Bir parametreli Mittag − Leffler Fonksiyonu)} \quad (2.18)$$

$$\mathrm{E_t(w,c)} = t^w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^n}{\Gamma\,(1+n+w)} \qquad \text{(İki parametreli Mittag − Leffler Fonksiyonu)} \quad (2.19)$$

$$\mathrm{E_w}(ct^w) = \sum_{k=0}^{q-1} c^k \mathrm{E_t}(\mathrm{kw}, \mathrm{c^q}) \quad \left(\mathrm{w} = \frac{1}{\mathrm{q}}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z}^+\right) \qquad (2.20)$$

(Miller and Ross 1993).

Mittag-Leffler Fonksiyonunun Özellikleri:

Bazı Özel Değerleri:

a) $E_t\,(0,a) = e^{at}$ (2.21)

b) $E_0\,(v,a) = 0,\ Rev > 0$ (2.22)

c) $E_t\,(-1,a) = a\,E_t\,(0,a)$ (2.23)

d) $E_t\,(-p,a) = a^p\,E_t\,(0,a),\quad p = 0,1,2,\ldots$ (2.24)

e) $E_t\,(1,a) = \frac{[E_t\,(0,a)-1]}{a}$ (2.25)

f) $E_t\,\left(\frac{1}{2},a\right) = a^{-\frac{1}{2}}\,e^{at}\,Erf\,(at)^{\frac{1}{2}}$ (2.26)

g) $E_t\left(-\frac{1}{2},a\right) = a\,E_t\,\left(\frac{1}{2},a\right) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$ (2.27)

h) $E_t(v,0) = \frac{t^v}{\Gamma(v+1)}$ (2.28)

i) $\mathcal{L}\{E_t(v,a)\} = \frac{1}{\mathrm{s}^v(\mathrm{s}-a)},\ \mathrm{Re}v > -1$ (2.29)

j) $\mathrm{e_i(t)} = \sum_{k=o}^{q-1} \alpha_i^{q-k-1}\,\mathrm{E}_t\left(-kv,\alpha_i^q\right)$ (2.30)

Diferensiyel Formülleri :

k) $DE_t(v,a) = E_t\,(v-1,a)$ (2.31)

l) $D^{\mu}E_t(v,a) = E_t(v-\mu,a) = a^{\mu}E_t(v,a) + \sum_{k=0}^{\mu-1}\frac{a^k t^{v+k-\mu}}{\Gamma(v+k+1-\mu)}$, $\mu\epsilon\mathbb{R}$ (2.32)

m) $D^{\mu}e^{at} = \mathrm{E}_t(-\mu,a),\ \mathrm{t}>0,\ \mu\,\epsilon\mathbb{R}$ (2.33)

n) $D^{\mu}\,[\mathrm{tE}_t(w,a)] = \mathrm{tE}_t[(w-\mu,a) + \mu\mathrm{E}_t(w-\mu+1,a),\ w>-2,\ \mu\epsilon\mathbb{R}$ (2.34)

o) $D[tE_t(v,a)] = tE_t(v-1,a) + E_t(v,a)$ (2.35)

p) $D[t^{\mu}E_t(v,a)] = t^{\mu}E_t(v-1,a) + \mu\,t^{\mu-1}E_t(v,a),\ \mu\,\epsilon\mathbb{R}$ (2.36)

q) $D^p[t^{\mu}E_t(v,a)] = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{K}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-k+1)}t^{\mu-k}E_t(v+k-p,a), p = 0,1,\ldots\mu\epsilon\mathbb{R}$ (2.37)

Ötemele Formülleri:

r) $E_t(v,a) = a\mathrm{E}_t(v+1,a) + \frac{t^v}{\Gamma(v+1)}$ (2.38)

s) $E_t(v,a) = a^pE_t(v+p,a) + \sum_{k=0}^{p-1}a^k\frac{t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)},\ p = 0,1,2\ldots$ (2.39)

t) $E_t(v,a) - E_t(v,b) = aE_t(v+1,a) - b\mathrm{E}_t(v+1,b)$ (2.40)

u) $E_t(v,a) - E_t(v,b) = a^p\mathrm{E}_t(v+p,a) - b^p\mathrm{E}_t(v+p,b) + \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(a^k-b^k)t^{v+k}}{\Gamma(v+k+1)}\ , p = 0,1,..$ (2.41)

(Miller and Ross 1993).

2.1.4. Hata Fonksiyonu (Erf)

Tanım 2.1.4.1:

$$Erf\ x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{2.42}$$

Hata Fonksiyonunun Bazı Özellikleri:

a) $Erf\ x = 1 - Erfc\ x$ (2.43)

b) $Erf(-x) = -Erf\ x$ (2.44)

c) $Erf(0) = 0$

d) $Erf\,(\infty) = 1$

(Miller and Ross 1993).

2.2. Kesirli Türev ve İntegraller

$f(x) = x^m$ şeklindeki bir fonksiyonun n. mertebeden türevinin

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{m!}{(m-n)!}\,x^{m-n}, \quad n,m \in \mathbb{Z} ve\; m > n \tag{2.45}$$

olduğu bilinmekteydi. Eulerin 1730 yılında Gamma fonksiyonunu tanımlamasıyla birlikte (2.45) eşitliğinin

$$\frac{d^n}{dx^n}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)}x^{m-n} \tag{2.46}$$

şeklinde yazılabileceği görülmüştür. Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonundan farklı olarak tüm reel sayılarda tanımlı olduğundan (2.46) eşitliği

$$\frac{d^q}{dx^q}x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-q+1)}x^{\mu-q}, \quad \mu,q \in \mathbb{R}, q \geq 0 \tag{2.47}$$

şeklinde yazılarak x^μ biçimindeki bir fonksiyonun keyfi mertebeden türevi elde edilmiştir. Daha sonraları birçok ünlü matematikçi bu konu üzerinde çalışarak tüm fonksiyonlar için keyfi mertebeden türevlerin hesaplanmasına imkan tanıyan tanımlar elde etmişlerdir.

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun n katlı integralinin

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad \text{(Cauchy İntegral Formülü)} \tag{2.48}$$

olduğu bilinmekteydi. Yine Gamma fonksiyonu yardımıyla (2.48) eşitliği $q < 0$ için

$$I^q f(x) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-t)^{q-1} f(t)dt \tag{2.49}$$

şeklinde yazılarak keyfi katlı kesirli integraline ulaşılmıştır.

Kesirli türevin literatürde elliden fazla tanımı ile karşılaşılmaktadır. Her ne kadar çalışılan konuya göre üstünlükleri değişse de bunlardan en önemli olanları Riemann-Liouville, Grünwald-Letkinov, Caputo, Cauchy tanımlarıdır. Biz de çalışmamızda en temel ve kullanışlı tanım olan Riemann-Liouville kesirli türev tanımından ve özelliklerinden ağırlıklı olarak faydalanacağız.

Ayrıca gösterim olarak, $q > 0$ olmak üzere kesirli türev için ${}_aD_t^q f(t)$ gösterimi kullanılacaktır. Burada a ve t kesirli diferensiyelleme işleminin limit değerleridir. ${}_aD_t^{-q} f(t)$ gösterimi ise kesirli integral için kullanılacaktır. En sık kullanılan $a = 0$ alt limiti için $D_t^q f(t)$ gösterimi kullanılacaktır.

2.2.1. Kesirli Türev ve İntegral Tanımları

Tanım 2.2.1.1: (Riemann-Liouville Kesirli Türevi)

f, fonksiyonu her sonlu (a,t) aralığında sürekli ve integrallenebilir bir fonksiyon ve $n \in \mathbb{N}$, $n-1 \leq q < n$ olmak üzere f fonksiyonunun $t > a$ için $q.$ mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$ {}_aD_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} . \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-q-1} f(\tau) d\tau \tag{2.50}$$

ve q katlı kesirli integrali

$$ {}_aD_t^{-q} f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau) d\tau \tag{2.51}$$

şeklinde tanımlanır (Podlubny 1999).

Bu tanıma ulaşmak için $y = f\,(t)$ sürekli fonksiyonuna türevin temel tanımından faydalanarak ardışık türevler uygulandığında;

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \to o} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} f''(t) = \frac{d^2 f}{dt^2} &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$f'''(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \tag{2.54}$$

$$\cdots \qquad \qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f}{df^n} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{r} f(t - rh) \tag{2.55}$$

elde edilir.

Burada

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \tag{2.56}$$

dir. Herhangi q keyfi tamsayısı için

$$f_h^{(q)}(t) = \frac{1}{h^q}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r \binom{q}{r} f(t-rh) \tag{2.57}$$

alındığında $q \leq n$ için

$$\lim_{h\to 0} f_h^{(q)}(t) = f^{(q)}(t) = \frac{d^q f}{dt^q} \tag{2.58}$$

olacağı açıktır. Çünkü $\binom{q}{q}$ dan sonraki tüm katsayılar sıfıra eşit olacaktır.

Şimdi de q'nun negatif değerleri ele alınırsa (2.56) da $n = -q$ yazıldığında

$$\binom{-q}{r} = -\frac{q(-q-1)\ldots(-q-r+1)}{r!} = (-1)^r \binom{q}{r} \tag{2.59}$$

olur. Bununla beraber (2.57) de q yerine $-q$ yazılırsa

$$f_h^{(-q)}(t) = \frac{1}{h^{-q}}\sum_{r=0}^{n}\binom{q}{r} f(t-rh) \tag{2.60}$$

eşitliği q pozitif tamsayıları için elde edilmiş olur. Burada sabit n değerleri için (2.58) de olduğu gibi $h \to 0$ için limit alınırsa sonuç sıfır olacaktır. Sıfıra eşit olmayan bir limite ulaşmak için $h \to 0$ için $n \to \infty$ olmak zorundadır. a bir reel sabit olmak üzere (2.58) de $h = \frac{t-a}{n}$ alınabilir. Bu durumda $f_h^{-q}(t)$ sonlu ya da sonsuz olabilir ve

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f_h^{(-q)}(t) = {}_aD_t^{-q} f(t) \tag{2.61}$$

şeklinde gösterilir. Burada ${}_aD_t^{-q}$, a ve t limit değerlerine sahip olan f üzerinde bir işlemdir.

Birkaç özel durum ele alınırsa

$q = 1$ için

$$f_h^{(-1)}(t) = h\sum_{r=o}^{n} f(t-rh) \tag{2.62}$$

olup

(2.62) de $t - nh = a$ ve $f(t)$ sürekli alındığında

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f^{(-1)}_{h}(t) = {}_aD^{-1}_t f(t) = \int_0^{t-a} f(t-z)dz = \int_0^t f(\tau)d\tau \qquad (2.63)$$

olur.

$q = 2$ için

$$\binom{2}{r} = \frac{2.3 \ldots (2+r+1)}{r!} = r+1$$

dir ve

$$f^{(-2)}_{h}(t) = h\sum_{r=0}^{n}(r+1)hf(t-rh) \qquad (2.64)$$

olur.

(2.64) de $t + h = y$ alınırsa

$$f^{(-2)}_{h}(t) = h\sum_{r=1}^{n+1}(rh)f(y-rh) \qquad (2.65)$$

olur.

(2.65) de h→0 için limit alınırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} f^{-2}_{h}(t) = {}_aD^{-2}_t f(t) = \int_0^{t-a} zf(t-z)dz = \int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (2.66)$$

elde edilir.

$q = 3$ özel durumu için

$$\binom{3}{r} = \frac{3.4\ldots(3+r+1)}{r!} = \frac{(r+1)(r+2)}{1.2} \qquad (2.67)$$

olup,

$$f^{(-3)}_{h}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=0}^{n}(r+1)(r+2)h^2 f(t-rh) \qquad (2.68)$$

olur.

(2.68) de $t + h = y$ alınırsa

$$f^{(-3)}_{h}(t) = \frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} r(r+1)h^2 f(y-rh) \tag{2.69}$$

$$= \frac{h}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1}(rh)^2 f(y-rh) + \frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) \tag{2.70}$$

olur.(2.70) de $h \to 0$ için limit alınırsa

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} \frac{h^2}{1.2}\sum_{r=1}^{n+1} rhf(y-rh) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h\int_a^t (t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.71}$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edildiğinde

$${}_aD_t^{-q}f(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ nh=t-a}} h^q \sum_{r=0}^{n} \binom{q}{r} f(t-rh) = \frac{1}{(q-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}f(\tau)d\tau \tag{2.72}$$

genel gösterimine ulaşılır (Podlubny 1999).

Riemann ve Liouville buradaki süreksiz $(q-1)!$ fonksiyonunun yerine Euler'in sürekli Gamma fonksiyonunu kullanarak tüm keyfi q rasyonel değerleri için

$${}_aD_t^{-q}f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_a^t (t-\tau)^{q-1}f(\tau)d\tau \tag{2.73}$$

kesirli integralini ortaya koymuşlardır. (2.73) den

$${}_aD_t^{q}f(t) = \frac{d^n}{dt^n}\, {}_aD_t^{-(n-q)}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-q-1}f(\tau)d\tau \tag{2.74}$$

kesirli türevine kolayca ulaşılır (Podlubny 1999).

Eğer (2.74) de alt limit 0 alınırsa, en çok kullanılan

$$D_t^{q}f(t) = \frac{1}{(n-q)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.2.1.2: (Grünwald-Letkinov Kesirli Türevi)

f sürekli ve f' in $1,2, \dots, n+1$ türevleri $[a,t]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olsun ve $n \in \mathbb{N},\ n < q < n+1$ olmak üzere f fonksiyonunun q. mertebeden Grünwald-Letkinov kesirli türevi

$$ {}_aD_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-q+k}}{\Gamma(-q+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-q+n+1)} \int_a^t f^{(n+1)}(\tau)(t-\tau)^{n-q} d\tau \qquad (2.75)$$

şeklindedir (Samko and Kilbas 1993).

Tanım 2.2.1.3: (Caputo Kesirli Türevi)

f, n defa diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $n-1 < q < n$ olmak üzere f fonksiyonunun q. mertebeden Caputo kesirli türevi

$$ {}_aD_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t f^{(n)}(\tau)(t-\tau)^{n-q-1} d\tau \qquad (2.76)$$

şeklindedir (Samko and Kilbas 1993).

Kesirli diferensiyel tekniğinde başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur. Caputo tanımının en önemli avantajı, Caputo kesirli türevlerinin tamsayı dereceden diferensiyel denklemlerdekiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Bir başka deyişle $t = a$ alt limitinde bilinen bir fonksiyonun tam mertebe türevlerinin limit değerlerini içermesidir (Podlubny 1999).

Tanım 2.2.1.4 : (Cauchy Kesirli Türevi)

f fonksiyonu kapalı bir C yolu üzerinde ve içinde analitik olsun. $q \notin \mathbb{Z}^-$ olmak üzere f fonksiyonunun q. mertebeden kesirli türevi

$$ D^q f(t) = \frac{\Gamma(q+1)}{2\pi i} \oint \frac{f(z)dz}{(z-t)^{q+1}} \qquad (2.77)$$

şeklindedir. q'nun negatif tamsayı değerleri için geçerli değildir. Çünkü $\Gamma(q+1)$ bu değerlerde tanımsız (sonsuz) olmaktadır. Bu nedenle diğer tanımlar kadar kullanışlı olmasa da kompleks işlemler yapılıyorsa faydalı olabilir (Bayın 2004).

2.2.2. Kesirli Türev ve İntegrallerin Bazı Özellikleri

a) Lineerlik Özelliği

$${}_aD_t^q\big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big) = \lambda\, {}_aD_t^q f(t) + \mu\, {}_aD_t^q g(t) \tag{2.78}$$

(Podlubny 1999).

b) Birleşme Özelliği

$p, q \in \mathbb{R}$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

(i) $k = 0,1,\dots,n-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ olduğunda

$$\frac{d^n}{dt^n}\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_aD_t^q\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = {}_aD_t^{q+n} f(t)$$

(ii) $p < 0$, q keyfi olmak üzere

$${}_aD_t^q\left({}_aD_t^p f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

(iii) $p > 0$, q keyfi, $0 \le m < p < m+1$, $0 \le n < q < n+1$ ve $max(m,n) = r$ olmak üzere $k = 0,1,2,\dots,r-1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ olduğunda

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p\left({}_aD_t^q f(t)\right) = {}_aD_t^{p+q} f(t)$$

(Podlubny 1999).

c) Kesirli Türev İçin Leibniz Kuralı

$${}_aD_t^q\big(f(t).g(t)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} C(q,k)\, {}_aD_t^{q-k} f(t)\, {}_aD_t^k\, g(t)$$

(Bologna 2004).

d) Bileşke Fonksiyonun Türevi

$g(t) = F(h(t))$ olmak üzere

$${}_aD_t^q F\big(h(t)\big) = \frac{(t-a)^{-q}}{\Gamma(1-q)} g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} C(q,k) \frac{k!\,(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k-q+1)} \sum_{m=1}^{k} \big(h(t)\big) \sum \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{ar!} \left(\frac{h^r(t)}{r!}\right)^{ar}$$

(Podlubny 1999).

e) Ardışık Türevler

$q = q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ olmak üzere

$$D^q f(t) = D^{q_1+q_2+\cdots+q_n} f(t) = D^{q_1} D^{q_2} \ldots D^{q_n} f(t)$$

(Podlubny 1999).

2.2.3. Bazı Özel Fonksiyonların Kesirli Türev-İntegralleri

a) $f(x) = x^\mu$ ise $D^v f(x) = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\mu-v}}{\Gamma(\mu-v+1)}$, $\mu, v \in \mathbb{R}$ (2.79)

(Bologna 2004)

$v > 0$ olmak üzere (2.51) den

$$D^{-v} x^\mu = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^x (x-t)^{v-1} t^\mu dt \qquad (2.80)$$

dir. (2.80) de $t = ux$ değişken değişimi yapıldığında

$$D^{-v} x^\mu = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^1 (x-ux)^{v-1} (ux)^\mu x du$$

$$= \frac{x^{v+\mu}}{\Gamma(v)} \int_0^1 (1-u)^{v-1} u^\mu du \qquad (2.81)$$

tanımı (2.16) dan faydalanılarak, (2.81)

$$D^{-v} x^\mu = \frac{x^{v+\mu}}{\Gamma(v)} \beta(\mu+1, v)$$

şeklinde yazılır ve β fonksiyonunun özellikleri (2.17) den

$$D^{-v} x^\mu = \frac{x^{v+\mu} \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(v)}{\Gamma(\mu+1+v)}}{\Gamma(v)}$$

$$= \frac{x^{v+\mu}\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1+v)} \qquad (2.82)$$

olur. (2.82) de $v = -v$ yazılara

$$D^v x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)x^{\mu-v}}{\Gamma(\mu-v+1)}$$

eşitliğine ulaşılır.

b) $f(x) = c$ ise $\quad D^v f(x) = \frac{cx^{-v}}{\Gamma(1-v)}$, $v \in \mathbb{R}$ (2.83)

(Dalir and Bashaur 2010)

Lineerlik özelliğinden

$$D^v c = cD^v 1 \tag{2.84}$$

dir.(2.84)'ün sağ tarafı

$$cD^v 1 = cD^v x^0 \tag{2.85}$$

şeklinde yazılabilir.

(2.79) da $\mu = 0$ için (2.85)

$$D^v c = c\frac{\Gamma(1)x^{-v}}{\Gamma(1-v)}$$

olur.(2.4) den $\Gamma(1) = 1$ olduğundan

$$D^v c = c\frac{x^{-v}}{\Gamma(1-v)}$$

elde edilir.

c) $f(x) = e^x$ ise $\quad D^v f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)}$ (2.86)

(Dalir and Bashaur 2010)

$$D^v e^x = D^v \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right]$$

(2.79) dan

$$D^v \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right] = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(k+1)\, x^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)} \tag{2.87}$$

k∈ℕ olduğundan (2.14) den $\Gamma(k+1) = k!$ dir. (2.87) de yerine yazıldığında

$$D^v e^x = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{k-v}}{\Gamma(k-v+1)}$$

(2.86) eşitliği elde edilmiş olur.

Ayrıca buradan

$f(x) = e^{ax}$ için $\quad D^v f(x) = a^v\, e^{ax}$ (2.88)

olur.

d) $f(x) = Sinx, \; D^v Sinx = Sin\left(x + \frac{v\pi}{2}\right)$ (2.89)

(Dalir and Bashaur 2010).

$$D^v Sinx = D^v[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}] \quad (2.90)$$

(2.88) den

$$D^v[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}] = \frac{i^v e^{ix} - (-i)^v e^{-ix}}{2i} \quad (2.91)$$

dir.(2.91) de

$i^v = e^{v\pi/2}$ ve $(-i)^v = e^{-v\pi/2}$

alındığında

.
$$D^v Sinx = Sin\left(x + \frac{v\pi}{2}\right)$$

eşitliğine ulaşılır.

e) $f(x) = Cosx, \; D^v Cosx = Cos\left(x + \frac{v\pi}{2}\right)$ (2.92)

(Dalir and Bashaur 2010).

$$D^v Cosx = D^v[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}] \quad (2.93)$$

(2.88) den

$$D^v[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}] = \frac{i^v e^{ix} + (-i)^v e^{-ix}}{2} \quad (2.94)$$

$i^v = e^{v\pi/2}$ ve $(-i)^v = e^{-v\pi/2}$

alındığında

$$D^v Cosx = Cos\left(x + \frac{v\pi}{2}\right)$$

eşitliğine ulaşılır.

f) $f(x) = Inx$, $\frac{d^q In(x)}{dx^q} = \frac{x^{-q}}{\Gamma(1-q)}[lnx - \gamma - \Psi\,(1-q)]$ (2.95)

(Podlubny 1999).

2.2.4 Kesirli Hesaplarda Laplace ve Ters Laplace Dönüşümleri

f üstel tipten bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s) \tag{2.96}$$

F, fonksiyonunun ters Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \tag{2.97}$$

olduğu bilinmektedir.

Laplace ve Ters Laplace Dönüşümünün Bazı Özellikleri

a) $\mathcal{L}\{D^n f(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-k-1)} f^{(k)}(0), \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (2.98)$

b) $\mathcal{L}\{{}^{RL}D^v f(t)\} = s^v F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} D^{k-n+v} f(0), \quad n-1 < v \leq n \qquad (2.99)$

c) $\mathcal{L}\{{}^{c}D^v f(t)\} = s^v F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{v-k-1} f(0), \qquad n-1 < v \leq n \qquad (2.100)$

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - a}\right\} = \sum_{j=1}^{q} a^{j-1} E_t(jv-1, a^q) = e(t), \qquad v = \frac{1}{q} \qquad (2.101)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = E_t(0,a) = e^{at} \qquad (i)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}-a}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, a^2\right) + aE_t(0,a^2) \qquad (ii)$

e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^v-a)^2}\right\} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{q} a^{j+k-2}\{tE_t\big((j+k)v-2, a^q\big) - \big((j+k)v-2\big).$

$.E_t\big((j+k)v-1, a^q\big)\} = e(t) * (e(t), \qquad v = \frac{1}{q} \qquad (2.102)$

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^{1/2}-a)^2}\right\} = 2atE_t\left(-\frac{1}{2}, a^2\right) + (1+2a^2t)E_t(0,a^2) + aE_t\left(\frac{1}{2}, a^2\right) \qquad (i)$

f) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\} = f(s) * g(s) \qquad (2.103)$

(Miller and Ross 1993).

Ters Laplace Dönüşümü ile İlgili Bazı Teoremler

Teorem 2.2.4.1 : $P\ (x) = x^n + a_1\, x^{\,n-1} + \cdots + a_n = \prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j)$

n.dereceden polinomunun $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ şeklinde n tane farklı kökü olsun.
Eğer

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{x-\alpha_k} \tag{2.104}$$

ise

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^m A_k = 0, \qquad m = 0,1, \dots, n-2 \tag{2.105}$$

dir(Miller and Ross 1993).

Teorem 2.2.4.2 : $P\ (x) = x^n + a_1\, x^{n-1} + \dots + a_n$

n. dereceden polinomunun $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_r$ r tane farklı kökü , $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_{r+s}$ s tane çift katlı kökü ve $\alpha_{r+s+1}, \dots, \alpha_{r+s+t}$ t tane üç katlı kökü olsun. $(n = r + 2s + 3t)$

Eğer

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^{r+s+t} \frac{B_k}{x-\alpha_k} + \sum_{k=1}^{s+t} \frac{C_k}{(x-\alpha_{r+k})^2} + \sum_{k=1}^{t} \frac{D_k}{(x-\alpha_{r+s+k})^3} \tag{2.106}$$

ise

$$\sum_{k=1}^{r+s+t} \alpha_k^m B_k + m \sum_{k=1}^{s+t} \alpha_{r+k}^{m-1} C_k + \frac{1}{2} m(m-1) \sum_{k=1}^{t} \alpha_{r+s+k}^{m-2} D_k = 0 \ , m = 0,1, \dots, n-2 \tag{2.107}$$

dir (Miller and Ross 1993).

3. KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde "An Introduction to The Fractional Calculus and Differential Equations" (Miller and Ross 1993) kitabı esas alınmıştır.

$r_m, r_{m-1}, \dots, r_1, r_0$ negatif olmayan sayıların kesin azalan bir dizisi ve $b_1, b_2, \dots, b_m$ sabitler olmak üzere

$$[D^{r_m} + b_1 D^{r_{m-1}} + \dots + b_m D^{r_0}]y(t) = 0 \tag{3.1}$$

diferensiyel denkleminde sıfıra eşit olmayan r_j rasyonel sayılarının paydalarının ortak katlarının en küçüğü q olmak üzere $v = \frac{1}{q}$ alındığında

$$[D^{nv} + a_1 D^{(n-1)v} + \dots + a_n D^0]y(t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{3.2}$$

denklemi elde edilir. (3.2) eşitliğine (n, q). mertebeden sabit katsayılı kesirli lineer homojen diferensiyel denklemi denir.

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \tag{3.3}$$

polinomu göz önüne alındığında (3.2) , D^v nin bir polinomu olarak

$$P(D^v) = D^{nv} + b_1 D^{(n-1)v} + \dots + a_n \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre (3.2) denklemi

$$P(D^v)\, y(t) = 0 \tag{3.5}$$

şeklini alır. (3.3) polinomuna, (3.2) diferensiyel denklemine ilişkin karakteristik polinom denir.(3.5)'e ise (3.2) denkleminin karakteristik denklemi denir.

Kesirli diferensiyel denklemler teorisi birçok yönden adi diferensiyel denklemler teorisiyle paralellik göstermektedir. Bu nedenle öncelikle adi diferensiyel denklemlerdeki durumlar göz önünde bulundurulup ardından bu durumların kesirli diferensiyel denklemlere uygunluğu araştırılacaktır.

3.1. Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Elde Edilmesi

3.1.1. Doğrudan Yaklaşım Metodu

(3.2) kesirli diferensiyel denkleminin çözümünü bulmak için

$$[D^n + a_1 D^{(n-1)} + \cdots + a_n D^0] y(t) = 0, \tag{3.6}$$

$n.$ mertebeden adi diferensiyel denklemi göz önünde bulundurulursa, bu denkleme ilişkin karakteristik polinom

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.7}$$

şeklindedir. (3.7) polinomunun bir kökü c olmak üzere (3.6) denkleminin $y(t) = e^{ct}$ şeklinde bir çözümü vardır. O halde

$$P(D)\, e^{ct} = P(c)\, e^{ct} \tag{3.8}$$

olur.

Benzer düşünceyle (3.2) kesirli diferensiyel denkleminin çözümünü bulmak için e^{ct} ye (2.33) özelliğinden faydalanarak D^u kesirli diferensiyel operatörü uygulandığında

$$D^u\, e^{ct} = E_t(-u, c) \tag{3.9}$$

elde edilir. Burada adi diferensiyel denklemlerde gözlenen (3.8) deki ilişkiye benzer bir durumla karşılaşılmamaktadır. Ancak (2.32) ve (2.34) ten yararlanarak yazılabilecek

$$D^u\, E_t\,(w, c) = E_t\,(w - u, c) \tag{3.10}$$

$$D^u\, t\, E_t\,(w, c) = t\, E_t\,(w - u, c) + u\, E_t\,(w - u + 1, c), \quad w > -2 \tag{3.11}$$

eşitlikleri ile

$$De^{ct} = ce^{ct} \tag{3.12}$$

$$Dte^{ct} = cte^{ct} + e^{ct} \tag{3.13}$$

eşitlikleri arasındaki benzerlik dikkat çekmektedir.

Tekrar (3.9)‘a dönüldüğünde

$$E_t(0,c) = e^{ct} \tag{3.14}$$

olduğu görülür. O halde

$$D^u\, E_t(0,c) = E_t(-u,c) \tag{3.15}$$

olur.

Dolayısıyla k tamsayı olmak üzere , (3.2) kesirli diferensiyel denklemi için $E_t(kv,c)$ biçiminde çözüm aranır.

Bu durumu, örnek olarak

$$[D^1 + aD^{1/2} + bD^0]y(t) = 0, \tag{3.16}$$

(2,2). mertebeden kesirli diferensiyel denklemi için göz önüne alırsak, $E_t(0,c)$ ve $E_t(-\frac{1}{2},c)$ ifadelerinin lineer kombinasyonunun (3.16) denkleminin muhtemel çözümü olduğu görülür.

A ve c keyfi sabitler olmak üzere

$$\psi_1(t) = AE_t(0,c) + E_t\left(-\frac{1}{2},c\right) \tag{3.17}$$

alınırsa (3.17), (3.16) için muhtemel bir çözümdür. $\psi_1(t)$’nin kesin çözüm olup olmadığını göstermek için;

(3.16) denklemine ilişkin karakteristik polinom

$$P(x) = x^2 + ax + b \tag{3.18}$$

şeklinde alınıp, buna göre

$$P(D^{1/2}) = [D^1 + aD^{1/2} + bD^0] \tag{3.19}$$

yazılır.

(3.19), Mittag Leffler (E_t) fonksiyonunun (2.31), (2.32) ve (2.34) özelliklerinden faydalanılarak (3.17)’ye uygulandığında ve Mittag-Leffler (E_t) fonksiyonunun (2.23) ve (2.38) özelliklerinden yararlanarak düzenlendiğinde

$$P(D^{1/2)})\psi_1(t) = (cA + ac + bA)E_t(0,c) + (c + aA + b)E_t\left(-\frac{1}{2},c\right) + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{-3/2} \qquad (3.20)$$

elde edilir. (3.18) karakteristik polinomunun bir kökü λ olmak üzere, (3.20) de özel olarak $A = \lambda$ ve $c = \lambda^2$ alındığında

$$P(D^{1/2})\psi_1(t) = \lambda P(\lambda)E_t(0,\lambda^2) + p(\lambda)E_t\left(-\frac{1}{2},\lambda^2\right) + \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{3}{2}}$$

olup, $P(\lambda) = 0$ olduğundan

$$P(D^{1/2})\,\psi_1(t) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{3}{2}} \qquad (3.21)$$

dir. (3.21) , $P(x)$'in köklerinden bağımsızdır. Ancak $\psi_1(t)$, (3.16) denkleminin tam olarak bir çözümü değildir.

α ve β , $P(x)$'in kökleri olmak üzere, (3.17) sırasıyla $A = \alpha$, $c = \alpha^2$ ve $A= \beta$, $c = \alpha^2$ alınarak

$$\psi_1(t) = \alpha E_t(0,\alpha^2) + E_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right) \qquad (3.22)$$

$$\psi_2(t) = \beta E_t(0,\beta^2) + E_t\left(-\frac{1}{2},\beta^2\right) \qquad (3.23)$$

olarak elde edilir.
(3.21)'e benzer şekilde

$$P\left(D^{\frac{1}{2}}\right)\psi_2(t) = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}t^{-\frac{3}{2}} \qquad (3.24)$$

olur. Eğer

$$\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$$

alınırsa (3.22) ve (3.23) den

$$\psi(t) = \alpha E_t(0,\alpha^2) - \beta E_t(0,\beta^2) + E_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right) - E_t\left(-\frac{1}{2},\beta^2\right) \qquad (3.25)$$

elde edilir.

(3.25) için

$$\left[D^1 + aD^{\frac{1}{2}} + bD^0\right]\psi(t) \equiv 0$$

özdeşliği sağlanacağından $\psi(t)'$nin , (3.16) kesirli diferensiyel denkleminin aşikar olmayan çözümü olduğu görülür.

E_t'nin fonksiyonunun (2.26) özelliği ve Erf fonksiyonunun (2.43) özelliği kullanılarak (3.25) düzenlendiğinde

$$\psi(t) = \alpha e^{\alpha^2 t} Erfc\left(-\alpha t^{\frac{1}{2}}\right) - \beta e^{\beta^2 t} Erfc\left(-\beta t^{\frac{1}{2}}\right) \tag{3.26}$$

olur. (3.26), (3.16) denkleminin çözümüdür.

$\alpha = \beta$ olduğunda adi diferensiyel denklemlerdeki $te^{\alpha t}$ çözümlerine benzer olarak

$$E_t(0,\alpha^2), \qquad E_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right), \qquad E_t\left(\frac{1}{2},\alpha^2\right)$$

$$tE_t(0,\alpha^2), \qquad t\,E_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right), \qquad tE_t\left(\frac{1}{2},\alpha^2\right)$$

ifadelerinin lineer kombinasyonları (3.16) nın çözümüdür.

Yani

$$\psi(t) = (1 + 2\alpha^2 t)E_t(0,\alpha^2) + \alpha E_t\left(\frac{1}{2},\alpha^2\right) + 2\alpha E_t\left(-\frac{1}{2},\alpha^2\right)$$

$$= (1 + 2\alpha^2 t)\, e^{\alpha^2 t} Erfc\left(-\alpha t^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{2\alpha t^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$\alpha = \beta$ için (3.16) denkleminin çözümüdür.

3.1.2. Laplace Dönüşümü Metodu

(3.16) denkleminin her iki tarafına (2.99)' dan faydalanarak Laplace dönüşümü ($\mathcal{L}$) uygulandığında

$$[sY(s) - y(0)] + a\left[s^{1/2}Y(s) - D^{-1/2}y(0)\right] + bY(s) = 0$$

veya

$$\left[s + as^{1/2} + b\right]Y(s) - y(0) - aD^{-1/2}y(0) = 0 \tag{3.27}$$

elde edilir.$C = y(0) + aD^{-1/2}y(0)$ sıfırdan farklı sonlu bir sabit ve $P(x)$, (3.16) denklemine ilişkin karakteristik polinom olmak üzere

$$Y(s) = \frac{C}{P(s^{1/2})} \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir.

$P(x) = x^2 + ax + b$ karakteristik polinomunun sıfırları α ve β olmak üzere ($\alpha \neq \beta$) $\frac{1}{P(x)}$ basit kesirlere ayrıldığında

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \beta}\right) \tag{3.29}$$

şeklinde yazılabilir.(3.29)'a göre

$$\frac{1}{P(s^{1/2})} = \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{s^{1/2} - \alpha} - \frac{1}{s^{1/2} - \beta}\right) \tag{3.30}$$

olur.(2.101)(ii) den

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2} - \alpha}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + \alpha E_t(0, \alpha^2) \tag{3.31}$$

ve

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2} - \beta}\right\} = E_t\left(-\frac{1}{2}, \beta^2\right) + \beta(E_t, \beta^2) \tag{3.32}$$

olduğu göz önüne alınarak , (3.28)'in her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{C}{\alpha - \beta}\left[\alpha E_t(0, \alpha^2) - \beta E_t(0, \beta^2) + E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right) - E_t\left(-\frac{1}{2}, \beta^2\right)\right] \tag{3.33}$$

elde edilir. (3.33) , $\alpha \neq \beta$ için (3.16) denkleminin çözümü olur.

Eğer karakteristik polinomun sıfırları $\alpha = \beta$ ise, o zaman (3.28)

$$Y(s) = \frac{C}{(s^{1/2} - \alpha)^2} \tag{3.34}$$

şeklini alır. (3.34)'e (2.102)(i) göz önüne alınarak ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$y(t) = C\left[(1 + 2\alpha^2 t)E_t(0, \alpha^2) + \alpha E_t\left(\frac{1}{2}, \alpha^2\right) + 2\alpha t E_t\left(-\frac{1}{2}, \alpha^2\right)\right] \qquad (3.35)$$

elde edilir. (3.35) fonksiyonu $\alpha = \beta$ için (3.16) denkleminin çözümü olur.

3.1.3. Lineer Bağımsız Çözümler

Öncelikle

$$D^2\, y(t) + a\, D\, y(t) + b\, y\,(t) = 0 \qquad (3.36)$$

adi diferensiyel denklemi göz önünde bulundurulursa (3.36) denklemine ilişkin karakteristik polinomun bir kökü α olmak üzere

$$g_1(t) = e^{\alpha t}$$

(3.36)'nın bir çözümüdür. Dolayısıyla

$$Dg_1(t) = \alpha e^{\alpha t}$$

olup, bu da (3.36)'nın bir çözümüdür. O halde g_1 fonksiyonunun daha yüksek türevlerinin de (3.36) denkleminin çözümleri olduğu görülür. Ancak bu çözümler lineer bağımsız değildirler.

(3.36) denklemine ilişkin karakteristik polinomun diğer kökü, β olmak üzere

$$g_2(t) = e^{\beta t}$$

(3.36)'nın bir çözümü olur. g_2 fonksiyonunun tüm türevlerinin de (3.36)'nın çözümleri olduğu kolayca görülür.Bu çözümlerde lineer bağımsız değildirler.

$\propto \neq \beta$ için g_1 ve g_2 , (3.36) nın iki lineer bağımsız çözümü olmak üzere

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t)$$

olarak tanımlanan $g(t)$ ve $Dg(t)$ yine (3.36) nın çözümleridir. Ancak burada $g(t)$ ve $Dg(t)$ lineer bağımsızdır. Ayrıca $\alpha = \beta$ için de $g_2(t) = te^{\alpha t}$ alınarak benzer sonuçlar elde edilir.

$$\left[D^{3/2} - 2D^1 - D^{1/2} + 2D^0\right]y(t) = 0 \tag{3.37}$$

kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alınırsa

$$y_1(t) = \frac{1}{3}\left[-E_t\left(\frac{1}{2},1\right) + 4E_t\left(\frac{1}{2},4\right) - 2E_t(0,1) + 2E_t(0,4)\right] \tag{3.38}$$

şeklinde bir çözümü vardır. (3.38)'in türevi, (2.32) yardımıyla alındığında ve $(2.23\,)\,,(2.27)$ ile düzenlendiğinde

$$y_2(t) = Dy_1(t) = \frac{1}{3}\left[-E_t\left(\frac{1}{2},1\right) + 16E_t\left(\frac{1}{2},4\right) - 2\,E_t(0,1) + 8E_t(0,4)\right] + \frac{t^{-1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \tag{3.40}$$

olur ki $y_2(t)$ de yine (3.37) nin çözümüdür.Ayrıca $y_1(t)$ ile $y_2(t)$ lineer bağımsızdır. Dolayısıyla bunların lineer kombinasyonları

$$\psi(t) = c_1y_1(t) + c_2y(t) \tag{3.41}$$

de (3.37) nin çözümüdür.

3.1.4. Homojen Denklemlerin Çözümleri

$$\left[D^{nv} + a_1D^{(n-1)v} + \cdots + a_nD^0\right]y(t) = 0 \tag{3.42}$$

(n, q). mertebeden kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alınırsa, bu denkleme ilişkin karakteristik polinom

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{3.43}$$

dır.

Teorem 3.1.4.1: $N,\ N \geq nv$ olacak şekilde en küçük tamsayı olmak üzere, (3.42) denklemi N tane lineer bağımsız çözüme sahiptir. Bu çözümler

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}$$

$$y_{j+1}(t) = D^jy_1(t) \quad , \qquad j = 0, 1, \cdots, N-1$$

şeklindedir.

İspat : (3.42) ve (3.43)'ten

$P(D^v)y(t)$=0

olur.Bu eşitliğe (2.99) özelliği göz önüne alınarak Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\mathcal{L}\{P(D^v)y(t)\} = P(s^v)Y(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r = 0 \tag{3.44}$$

elde edilir.

(3.44)'teki $B_r(y)$ terimi ; $r = 0,1,\dots,N-1$ ve $k = rq+1,\dots,n$ olmak üzere $D^{kv-(r+1)}\,y(0)$ şeklindeki terimlerin lineer kombinasyonunu ifade etmektedir.

Özel olarak $r = 0$ için

$$B_0(y) = P(D^v)D^{-1}y(0) - a_n D^{-1}y(0)$$

dir. (3.44) ten

$$Y(s) = \frac{\sum_{r=0}^{N-1} B_r(y)s^r}{P(s^v)}$$

yazılır. Buna ters Laplace dönüşümü uygulandığında, (3.42) nin $y(t)$ çözümü elde edilir.

Eğer

$$y_1\,(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} \tag{3.45}$$

(3.42) nin bir çözümü ise (3.44)'ü sağlamalıdır. Yani

$$\mathcal{L}\{P(D^v)y_1(t)\} = P(s^v)Y_1(s) - \sum_{r=0}^{N-1} B_r(y_1)s^r = 0 \tag{3.46}$$

olmalıdır.

Başlangıç değer teoreminin gereği

$$\lim_{s\to\infty} s^{v+1}\mathcal{L}\{f(t)\} = L$$

ise tüm v değerleri için

$$D^v f(0) = L$$

olur. Dolayısıyla

$$B_0 y(1) = 1 \; ve \; B_r(y_1) = 0, \qquad r > 1 \tag{3.47}$$

dır.(3.47), (3.46) da yerine yazılırsa

$$\mathcal{L}\{\mathrm{P}(s^v) y_1(t)\} = \mathrm{P}(s^v) Y_1(s) - 1 = 0 \tag{3.48}$$

elde edilir.

(3.45) den $Y_1(s) = P^{-1}(s^v)$ elde edilir ve (3.48) de yerine yazılırsa

$$\mathcal{L}\{\mathrm{P}(s^v) y_1(t)\} = 0$$

olur. Bu eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulandığında $y_1(t)$ nin (3.42)'nin bir çözümü olduğu görülür.

Başlangıç değer teoremi gereği

$$D^k y_1(0) = 0, \qquad k = 0,1,\dots,N-2 \tag{3.49}$$

olduğundan ve $j = 0,1,\dots,N-1$ ve tüm v değerleri için (2.2.2 (b))'ye göre

$$\mathrm{P}(D^v)\left[D^j y_1(t)\right] = D^j[P(D^v) y_1(t)]$$

şeklinde yazılabilir.

$$P(D^v) y_1(t) = 0$$

olduğu bilindiğinden

$$\mathrm{P}(D^v)\left[D^j y_1(t)\right] = 0$$

olmalıdır.

Böylece $j = 0,1,\dots,N-1$ için

$$y_{j+1}(t) = D^j y_1(t),$$

fonksiyonlarının (3.42)'nin çözümleri olduğu gösterilmiş olur.

Bu $y_1(t),\cdots,y_N(t)$ çözümlerinin lineer bağımsız olup olmadığı gösterilmelidir.
(2.98) den

$$\mathcal{L}\{D^j y_1(t)\} = s^j Y_1(s) - \sum_{k=0}^{j-1} s^{j-k-1}\, {y_1}^{(k)}(0) \qquad j = 0,1,\dots,N-2$$

dır.(3.49) ve (3.45) ten yararlanarak bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\mathcal{L}\{D^j y_1(t)\} = \frac{s^j}{P(s^v)} \qquad , \ j = 0,1,\dots,N-2$$

olacağından $y_1(t),\cdots, y_{N-1}(t)$ çözümleri lineer bağımsızdır.Ve

$$\mathcal{L}\{D^{N-1} y_1(t)\} = \mathcal{L}\{y_N(t)\}$$

dir. Burada

$$y_N(0) = 1, \qquad N = nv \tag{3.50}$$

$$y_N(0) = \infty, \qquad N > nv \tag{3.51}$$

dir.
Yani $y_1(t),\cdots, y_{N-1}(t)$ çözümlerinin hepsi $t = 0$ için yok olur. Dolayısıyla $y_N(t)$, (3.42) nin bir çözümüdür ve $y_N(t\ )$ ile $y_1(t),\cdots, y_{N-1}(t)$ lineer bağımsızdır.

3.1.5. Çözümlerin Açık Gösterimi

Teorem 3.1.5.1: $\alpha_1\ , \alpha_2,\cdots, \alpha_n$ (3.43) karakteristik polinomunun farklı kökleri ve

$$A_m^{-1} = DP(\alpha_m), \qquad m = 1,2,\dots.,n \tag{3.52}$$

olmak üzere

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} E_t(-kv, \alpha_m^q) \tag{3.53}$$

(3.42) kesirli diferensiyel denkleminin bir çözümüdür

İspat: Teorem (3.1.4.1) gereği

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}, \qquad v = \frac{1}{q} \tag{3.54}$$

(3.42) nin bir çözümü olduğu biliniyor. (3.54)deki $P^{-1}(s^v)$ basit kesirlere ayrılırsa

$$P^{-1}(s^v) = \frac{A_1}{s^v - \alpha_1} + \frac{A_2}{s^v - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s^v - \alpha_n} \tag{3.55}$$

şeklinde yazılır.

(2.101)'e göre

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha}\right\} = \sum_{j=1}^{q} \alpha^{j-1} E_t\left(jv - 1 \quad, \alpha^q\right) \tag{3.56}$$

dir. Burada $j = q - k$ alınırsa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha}\right\} = \sum_{k=0}^{q} \alpha^{q-k-1} E_t(qv - kv - 1, \alpha^q)$$

olur ve (3.54) ten $qv = 1$ olduğundan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^v - \alpha}\right\} = \sum_{k=0}^{q} \alpha^{q-k-1} E_t(-kv, \alpha^q) \tag{3.57}$$

dır. (3.57) göz önüne alınırsa (3.55)'in her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanıp

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} = \sum_{m=1}^{n} A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{q-k-1} E_t\left(-kv, \alpha_m^q\right) \tag{3.58}$$

elde edilir. (3.53) elde edilir.Böylece teorem ispatlanmış olur.

Örnek 3.1:

$n = 7,\ q = \frac{1}{v} = 3$ olmak üzere (7,3). mertebeden

$$[D^{7v} + a_1 D^{6v} + a_2 D^{5v} + a_3 D^{4v} + a_4 D^{3v} + a_5 D^{2v} + a_6 D^{v} + a_7 D^{0}]y(t) = 0 \ , v = \frac{1}{3} \tag{3.59}$$

kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım.Bu denkleme ilişkin karakteristik polinom

$$P(x) = x^7 + a_1x^6 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7$$

dır. $P(x)$'in farklı kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{6}, \alpha_7$ olmak üzere, Teorem 3.1.4.1 gereği (3.59) denklemi $N = 3$ $(N \geq \frac{7}{3})$ tane lineer bağımsız çözümüne sahiptir. Bu çözümler

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m[\alpha_m^2 E_t(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_t(-v, \alpha_m^3) + E_t(-2v, \alpha_m^3)] \qquad (3.60)$$

$$y_2(t) = Dy_1(t)$$

ve

$$y_3(t) = D^2 y_1(t)$$

şeklindedir.

E_t fonksiyonunun diferensiyel formüllerinden faydalanarak (3.60)'ın türevi alınıp düzenlendiğinde

$$y_2(t) = Dy_1(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m \sum_{k=0}^{2} \alpha_m^{5-k} E_t(-kv, \alpha_m^3) + \sum_{k=0}^{2} \frac{t^{-kv-1}}{\Gamma(-kv)} \sum_{m=1}^{7} \alpha_m^{2-k} A_m \qquad (3.61)$$

elde edilir. Teorem 2.2.4.1 gereği $j = 0,1,2,3,4,5$ için

$$\sum_{m=1}^{7} \alpha_m^j A_m = 0,$$

olduğundan,

$$y_2(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m \alpha_m^3 [\alpha_m^2 E_t(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_t(-v, \alpha_m^3) + E_t(-2v, \alpha_m^3)] \qquad (3.62)$$

olur. Benzer şekilde $y_2(t)$' nin türevi alınarak

$$y_3(t) = \sum_{m=1}^{7} A_m \alpha_m^6 [\alpha_m^2 E_t(0, \alpha_m^3) + \alpha_m E_t(-v, \alpha_m^3) + E_t(-2v, \alpha_m^3)] \qquad (3.63)$$

elde edilir. Böylece $y_1(t)$, $y_2(t), y_3(t)$ fonksiyonları (3.59) denkleminin lineer bağımsız çözümleri elde edilmiş olur.

Örnek 3.2:

$(3, q)$. mertebeden

$$[D^{3v} + a_1 D^{2v} + a_2 D^v + a_3 D^0]y(t) = 0 \tag{3.64}$$

kesirli diferensiyel denklemine ilişkin karakteristik polinom

$$P(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \tag{3.65}$$

dır. Bu polinomun birinci kökü α_1, ikinci ve üçüncü kökü α_2 (iki katlı kök) olsun.Bu durumda Teorem 3.1.4.1 gereği

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\}$$

(3.64)'ün bir çözümüdür. (3.65)

$$P(x) = (x - \alpha_1).(x - \alpha_2)^2$$

şeklinde yazılabilir. ve Teorem 2.2.4.2'ye göre

$$\frac{1}{P(s^v)} = \frac{B_1}{s^v - \alpha_1} + \frac{B_2}{s^v - \alpha_2} + \frac{C_1}{(s^v - \alpha_2)^2} \tag{3.66}$$

olur. Ayrıca Teorem 2.2.4.2 gereği (3.66) dan

$$\alpha_1^m B_1 + \alpha_2^m B_2 + m\alpha_2^{m-1} C_1 = 0, \qquad m = 0,1$$

$$\alpha_1^2 B_1 + \alpha_2^2 B_2 + 2\alpha_2 C_1 = 1 \tag{3.67}$$

elde edilir.

(3.66) ya ters Laplace dönüşümü uygulandığında

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(s^v)\} = B_1 e_1(t) + B_2 e_2(t) + C_1 e_2(t) * e_2(t) \tag{3.68}$$

olur. Burada (2.101), (2.102) ve (2.103) den

$$e_i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s^v - \alpha_i)^{-1}\} = \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_i^{q-k-1} E_t\left(-kv, \alpha_i^q\right), \quad i = 1,2 \tag{3.69}$$

$$e(t) * e(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} \alpha^{2q-j-k-2} \{tE_t(-(j+k)v, \alpha^q) + (j+k)vE_t(1-(j+k)v, \alpha^q)\}$$

dir. Dolayısıyla $q > 2$ için $y_1(t)$, (3.64) denkleminin tek çözümüdür. Çözümü daha açık hale getirmek için (3.67) deki üç lineer denklem birlikte çözüldüğünde $B_1,\ B_2,\ C_1$ katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \\ B_2 &= -\frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \\ C_1 &= \frac{1}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} \end{aligned} \tag{3.70}$$

şeklinde elde edilir.

4. KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞLARI

4.1. Bagley-Torvik Denklemleri

Titreşimli (salınımlı) harekete sahip dinamik sistemlerin matematiksel modellemesi

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{4.1}$$

adi diferensiyel denklemi ile yapılmaktadır. Burada m, c, k sabitleri; sırasıyla miktar, sönüm ve onarım katsayıları olarak bilinmektedir. Bu denklem titreşim teorisinde temel öneme sahiptir ve mühendislikte pek çok uygulama alanı bulmuştur. (Wang and Hu 2009)

Ancak (4.1) denkleminin fiziksel sistemlerin hareketlerini açıklamakta yetersiz kaldığı durumlar da olmuştur. Örneğin Newton akışkanına batırılmış metal plakların hareketlerinin modellenmesinde (4.1) denkleminin uygun olmadığı anlaşılmıştır. 1984 yılında bu problem Bagley-Torvik tarafından

$$AD^2x(t) + BD^{3/2}x(t) + Cx(t) = f(t) \tag{4.2}$$

kesirli diferensiyel denklemiyle modellenmiştir (Bagley and Torvik 1984). Kesirli hesapların bu başarılı uygulaması sonucunda Bagley-Torvik denklemi olarak adlandırılan (4.2) denklemine ilgi artmıştır. Podlubny (1999) ve Trinks (2002) tarafından da bu denklem çeşidi ayrıntılı olarak incelenmiştir (Ray and Bera 2000) Bagley-Torvik denklemleri titreşimli sistemlerin sönüm hareketlerinin açıklanmasında da oldukça etkili matematiksel bir araçtır. Fiziksel anlamı nedeniyle de en popüler kesirli diferensiyel denklem çeşididir (Wang and Hu 2009).

Son zamanlarda Bagley-Torvik denklemlerinden hareketle kesirli türevin mertebesi 0-2 aralığında alınarak oluşturulan kesirli diferensiyel denklemler üzerinde çalışılmış ve bu denklemlerin çözümlerinin daima sönümlü salınımlılığa sahip olduğu ortaya konulmuştur (Naber 2010).

4.2. Sönümlü Salınımlı Kesirli Diferensiyel Denklemler

Sönümlü salınım hareketi gösteren pek çok fiziksel sistemin klasik metotlarla tam anlamıyla açıklanması mümkün değildir. Ancak son zamanlarda, geleneksel olan (kesirsiz) ve geleneksel olmayan (kesirli) durumları açıklamada, kesirli hesapların klasik hesaplardan daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir (Wang 1999).

Tez çalışmamızın bu kesiminde "Linear fractionally damping oscillator" (Naber 2010) makalesi esas alınacaktır. $0 \leq v \leq 1$ olmak üzere

$$D_t^2 x + \lambda D_t^v x + w^2 x = 0$$

şeklindeki denklemlerin çözümleri ve çözümlerin davranışları incelenecektir. Burada λ ve w pozitif sabitleri sırasıyla sönüm ve onarım (düzenleme) katsayıları olarak adlandırılır. Öncelikle kesirli duruma ışık tutması ve karşılaştırma yapılabilmesi açısından $v = 1$ olması durumundaki kesirsiz hali ele alınacaktır.

Kesirli Olmayan Durum

Teorem 4.1: 2. mertebeden

$$D_t^2 x + \lambda D_t x + w^2 x = 0\,, \quad (\lambda, w \in \mathbb{R}^+ \text{ sabitler}) \tag{4.3}$$

adi diferensiyel denklemi

$$x(0) = x_o, \quad D_t x(0) = x_1 \tag{4.4}$$

başlangıç koşullarıyla ele alındığında bu denklemin çözümü sadece $\lambda < 2w$ olması durumunda sönümlü salınımlıdır.

İspat: (4.3) denklemine (4.4) başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$s^2 X(s) - s x_0 - x_1 + \lambda(sX(s) - x_0) + w^2 X(s) = 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. (4.5) den

$$X(s) = \frac{sx_0}{s^2 + \lambda s + w^2} + \frac{x_1 + \lambda x_0}{s^2 + \lambda s + w^2} \tag{4.6}$$

yazılır.

(4.6) denkleminin ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek için Browich çevresel integrali kullanılabilir. Çünkü s, (4.6) da tamsayı kuvvetlere sahiptir ve çevrede dallanma kesimi olmayacaktır. (4.6)'ya ters Laplace dönüşümü uygulandığında

$$x(t) = Rezidü(X, s) - \frac{1}{2\pi i}\int e^{st} X(s)\, ds \tag{4.7}$$

elde edilir. (4.7)'deki Browich integralinin çevresi Şekil 4.1'den görüldüğü gibi $\gamma - i\infty$ dan $\gamma + i\infty$ 'a uzanır daha sonra pozitif yönde yarım çember oluşturarak $\gamma - i\infty$ 'a döner.Burada γ, (4.6)'nın tüm kutup noktalarını solunda bırakacak şekilde seçilen keyfi bir reel sayıdır. (4.7)'nin hesaplanmasında Browich integralinin katkısı bulunmamaktadır. Çünkü Jordan lemmasından bu integral sıfıra eşittir. (4.6) dan rezidü hesabı için kutuplar incelendiğinde;

$$s^2 + \lambda s + w^2 = 0 \tag{4.8}$$

denkleminin köklerine bağlı olarak:

a) Eğer $\lambda > 2w$ ise

$$s_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4w^2}}{2} \tag{4.9}$$

şeklinde farklı negatif iki reel kök vardır. (Basit kutup)

b) Eğer $\lambda = 2w$ ise

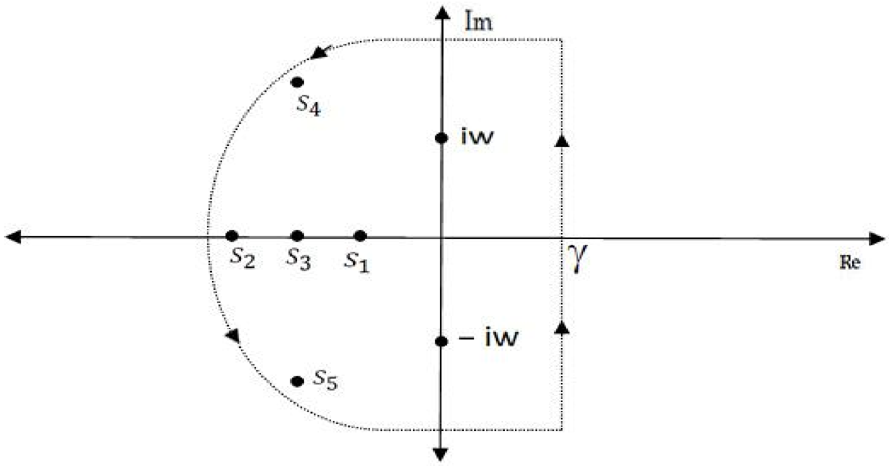
$$s_3 = \frac{-\lambda}{2} = -w \tag{4.10}$$

şeklinde birbirine eşit iki negatif reel kök vardır. (İki katlı kutup)

c) Eğer $\lambda < 2w$ ise

$$s_{4,5} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{4w^2 - \lambda^2}}{2} \tag{4.11}$$

şeklinde reel kısımları negatif olan kompleks eşlenik iki kök vardır. (Basit kutup)



Şeki 4.1 Kesirsiz duruma ait kutuplar

Sırasıyla bu durumlar için rezidü hesabı yapıldığında;

a) $Rezid$ü $= \lim_{S\to S_{1,2}}(s-s_{1,2})e^{st}\left(\frac{Sx_0}{S^2+\lambda s+w^2}+\frac{x_1+\lambda x_0}{S^2+\lambda s+w^2}\right)$ (4.12)

olur. Bu durumda (4.3) denkleminin $\lambda > 2w$ için çözümü

$$x(t) = \frac{e^{s_1 t}}{2s_1+\lambda}(s_1x_0+x_1+\lambda x_0)+\frac{e^{s_2 t}}{2s_2+\lambda}(s_2x_0+x_1+\lambda x_0) \quad (4.13)$$

biçiminde elde edilir. (4.13)deki s_1 ve s_2 negatif reel sayılar olduğundan $\lambda > 2w$ için (4.3) denkleminin çözümü daima üstel olarak azalacaktır. Bu durum aşırı sönümlülük olarak adlandırılır.

b) $Rezid$ü $= \lim_{S\to -w}\frac{d}{ds}\left((s+w)^2e^{st}\left(\frac{sx_0+x_1+\lambda x_0}{s^2+\lambda s+w^2}\right)\right)$ (4.14)

$$= \lim_{S\to -w}\frac{d}{ds}\left(e^{st}(sx_0+x_1+2wx_0)\right) \quad (4.15)$$

dir. Buradan (4.3) denkleminin $\lambda = 2w$ için çözümü

$$x(t) = e^{-wt}(t(wx_0+x_1)+x_0) \quad (4.16)$$

şeklindedir. Ve bu durum kritik sönümlülük olarak adlandırılır.

c) $Rezid\ddot{u} = \lim_{S\to S_{4,5}}(s - s_{4,5})e^{st}\left(\frac{sx_0}{s^2+\lambda s+w^2} + \frac{x_1+\lambda x_0}{s^2+\lambda s+w^2}\right)$

olur. Buradan (4.3) denkleminin $\lambda < 2w$ için çözümü

$$x(t) = e^{-\alpha t}\left(x_0 Cos(\partial t) + \frac{2x_1 + \lambda x_0}{2\partial} Sin(\partial t)\right) \tag{4.17}$$

şeklinde elde edilir. (s = $\alpha \pm$ i ∂ yani $\alpha = \frac{\lambda}{2}$, $\partial = \sqrt{w^2 - \frac{\lambda^2}{4}}$)

Bu durumda kutuplar kompleks olduğundan üstel fonksiyon sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden yazılmıştır. Bu fonksiyonlar çözüme salınımlılık sağlarken $e^{-\alpha t}$ ($\alpha = \frac{\lambda}{2} > 0$) sönüm etkisi yapmaktadır. Bu durum sönümlü salınımlılık olarak adlandırılır.

Ayrıca $\lambda = 0$ (sönüm katsayısı) olma durumu ele alınırsa bu durumda kutuplar $\pm iw$ şeklinde olacağından denklemin çözümü (4.17)'ye benzer şekilde olacaktır. Ancak $\alpha = 0$ olacağından sönüm görülmeyecektir. Bu duruma ise sönümsüz salınımlık denilmektedir.

Kesirli Durum

Teorem 4.2: $\boldsymbol{\lambda, w} \in \mathbb{R}^+$ sabitler **ve** $0 < v < 1$ olmak üzere

$$D_t^2 x + \lambda D_t^v x + w^2 x = 0 \tag{4.18}$$

kesirli diferensiyel denklemi

$$x(0) = x_0, \quad D_t x(0) = x_1 \tag{4.19}$$

başlangıç koşulları altında daima sönümlü salınımlıdır.

İspat: (4.18) denklemine (4.19) başlangıç koşulları göz önünde bulundurularak Laplace dönüşümü uygulanırsa (2.100) den

$$s^2 X(s) - sx_0 - x_1 + \lambda(s^v X(s) - s^{v-1}x_0) + w^2 X(s) = 0 \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20) den

$$X(s) = \frac{sx_0 + x_1 + \lambda s^{v-1}x_0}{s^2 + \lambda s^v + w^2} \tag{4.21}$$

yazılabilir.(4.21) denkleminin ters Laplace dönüşümünü hesaplayabilmek için Henkel çevresel integrali kullanılabilir.Çünkü s'nin kuvveti kesirli değer içerdiğinden Şekil 4.2 de görüldüğü gibi çevrede dallanma kesimi olacaktır.(4.7) deki Bromwich çevresel integraline benzer şekilde burada da Henkel çevresel integrali sıfıra eşittir.

Kesirsiz durumdakine benzer biçimde Rezidü hesabının yapılabilmesi için

$$s^2 + \lambda s^v + w^2 = 0 \tag{4.22}$$

denkleminin köklerini bulmak gerekmektedir. (4.22) denkleminde s = $re^{i\theta}$ alınarak denklem reel ve sanal kısımlarına ayrıldığında

$$r^2 Cos(2\theta) + \lambda r^v Cos(v\theta) + w^2 = 0 \tag{4.23}$$

$$r^2 Sin(2\theta) + \lambda r^v Sin(v\theta) = 0 \tag{4.24}$$

denklemleri elde edilir.

(4.22) denkleminin reel ve imajiner eksenler üzerinde kökleri yoktur. (4.25)

Çünkü;

(i) Pozitif reel eksen üzerinde kök olsaydı $\theta = 0$ için (4.23) ve (4.24) sağlanmalıydı. Ancak (4.23) denkleminin her bir terimi $\theta = 0$ için pozitif değer alacağından hiçbir zaman toplamları sıfır olmaz. Dolayısıyla (4.23) $\theta = 0$ için sağlanmaz.

(ii) Negatif reel eksen üzerinde kök olsaydı $\theta = \pi$ için (4.23) ve (4.24) sağlanmalıydı. Ancak bu durumda da (4.24) denkleminin birinci terimi sıfırken ikinci terimi asla sıfır olamaz. Yani $\theta = \pi$ için (4.24) denklemi sağlamaz.

Benzer biçimde $\theta = \pi/2$ ve $\theta = 3\pi/2$ için (4.23) ve (4.24)'ün aynı anda sağlamadığı gösterilerek imajiner eksen üzerinde de kök olmadığı görülebilir.

Ayrıca sağ yarı düzlemde de kök yoktur. (4.26)

Çünkü $0 < v < 1$ için (4.24) denkleminin her iki terimi de burada daima pozitif olur.

(4.25) ve (4.26) dan, (4.22) denkleminin çözümü (kökleri) varsa kompleks eşlenik olmalıdır. O halde argümenti $\pi/2 < \theta < \pi$ veya $-\pi/2 > \theta > -\pi$ arasında olmalıdır. Kökleri bulmak için öncelikle θ'nın pozitif değerleri ele alınıp (4.24) denkleminden r çekilerek (4.23) denkleminde yerine yazıldığında

$$\left(\frac{-\lambda Sin(v\theta)}{Sin2\theta}\right)^{\frac{2}{2-v}} Cos2\theta + \lambda \left(\frac{-\lambda Sin(v\theta)}{Sin2\theta}\right)^{\frac{v}{2-v}} Cos(v\theta) + w^2 = 0 \qquad (4.27)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlendiğinde

$$\left(\frac{\left(Sin(v\theta)\right)^v}{\left(Sin(2\theta)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2-v}} Sin\left((2-v)\theta\right) = \left(\frac{w}{\lambda^{\frac{1}{2-v}}}\right)^2 \qquad (4.28)$$

eşitliğine ulaşır. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için $\mathrm{Sin}((2-v)\,\theta)$ değerinin daima pozitif olması gerekmektedir. Bu ise sadece tanım kümesinin $\pi/2 < \theta < \pi/(2-v)$ şeklinde kısıtlanmasıyla mümkündür.

Verilen $w,\ \lambda, v$ değerlerinden bağımsız olarak $\pi/2 < \theta < \pi/(2-v)$ kısıtlanmış kümesinde (4.28)'i sağlayacak şekilde en az bir θ değeri mevcuttur. Çünkü

$$\lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \left(\frac{\left(Sin(v\theta)\right)^v}{\left(Sin(2\theta)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2-v}} Sin\left((2-v)\theta\right) = \infty \qquad (4.29)$$

ve

$$\lim_{\theta \to \left(\frac{\pi}{2-v}\right)^-} \left(\frac{\left(Sin(v\theta)\right)^v}{\left(Sin(2\theta)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2-v}} Sin\left((2-v)\theta\right) = 0$$

limitleri vardır. O halde (4.28)'in sol tarafı θ'ya göre süreklidir. Bu da (4.28)'in en az bir çözümü olduğunu garantilemektedir. Yani rezidü hesabı için en azından iki kutup noktası mevcuttur.

Ayrıca kısıtlanmış θ'lar için (4.28) tek bir çözüme sahiptir. Çünkü

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(\frac{\left(Sin(v\theta)\right)^v}{\left(Sin(2\theta)\right)^2}\right)^{\frac{1}{2-v}} Sin\left((2-v)\theta\right)\right] \qquad (4.30)$$

türevinin sıfırdan küçük olduğu kabul edilir ve bazı cebirsel düzenlemeler yapılırsa

$$v^2 Sin^2(2\theta) - 4v Sin(2\theta) Sin(v\theta) Cos((2-v)\theta) + 4 Sin^2(v\theta) > 0 \qquad (4.31)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizliğin sol tarafındaki tüm terimler pozitiftir. Kısıtlanmış θ'lar için

$$Sin(v\theta) > 0,\ Sin(2\theta) < 0 \text{ ve } Cos\left((2-v)\theta\right) \leq 1 \qquad (4.32)$$

olduğundan (4.31)

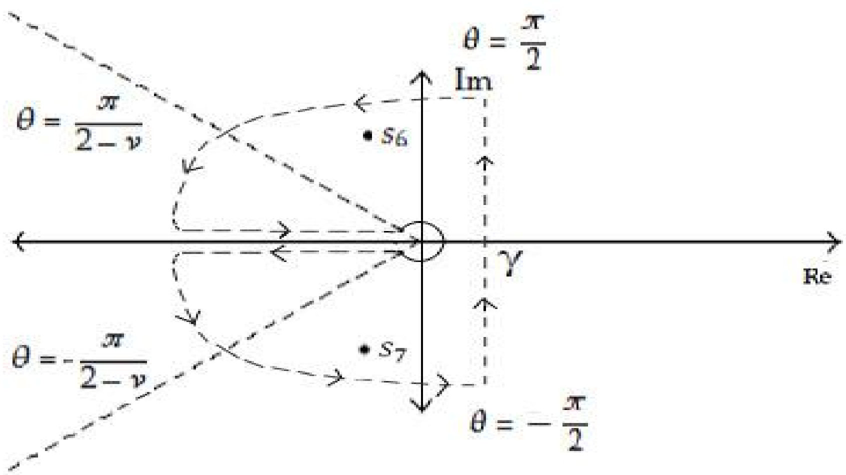
$$v^2 Sin^2(2\theta) - 4v Sin(2\theta) Sin(v\theta) + 4 Sin^2(v\theta) > 0 \qquad (4.33)$$

şeklinde yazılabilir.

(4.33) denklemi bir tam karedir ve daima sıfırdan büyüktür. Dolayısıyla (4.30)'un sıfırdan küçük olduğu kabulü doğrudur. O halde (4.28)'in sol tarafı monoton azalandır. Böylece (4.28) , $\pi/2 < \theta < \pi/(2-v)$ aralığında daima pozitif açılı bir çözüme sahiptir. Yani rezidü hesabı için kompleks eşlenik iki kutup noktası mevcuttur. Bu kutup noktaları

$$S_{6,7} = \beta \pm i\sigma = re^{\pm i\theta} \qquad (\overline{S}_6 = s_7\ ) \qquad (4.34)$$

şeklindedir. Burada β daima negatiftir ve kutuplar Şekil 4.2 den görüldüğü gibi 2. ve 3. çeyrektedir.



Şekil 4.2 Kesirli duruma ait kutuplar

Bu kutup noktaları için rezidü hesabı yapıldığında

$$Rezidü = \lim_{S\to S_6}(s-s_6)e^{st}\left(\frac{sx_0+x_1+\lambda s^{v-1}x_0}{s^2+\lambda s^v+w^2}\right)+\lim_{S\to S_7}(s-s_7)e^{st}\left(\frac{sx_0+x_1+\lambda s^{v-1}x_0}{s^2+\lambda s^v+w^2}\right)$$

$$= e^{S_6 t}\left(\frac{s_6x_0+x_1+x_0\lambda s_6{}^{v-1}}{2s^6+v\lambda s_6^{v-1}}\right)+e^{\overline{S_6}t}\left(\frac{\bar{s}_6x_0+x_1+x_0\lambda \bar{s}_6^{v-1}}{2\bar{s}_6+v\lambda \bar{s}_6^{v-1}}\right) \quad (4.35)$$

olur. (4.35)'te bazı cebirsel düzenlemeler yapılırsa Rezidü

$$2e^{\beta t}Cos(\sigma t)\frac{x_0\left(2r^2+v\lambda^2r^{2v-2}+\lambda r^v(v+2)Cos\big(\theta(v-2)\big)\right)+x_1\left(2rCos(\theta)+v\lambda r^{v-1}Cos\big(\theta(v-1)\big)\right)}{4r^2+4v\lambda^v r^v Cos\big((2-v)\theta\big)+v^2\lambda^{2v}r^{2v-2}}$$

$$+2e^{\beta t}Sin(\sigma t)\frac{x_0\left(\lambda r^v(v-2)Sin\big(\theta(v-2)\big)\right)+x_1\left(2rSin(\theta)+v\lambda r^{v-1}Sin\big(\theta(v-1)\big)\right)}{4r^2+4v\lambda\ \ r^v Cos\big((2-v)\theta\big)+v^2\lambda^2r^{2v-2}} \quad (4.36)$$

haline gelir.Çevresel integralin tek katkısı negatif reel eksen boyunca olan yoldan gelir.Buradan

$$x(t)=\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty \frac{(Rx_0-x_1)Sin(v\pi)+(x_0/R)(R^2+w^2)Sin\big(\pi(v-1)\big)}{(R^2+w^2)^2+2\lambda R^v(R^2+w^2)Cos(v\pi)+(\lambda R^v)^2}e^{-Rt}R^v dR \quad (4.37)$$

(4.18) denkleminin çözümüdür ve genel olarak

$$x(t)=Ae^{\beta t}Cos(\sigma t)+\beta e^{\beta t}Sin(\sigma t)-\ \text{(Azalan fonksiyon)} \quad (4.38)$$

şeklindedir.

Burada sinüs ve kosinüs fonksiyonları çözüme salınım sağlarken $e^{\beta t}$ $(\beta < 0\ )$ sönüm etkisi yapmaktadır. Yani (4.18) denkleminin çözümü her zaman sönümlü salınımlıdır. Kesirsiz durumla karşılaştırıldığında (4.17) ve (4.38) çözümlerinin benzer olduğu görülür. $e^{\beta t}$ ile kesirsiz durumdaki $e^{-\alpha t}= e^{-\frac{\lambda}{2}t}$ benzer özelliktedir. (4.38)'de farklı olarak bir azalan fonksiyon terimi vardır. $v\to 0$ ve $v\to 1$ kesirli olmayan durumlara doğru gidildikçe bu fonksiyon beklendiği gibi sıfıra gider.

5. BAGLEY-TORVİK DENKLEMLERİNİN DAHA GENEL BİR DURUMUNUN ÇÖZÜMLERİNİN DAVRANIŞI

Bu tez çalışmasının orijinal bölümünü oluşturan bu bölümde Bagley–Torvik denklemlerinin daha genel bir durumu olan

$$\left[\boldsymbol{D}^{2n} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{D}^{1/2} + \boldsymbol{\mu}\right]\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

denkleminin çözümlerinin davranışını ortaya koyan bir teoreme ve ispatına yer verilecektir.

Teorem 5.1: λ ve $\mu \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\left[D^{2n} + \lambda D^{1/2} + \mu\right]y(t) = 0 \tag{5.1}$$

olmak üzere (5.1) kesirli lineer homojen diferensiyel denkleminin her çözümü $\lambda < \lambda_0 = 4n\left(\frac{\mu}{4n-1}\right)^{\frac{4n-1}{4n}}$ için salınımlıdır.

İspat:
(5.1) denklemine ilişkin karakteristik polinom

$$P(s) = s^{4n} + \lambda s + \mu \tag{5.2}$$

dir.

$$C: x = s \;\text{ ve } y = s^{4n} \tag{5.3}$$

$$L_s: y + \lambda x + \mu = 0 \tag{5.4}$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$P(s) = 0 \tag{5.5}$$

karakteristik denklemine ait reel kökler (5.3) eğrisi ve (5.4) doğrunun kesim noktalarıdır.Burada sadece L_s doğrusunun C eğrisine teğet olması durumunda (5.5)'in tekrarlı reel kökleri mevcuttur.

s_0 noktasında L_s doğrusu C eğrisine teğet olsun. Bu durumda C eğrisinin S_0 noktasındaki türevinin değeri L_s doğrusunun eğimine eşit olacağından

$$4ns_0^{4n-1} = -\lambda \tag{5.6}$$

olur. Ayrıca s_0, (5.5)'i sağlamalıdır. Yani

$$s_0^{4n} + \lambda s_0 + \mu = 0 \tag{5.7}$$

olmalıdır.

(5.6), (5.7) de yerine yazıldığında

$$s_0^{4n} - 4ns_0^{4n-1}s_0 + \mu \ = 0$$

veya

$$s_0^{4n} - 4ns_0^{4n} + \mu \ = 0$$

olur.Buradan

$$|s_0| \ = \left(\frac{\mu}{4n-1}\right)^{\frac{1}{4n}} \tag{5.8}$$

elde edilir.

(5.8), (5.6) da yerine yazıldığında, $\lambda > 0$ olduğundan

$$\lambda_0 = 4n\left(\frac{\mu}{4n-1}\right)^{\frac{4n-1}{4n}} \tag{5.9}$$

biçiminde C ve L_s doğrularının teğet oldukları s_0 noktasındaki λ_0 katsayısı elde edilir. Dolayısıyla $\lambda > \lambda_0$ için C eğrisi ve L_s doğrusunun iki farklı noktada kesiştiği ve $\lambda < \lambda_0$ için C eğrisi ve L_s doğrusunun kesişmediği görülür.

Buradan (5.5) karakteristik denkleminin köklerine ait üç durum ortaya çıkar.

(i) $\lambda_0 < \lambda < \infty$ ise iki farklı reel kök vardır. Diğer kökler karmaşıktır.

(ii) $\lambda_0 = \lambda$ ise eşit iki reel kök vardır. Diğer kökler karmaşıktır.

(iii) $0 < \lambda < \lambda_0$ ise tüm kökler karmaşıktır

Ayrıca bu karmaşık köklerden hepsinin reel kısmı sıfırdan farklıdır. Bunu göstermek için $s = re^{i\theta}$ şeklinde (5.5) denklemini sağlayan bir karmaşık kök ele alınırsa

$$(re^{i\theta})^{4n} + \lambda\left(re^{i\theta}\right) + \mu = 0 \tag{5.10}$$

olur.(5.10) düzenlenirse

$$r^{4n}e^{i4n\theta} + \lambda re^{i\theta} + \mu = 0$$

veya

$$r^{4n}(Cos(4n\theta) + iSin(4n\theta)) + \lambda r(Cos\theta + iSin\theta) + \mu = 0 \tag{5.11}$$

elde edilir.
(5.11) denkleminin reel ve sanal kısmı ayrıldığında

$$r^{4n}Cos(4n\theta) + \lambda rCos\theta + \mu = 0 \tag{5.12}$$

$$r^{4n}\ Sin(4n\theta) + \lambda rSin\theta = 0 \tag{5.13}$$

denklemleri elde edilir.

(5.5) denkleminin reel kısmı sıfır olan bir karmaşık köke sahip olduğunu kabul edelim o halde $\theta = \pi/2$ veya $\theta = 3\pi/2$ için (5.12) ve (5.13) denklemlerin her ikisi de sağlanmalıdır. $\theta = \pi/2$ için (5.13)'in sol tarafı daima pozitif olduğundan eşitlik sağlanmaz.Benzer şekilde $\theta = 3\pi/2$ içinde (5.13) eşitliğinin sol tarafı daima negatif olacağından eşitlik sağlanmaz. Bu ise (5.2) denklemine ait tüm karmaşık köklerin reel kısımlarının sıfırdan farklı olması gerektiğini gösterir.

Yani $0 < \lambda < \lambda_0$ aralığındaki tüm kökler $s = a + ib$ (a ≠0, b ≠0) olacak biçimdeki karmaşık sayılar olmalıdır. (5.14)

Teorem 3.1.5.1'e göre (5.1) denkleminin bir çözümü ($v = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ ve $m = 1,2, \ldots ,4n$)

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} E_t\left(-\frac{k}{2}, s_m^2\right) \tag{5.15}$$

şeklindedir. (5.15) düzenlenirse

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \left[s_m E_t(0, s_m^2) + E_t\left(-\frac{1}{2}, s_m^2\right)\right] \tag{5.16}$$

olur.

E_t fonksiyonunun (2.21) ve (2.27) özelliklerinden faydalanılarak (5.16)

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \, [s_m e^{s_m^2 t} + s_m^2 \, E_t\left(\frac{1}{2}, s_m^2\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.17}$$

şeklinde yazılır. (2.26) dan

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [s_m e^{S_m^2 t} + s_m^2 (s_m^2)^{-\frac{1}{2}} e^{S_m^2 t} \, Erf(s_m^2 t)^{\frac{1}{2}} + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.18}$$

dır. (5.18) düzenlendiğinde

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [s_m e^{S_m^2 t} + s_m e^{S_m^2 t} Erf\left(s_m t^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}]$$

olur.Buradan

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [\, s_m e^{S_m^2 t} \left(1 + Erf\left(s_m t^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.19}$$

dir. (2.44) den

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [\, s_m e^{S_m^2 t} \left(1 - Erf\left(-s_m t^{\frac{1}{2}}\right)\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}]$$

olur. (2.43) den

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [\, s_m e^{S_m^2 t} \left(1 - \left(1 - Erfc\left(-s_m t^{\frac{1}{2}}\right)\right)\right) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}]$$

dir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [s_m e^{S_m^2 t} \, Erfc\left(-s_m t^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.20}$$

elde edilir. (5.14)'den, (5.5) denkleminin tüm köklerinin $0 < \lambda < \lambda_0$ için $s = a + ib$ (a $\neq$ 0 ve b $\neq$ 0) şeklindeki karmaşık sayılar olduğu bilinmektedir. (5.20) denkleminde $s_m = a + ib$ yazılırsa

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m[\, s_m e^{(a+ib)^2 t}\, Erfc\left(-s_m t^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.21}$$

olur. (5.21) den

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m[\, s_m e^{(a^2-b^2)t}\big(Cos(2abt) + iSin(2abt)\big)Erfc\left(-s_m t^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] \tag{5.22}$$

elde edilir.

Burada $\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$ ifadesi azalan olup $y_1(t)$ çözümü sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını içerdiğinden salınımlıdır.

Teorem 3.1.4.1 gereği $\left(v = \frac{1}{2} \quad nv = 4n.\frac{1}{2} = 2n\right)$ (5.1) denkleminin $2n$ tane lineer bağımsız çözümü vardır.Bu çözümler

$$y_{j+1}(t) = D^j y_1(t), \qquad j = 0,1,2, \ldots, 2n-1$$

şeklindedir.

$j =$ 0 için (5.15)'den

$$y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} E_t\left(-\frac{k}{2}, s_m^2\right) \tag{5.23}$$

$j =$ 1 için

$$y_2(t) = Dy_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} DE_t(-\frac{k}{2}, s_m^2) \tag{5.24}$$

$j =$ 2 için

$$y_3(t) = D^2 y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} D^2 E_t(-\frac{k}{2}, s_m^2) \tag{5.25}$$

$$\ldots. \qquad \ldots$$

$j = n-1$ için

$$y_n(t) = D^{n-1} y_1(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} D^{n-1} E_t(-\frac{k}{2}, s_m^2) \tag{5.26}$$

olur.(2.32) den faydalanarak (5.26) denklemi

$n \geq 2$ için

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} \, (s_m^{2(n-1)} \, E_t(-\frac{k}{2}, s_m^2) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k} \, t^{-\frac{k}{2}+k-(n-1)}}{\Gamma\left(-\frac{\mathrm{k}}{2} + \mathrm{k} + 1 - (\mathrm{n}-1)\right)}$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$y_n(t) \quad = \sum_{m=1}^{4n} A_m \sum_{k=0}^{1} s_m^{1-k} \, (s_m^{2n-2} E_t(-\frac{k}{2}, s_m^2) + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k} \, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{k}}{2} + 2 - \mathrm{n}\right)}$$

olur. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$y_n(t) \quad = \sum_{m=1}^{4n} A_m [s_m (s_m^{2n-2} \, E_t(0, s_m^2)) + s_m^{2n-2} E_t(-\frac{1}{2}, s_m^2)] + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k} \, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 2 - n\right)} \tag{5.27}$$

elde edilir.

(5.27) denklemi E_t ve Erf fonksiyonlarının (2.21) ve (2.27) özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [s_m^{2n-1} e^{s_m^2 t} + s_m^{2n-2} s_m^2 E_t\left(\frac{1}{2}, s_m^2\right) + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k} \, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{k}}{2} + 2 - \mathrm{n}\right)} \tag{5.28}$$

elde edilir. (2.26)' dan (5.28)

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m [\, s_m^{2n-1} e^{s_m^2 t} + s_m^{2n} (s_m^2)^{-1/2} e^{s_m^2 t} Erf(s_m^2 t)^{1/2} + \frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}] + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k} \, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{\mathrm{k}}{2} + 2 - \mathrm{n}\right)} \tag{5.29}$$

dir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} A_m[\, s_m^{2n-1} e^{s_m^2 t}(1 + Erf(s_m t^{\frac{1}{2}}) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}] + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k}\, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2-n\right)} \tag{5.30}$$

olur. (2.43) ve (2.44) den, (5.30)

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} [s_m^{2n-1} e^{s_m^2 t} Erfc(-s_m t^{\frac{1}{2}}) \quad] + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k}\, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2-n\right)} \tag{5.31}$$

halini alır. (5.14) den $0 < \lambda < \lambda_0$ için tüm köklerin $s = a + ib \ (a \neq 0, b \neq 0)$ şeklindedir. (5.31) de yerine yazıldığında

$$y_n(t) = \sum_{m=1}^{4n} [\, s_m^{2n-1} e^{(a+ib)^2 t} Erfc\left(-S_m t^{1/2}\right) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k}\, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2-n\right)}$$

olur ve bu eşitlik düzenlendiğinde

$$y_n(t) \quad = \sum_{m=1}^{4n} [\, S_m^{2n-1} e^{(a^2-b^2)t}\left(Cos(2abt) + iSin(2abt)\right) Erfc(-S_m t^{1/2}) + \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k}\, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2-n\right)} \tag{5.32}$$

son halini alır.

(5.32) de

$$\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{s_m^{2k}\, t^{\frac{k}{2}+1-n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+2-n\right)}$$

ifadesi azalan olup, $n \geq 2$ için tüm $y_n(t)$ çözümleri salınımlı olur. (5.22) ve (5.32) den görüleceği gibi ele aldığımız (5.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Ayrıca $|b| > |a|$ olması durumunda sönümlüdür.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında öncelikle kesirli hesaplar ve kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin çözümleri hakkında bilgi verilmiştir. Ardından literatürde yer alan Bagley-Torvik denklemlerine ait çalışmalardan yola çıkarak tezin orijinal bölümü oluşturulmuştur.Bu bölümde Bagley-Torvik denklemlerinin daha genel bir durumu olan

$$\left[\boldsymbol{D}^{2n} + \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{D}^{1/2} + \boldsymbol{\mu}\right]\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

kesirli mertebeden diferensiyel denkleminin çözümlerinin belirli şartlar altında daima salınımlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar, daha farklı kesirli mertebe içeren diferensiyel denklemlerin çözümleri ve çözümlerinin davranışlarının incelendiği çalışmalarda kullanılabilir. Bunun yanı sıra kesirli mertebeli fark denklemleri ve kesirli mertebeli kısmi türevli denklemlerin çözümleri ve çözümlerinin davranışlarını incelemede de yol gösterici olabilir.

KAYNAKLAR

Arfken G.B. and Weber H.J., 1995, "Mathematical Methods for Physicist", Fourth Edition, Akademic Pres, Sen Diego, USA

Bagley, R.L. and Torvik P.J., 1984, "On the appearance of the of the fractional derivative in the behavior of real materials", Trans. ASME J. Appl. Mech., June, vol.51, 294-298.

Bayın, S., 2004, "Fen ve Mühendislik Bilimlerinde Matematik Yöntemler", Ders Kitapları Anonim Şirketi, Geliştirilmiş ikinci baskı, İstanbul, Türkiye

Butzer, P.L. and Westphal, U., 2000, "An Introduction to Fractional Calculus", Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientic, New Jersey, USA

Bologna, M., 2004, "Short introduction to fractional calculus", International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 2, 41-54

Dalir, M. and Bashaur, M., 2010 "Applications of fractional calculus", Mathematical Sciences, Vol. 4, 1021 – 1032

Miller, K. S. and Ross, B., 1993, "An Introdiction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations", John Wiley & Sons Inc., New York, USA.

Naber, M., 2010, "Linear fractionally damped oscillator", International Journal of Differential Equations, Article ID 197020, doi:10.1155/2010/197020, 12 pages

Nataraj, P.S.V., 2010, "Fractional Calculus and Fractional Differential Equations with SCILAB", SGGS IE & T, Nanded, April 23-25

Podlubny, I., 1999, "Fractional Differential Equations", Academic Pres.

Ray, S.S and Bera, R.K., 2005, "Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method", Appl. Math. Comput., Vol. 168, 398-410

Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I., 1993, "Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications", Gordon and Breach, Longhorne

Song, L., Xu, S. and Yang, Y., 2010, "Dynamical models of happiness with fractional order", Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol.15, issue 3, 616-628

Trinks, C. and Ruge, P., 2002, " Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory integral" Computational Mechanics, Vol. 29, 471-476

Oldham, K. B., Spanier, J., 1974, "The Fractional Calculus", Academic Press, NewYork and London.

Wang, Z.H. and Wang X., 2010 “General Solution of the Bagley-Torvik Equation with Fractional Order Derivative”, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, Vol. 15, 1279-1285

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** Nevin BİLGİÇLİ

Doğum yeri **:** İstanbul

Doğum Tarihi **:** 02.12.1980

Medeni Hali **:** Bekar

Yabancı Dili **:** İngilizce

Eğitim durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Başkent Lisesi (1994 – 1998)

Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (1999 – 2004)

Yüksek Lisans: **1.** Afyon Kocatepe Üniversitesi
Matematik Öğretmenliği (2005 – 2006)
2. Selçuk Üniversitesi
İşletme Bölümü (2006 – 2007)
3. Afyon Kocatepe Üniversitesi
Matematik Bölümü (2008 -)

Çalıştığı Kurumlar ve Yıl

1. Karaman – Göktepe Lisesi (2008 – 2010)
2. Yozgat – Bahadın Lisesi (2010 -)