1. GİRİŞ

Son zamanların dikkat çeken yeni çalışmalarından birisi de zaman skalası teosidir. Zaman skalası 1988 yılında Stefan Hilger tarafından ortaya atılmıştır. Stefan Hilger diskret analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla bu teoriyi ortaya atmıştır. Bunun için de her ikisini kapsayan bir küme almıştır ve bu kümeye zaman skalası demiştir. Daha sonra da örneklerde göreceğiz ki zaman skalasını reel sayılar aldığımızda sürekli analiz ile, tam sayılar aldığımızda ise diskret analiz ile çakışmaktadır.

Reel sayıların boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, Cantor kümesi gibi $\mathbb{R}$ nin kapalı alt kümeleri birer zaman skalasıdır. Fakat, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, $(0,1)$ birer zaman skalası değildir. Hemen aklımıza neden "kapalı alt kümeler" diye bir soru gelebilir. Bunun sebebi reel sayıların açık alt kümelerinin yığılma noktalarının hepsini içermemesidir.

Sürekli analizdeki ve diskret analizdeki hemen hemen her şey örneğin süreklilik, türev, integral, sınır değer problemi ve tümevarım gibi kavramlar zaman skalasında tekrar tanımlanmıştır. Buradan da anlaşılacağı gibi zaman skalası bildiklerimizi daha genele taşımıştır. Yani zaman skalasında $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ birer özel haldir. Kısaca sıçrama operatörlerinin tanımları ile bu durumları örneklendirebiliriz. $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ bir operatör ve $t \in \mathbb{T}$, $t < \max \mathbb{T}$ için $\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ ile σ ileri sıçrama operatörü tanımlanır. $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ bir operatör ve $t \in \mathbb{T}, t > \min \mathbb{T}$ için $\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ ile ρ geri sıçrama operatörü tanımlanır. Eğer $t < \sigma(t)$ ise t noktasına sağ-yayılmış nokta, eğer $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ-yoğun nokta, eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına sol-yayılmış nokta, eğer $\rho(t) = t$ ise t noktasına sol-yoğun nokta denir. Eğer burada özel olarak; $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa, her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) = t = \rho(t)$ olur. Diğer yandan, her $t \in \mathbb{T}$ için $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa, $\sigma(t) = t + 1$ ve $\rho(t) = t - 1$ olur.

Zaman skalası diferensiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. $\mathbb{R}$ de tanımlı diferensiyel denklemler veya $\mathbb{Z}$ de tanımlı fark denklemleri için bir sonuç vermek yerine, reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesi olan $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem göz önüne alınabilir. Bu nedenle zaman skalası sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil aynı zamanda mümkün diğer uzaylar için de sonuç verme imkanı sağlar. Son zamanlarda $q^{\mathbb{N}_0}$ da tanımlanan q-fark denklemlerine dikkat çekilmiştir.

Dinamik denklemler üzerine odaklanmış olan zaman skalası çalışmalarının çoğunda, başlangıç değer problemlerini çözmek için Laplace dönüşümü metodu kullanılmıştır. $\mathbb{Z}$ için Z-dönüşümü ile $\mathbb{R}$ için Laplace dönüşümü Hilger tarafından zaman skalasında ortak bir dönüşümle birleştirilmiştir. Fakat bu dönüşüm çok özel zaman skalaları için geçerlidir. Bu zaman skalalarını kullanmak oldukça zordur. Daha sonra M. Bohner ve A. Peterson bu dönüşümü geliştirerek zaman skalalarında daha geniş kullanım alanları sağlamışlardır. M. Bohner ve G. Guseinnov, zaman skalasında genelleştirilmiş integraller ve iki katlı integraller üzerinde yapmış oldukları tanımlamalarla bu alanda çalışma imkanını genişletmişlerdir.

İntegral eşitsizlikleri analiz ve uygulamalarında önemli bir rol oynar. Bu integral eşitsizliklerinden biri de Hardy integral eşitsizliğidir. M. Bohner ve A. Peterson tarafından bazı temel integral eşitsizliklerinin zaman skalası versiyonları elde edilmiştir. Zaman skalasında elde edilen Gronwall, Hölder, Minkowski, Jensen, Opial ve Lyapunov eşitsizlikleri dinamik eşitsizlikler başlığı altına alınmıştır. Bu eşitsizliklerle ilgili zaman skalasında bir çok çalışmalar yapılmıştır.

Hardy integral eşitsizliği analiz ve uygulamalarında önemli bir role sahiptir. Hardy integral eşitsizliği, 1920 yılında G. H. Hardy tarafından ifade ve ispat edilmiştir. Zaman skalasında Hardy integral eşitsizliği, Pavel Řehák tarafından 2004 yılında ispatlanmış ve aynı zamanda bu eşitsizliğin yarı-lineer dinamik denklemlere uygulamaları verilmiştir. Özellikle 1988 yılından sonra Hardy integral eşitsizliği ile ilgili çalışmalar yoğunlaşmıştır.

B. Yang tarafından Hardy integral eşitsizliğinin yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir. 2003 yılında, A. Čižmešija, J. Pečarić ve L.-E. Persson tarafından kuvvetlendirilmiş Hardy integral eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir.

Bu çalışmada zaman skalasında kuvvetlendirilmiş Hardy integral eşitsizliği ifade ve ispat edildi. Ayrıca 2005 yılında S. Kaijser tarafından ifade ve ispat edilen n -boyutlu Hardy integral eşitsizliğinin zaman skalası versiyonu 2-boyutlu olarak; 2006 yılında L. Bougoffa tarafından elde edilen birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliği zaman skalasında ifade ve ispat edildi.

Tezin son bölümünde ise zaman skalasında Young, Hölder, Minkowski, Jensen eşitsizlikleri ilk olarak ∇-türev, daha sonra $\Diamond_\alpha$-türev kullanarak elde edildi. $\Diamond_\alpha$-türev, Δ ve ∇ türevlerin lineer kombinasyonu olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla $\Diamond_\alpha$-türev kullanarak elde edilen Young, Hölder, Minkowski, Jensen eşitsizlikleri zaman skalasında yeni genelleştirmelerdir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanımlar, teoremler, bazı eşitsizlikler ve temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1: Reel sayıların boş olmayan kapalı bir alt kümesine zaman skalası denir ve $\mathbb{T}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için

$$\sigma(t) := \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

şekinde tanımlı $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne ileri sıçrama operatörü denir.

Tanım 2.3: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için

$$\rho(t) := \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

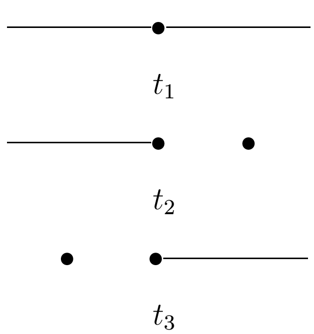
şekinde tanımlı $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ operatörüne geri sıçrama opetatörü denir.

Tanım 2.4: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) := \sigma(t) - t \text{ ve } \nu(t) := t - \rho(t)$$

fonksiyonlarına graininess fonksiyonu denir.

Tanım 2.5: Eğer $\sigma(t) > t$ ise t noktasına sağ-yayılmış nokta, eğer $\rho(t) < t$ ise t noktasına sol-yayılmış nokta denir. Eğer bir nokta hem sağ-yayılmış hemde sol-yayılmış ise o noktaya izole nokta denir. Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t noktasına sağ-yoğun nokta, eğer $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t noktasına sol-yoğun nokta denir. Eğer bir nokta hem sağ-yoğun hem de sol-yoğun ise o noktaya yoğun nokta denir. Bu nokta tanımları şekillerle aşağıdaki gibi gösterilir.



t_1, sol-yoğun ve sağ-yoğun bir noktadır.

t_2, sol-yoğun ve sağ-yayılmış bir noktadır.

t_3, sol-yayılmış ve sağ-yoğun bir noktadır.

• • • t_4, sol-yayılmış ve sağ-yayılmış bir noktadır.

t_4

Dolayısıyla t_1 noktası yoğun, t_4 ise izole bir noktadır.

Tanım 2.6: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ de sağ-yoğun noktalarda sağ limiti mevcut, sol-yoğun noktalarda sol limiti mevcut ise f fonksiyonuna düzgündür(regulated) denir.

Tanım 2.7: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. Bu durumda t_0 sol-yoğun noktasında f nin sol limiti mevcut ve t_0 sağ-yoğun noktasında f sürekli ise f fonksiyonuna t_0 noktasında sağ-yoğun süreklidir denir.

Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$ nin her noktasında sağ-yoğun sürekli ise bu fonksiyona sağ-yoğun sürekli fonksiyon denir.

Sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir.

Örnek 2.1:

$$\mathbb{T} := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{2\} \cup \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

olsun. $f : \mathbb{T} \to \{0, 1\}$ olmak üzere

$$f(t) := \begin{cases} t, & t \neq 2 \\ 0, & t = 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f fonksiyonu $\mathbb{T}$ nin izole noktalarında süreklidir. 0 sağ-yoğun noktasını göz önüne alırsak, 0 noktasında f fonksiyonunun sağ limiti mevcut ve $f(0)$ a eşittir. Böylece 0 noktasında f fonksiyonu süreklidir. 2 sol-yoğun noktasında ise f fonksiyonu sürekli değilken 2 noktasında f fonksiyonunun sol limiti mevcutur. Dolayısıyla f fonksiyonu sürekli olmamasına rağmen sağ-yoğun süreklidir.

Tanım 2.8: $\mathbb{T}^\kappa$ kümesi

$$\mathbb{T}^\kappa := \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & \text{eğer } \mathbb{T} \text{ sol-yayılmış maksimum } m \text{ noktasına sahipse,} \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bazı fonksiyonların zaman skalası türevi, tüm zaman skalaları üzerindeki her noktada özellikle zaman skalasının sonlu en küçük üst sınır noktasında tanımlı olmayabilir. Bununla birlikte, $\mathbb{T}^\kappa$ nın tüm noktalarında zaman skalası türevi tanımlıdır. Aşağıdaki tanımda zaman skalasında türev için $\mathbb{T}^\kappa$ kümesine ihtiyacımız olduğunu göreceğiz.

Tanım 2.9: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ olmak üzere t nin bir $U = (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

olacak şekilde bir $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi(Δ-türevi) denir. Bununla beraber, her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f^\Delta(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}^\kappa$ da diferensiyellenebilirdir denir. $f^\Delta : \mathbb{T}^\kappa \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin $\mathbb{T}^\kappa$ daki Δ-türevi denir.

Örnek 2.2: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $f(t) = t^2$ ile tanımlı ise $f^\Delta(t) = t + \sigma(t)$ dir. $\varepsilon > 0$ için, her $s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left| f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s] \right| &\leq \left| (\sigma^2(t) - s^2) - (t + \sigma(t))(\sigma(t) - s) \right| \\
&= \left| (\sigma(t) - s) \right| \left| \sigma(t) + s - (t + \sigma(t)) \right| \\
&\leq \left| (\sigma(t) - s) \right| \left| s - t \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|
\end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 2.1: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

i. Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ-diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

ii. Eğer f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktası sağ-yayılmış nokta ise f fonksiyonunun t noktasındaki Δ-diferensiyeli

$$f^\Delta(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

iii. Eğer t sağ-yoğun nokta ise f fonksiyonunun t noktasında Δ-diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

limitinin mevcut ve sonlu olmasıdır. Bu durumda bu limit $f^{\Delta}(t)$ eşittir.

iv. Eğer f, t noktasında Δ-diferensiyellenebilir ise

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.2: $f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ noktasında Δ-diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda;

i. $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ toplamı t noktasında Δ-diferensiyellenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

dir.

ii. $\alpha\in\mathbb{R}$ için $\alpha f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, t noktasında Δ-diferensiyellenebilirdir ve

$$(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$$

dir.

iii. $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ çarpımı t noktasında Δ-diferensiyellenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))+f(t)g^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$$

dir.

iv. Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$, t noktasında Δ-diferensiyellenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)+f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.3: $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli, $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde Δ-diferensiyellenebilir ve $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $[t,\sigma(t)]$ reel aralığında

$$(f\circ g)^{\Delta}(t)=f^{'}(g(c))g^{\Delta}(t)$$

olacak şekilde bir c sayısı mevcuttur [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.4: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ iki fonksiyon olsun. Bu durumda;

$i.$ Eğer f sürekli ise sağ-yoğun süreklidir.

$ii.$ Eğer f sürekli ve g düzgün ise $f\circ g$ düzgündür.

$iii.$Eğer f sürekli ve g sağ-yoğun sürekli ise $f\circ g$ sağ-yoğun süreklidir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Tanım 2.10: $\mathbb{T}_{\kappa}$ kümesi

$$\mathbb{T}_{\kappa}:=\begin{cases}\mathbb{T}-\{m\}, & \text{eğer } \mathbb{T} \text{ sağ-yayılmış minimum } m \text{ noktasına sahipse,}\\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.11: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon>0$ için $\delta>0$ olmak üzere t nin bir $U=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left|f(\rho(t))-f(s)-f^{\nabla}(t)[\rho(t)-s]\right|\leq\varepsilon\left|\rho(t)-s\right|$$

olacak şekilde bir $f^{\nabla}(t)$ sayısı mevcut ise bu sayıya f fonksiyonunun t noktasındaki nabla türevi(∇-türevi) denir. Bununla beraber, her $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ için $f^{\nabla}(t)$ mevcut ise f ye $\mathbb{T}_{\kappa}$ da diferensiyellenebilirdir denir. $f^{\nabla}:\mathbb{T}_{\kappa}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f nin $\mathbb{T}_{\kappa}$ daki ∇-türevi denir.

Teorem 2.5: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}_{\kappa}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

$i.$ Eğer f, t noktasında ∇-diferensiyellenebilir ise f, t noktasında süreklidir.

$ii.$ Eğer f, t noktasında sürekli ve t noktası sol-yayılmış nokta ise f in t noktasındaki ∇-diferensiyeli

$$f^{\nabla}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

dir.

iii. Eğer t sol-yoğun ise f fonksiyonunun t noktasında ∇-diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin mevcut ve sonlu olmasıdır. Bu durumda bu limit $f^{\nabla}(t)$ eşittir.

iv. Eğer f, t noktasında diferensiyellenebilir ise

$$f(\rho(t)) = f(t) + \nu(t) f^{\nabla}(t)$$

dir [Atıcı F.M. ve Guseinov G.Sh. 2002].

Teorem 2.6: $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{T}_\kappa$ noktasında ∇-diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda;

i. $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ toplamı t noktasında ∇-diferensiyellenebilir ve

$$(f+g)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) + g^{\nabla}(t)$$

dir.

ii. $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, t noktasında ∇-diferensiyellenebilir ve

$$(\alpha f)^{\nabla}(t) = \alpha f^{\nabla}(t)$$

dir.

iii. $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında ∇-diferensiyellenebilir ve

$$(fg)^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) g(\rho(t)) + f(t) g^{\nabla}(t) = f^{\nabla}(t) g(t) + f(\rho(t)) g^{\nabla}(t)$$

dir.

iv. Eğer $g(t)g(\rho(t)) \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$, t noktasında ∇-diferensiyellenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\nabla}(t) = \frac{f^{\nabla}(t) g(t) + f(t) g^{\nabla}(t)}{g(t) g(\rho(t))}$$

dir [Atıcı F.M. ve Guseinov G.Sh. 2002].

Teorem 2.7: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ-diferensiyellenebilir ve f^Δ, $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde ∇-diferensiyellenebilir ve her $t \in \mathbb{T}_\kappa$ için

$$f^\nabla(t) = f^\Delta(\rho(t))$$

yazılır [Atıcı F.M. ve Guseinov G.Sh. 2002].

Teorem 2.8: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde ∇-diferensiyellenebilir ve f^∇, $\mathbb{T}_\kappa$ üzerinde sürekli ise f fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde Δ-diferensiyellenebilir ve her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için

$$f^\Delta(t) = f^\nabla(\sigma(t))$$

yazılır [Atıcı F.M. ve Guseinov G.Sh. 2002].

Tanım 2.12: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, f fonksiyonu $\mathbb{T}$ üzerinde Δ ve ∇ diferensiyellenebilir olsun. Bu durumda $0 \le \alpha \le 1$ olmak üzere, $t \in \mathbb{T}$ için $f^{\diamond_\alpha}(t)$ diamond-α dinamik türev

$$f^{\diamond_\alpha}(t) = \alpha f^\triangle(t) + (1-\alpha) f^\triangledown(t)$$

şeklinde tanımlıdır [Sheng Q., Fadag M., Henderson J. ve Davis J.M. 2006]. Böylece f fonksiyonunun diamond-α dinamik diferensiyellenebilir olması için gerek ve yeter şart, f fonksiyonunun Δ ve ∇ diferensiyellenebilir olmasıdır. $\alpha = 1$ için diamond-α dinamik türev standart Δ-türeve, $\alpha = 0$ için standart ∇-türeve dönüşür. $\alpha \in (0,1)$ için diamond-α dinamik türev "ağırlıklı dinamik türev" i gösterir.

Teorem 2.9: $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}$ noktasında diamond-α diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

i. $f + g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında diamond-α diferensiyellenebilir ve

$$(f+g)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t) + g^{\diamond_\alpha}(t)$$

dir.

ii. c herhangi bir sabit olmak üzere, $cf : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında diamond-α diferensiyellenebilir ve

$$(cf)^{\diamond_\alpha}(t) = cf^{\diamond_\alpha}(t)$$

dir.

iii. $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $t \in \mathbb{T}$ noktasında diamond-α diferensiyellenebilir ve

$$(fg)^{\diamond_\alpha}(t) = f^{\diamond_\alpha}(t)g(t) + \alpha f^\sigma(t)g^\Delta(t) + (1-\alpha)f^\rho(t)g^\nabla(t)$$

dir.

iv. Eğer $g(t)g(\sigma(t))g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$, t noktasında $\diamond_\alpha$diferensiyellenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\diamond_\alpha}(t) = \frac{1}{g(t)g(\sigma(t))g(\sigma(t))}(f^{\diamond_\alpha}(t)g^\sigma(t)g^\rho(t) - \alpha f^\sigma(t)g^\rho(t)g^\Delta(t)$$
$$-(1-\alpha)f^\rho(t)g^\sigma(t)g^\nabla(t))$$

dir [Sheng Q., Fadag M., Henderson J. ve Davis J.M. 2006].

Tanım 2.13: a, $b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olmak üzere $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $[a,b]$ aralığı

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \quad t_i \in \mathbb{T}$$

özelliğini sağlayan $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim.

$$P := \{t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n\}$$

kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması denir.

$$[t_0, t_1) \cap \mathbb{T}, [t_1, t_2) \cap \mathbb{T}, \ldots, [t_{n-2}, t_{n-1}) \cap \mathbb{T}, [t_{n-1}, t_n] \cap \mathbb{T}$$

aralıklarına $[a,b] \cap \mathbb{T}$ nin P parçalanmasına karşılık gelen alt aralıkları denir. Bu parçalanmaların sınıfı $\wp(a,b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.14: $\delta > 0$ olsun. $(t_{i-1}, t_i) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$ olmak üzere her $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için

$$t_i - t_{i-1} \leq \delta$$

ise $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ ile verilen $P \in \wp(a,b)$ parçalanışı δ-parçalanışı olarak adlandırılır. Bu parçalanış $\wp_\delta(a,b)$ ile gösterilir.

Tanım 2.15: $f : [a,b] \cap \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P \in \wp(a,b)$ olsun. $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$ olmak üzere $\tau_i \in \mathbb{T}$ için

$$S := \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

toplamına P ye karşılık gelen Riemann Δ-toplamı denir.

$\varepsilon > 0$ için

$$|S - I| < \varepsilon$$

olacak sekilde $\delta > 0$ vardır öyleki herhangi bir $P \in \wp(a,b)$ ye karşılık gelen f nin Riemann Δ-toplamı için I mevcut ise, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann Δ-integrallenebilirdir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann Δ-integrali

$$\int_a^b f(t)\Delta t$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.16: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ olmak üzere $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun Δ-integrali denir ve $t \in \mathbb{T}$ için

$$\int_a^t f(\tau)\Delta\tau = F(t) - F(a)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.3: a, $b \in \mathbb{T}$ ve $0 \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t\sigma(t)}$
bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b \frac{\Delta t}{t\sigma(t)} = -\frac{1}{t}\bigg|_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

dir.

Teorem 2.10: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sağ-yoğun sürekli bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise

$$\int_{t}^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.11: Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sağ-yoğun sürekli fonksiyonlar ise

i. $\displaystyle\int_{a}^{b} [f(t) + g(t)]\,\Delta t = \int_{a}^{b} f(t)\Delta t + \int_{a}^{b} g(t)\Delta t$

ii. $\displaystyle\int_{a}^{b} \alpha f(t)\Delta t = \alpha \int_{a}^{b} f(t)\Delta t$

iii. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\Delta t = -\int_{b}^{a} f(t)\Delta t$

iv. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\Delta t = \int_{a}^{c} f(t)\Delta t + \int_{c}^{b} f(t)\Delta t$

v. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$

vi. $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)g^{\Delta}(t)\Delta t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_{a}^{b} f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))\Delta t$

vii. $\displaystyle\int_{a}^{a} f(t)\Delta t = 0$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Tanım 2.17: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $t \in \mathbb{T}_{\kappa}$ için $F^{\nabla}(t) = f(t)$ olmak üzere $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun ∇-integrali denir ve her $t \in \mathbb{T}$ için

$$\int_{a}^{t} f(\tau)\nabla\tau = F(t) - F(a)$$

ile gösterilir.

Teorem 2.12: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sol-yoğun sürekli bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}_\kappa$ ise

$$\int_{\rho(t)}^{t} f(\tau)\nabla\tau = \nu(t)f(t)$$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.13: Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ sol-yoğun sürekli fonksiyonlar ise

i. $\int_a^b [f(t) + g(t)]\nabla t = \int_a^b f(t)\nabla t + \int_a^b g(t)\nabla t$

ii. $\int_a^b \alpha f(t)\nabla t = \alpha \int_a^b f(t)\nabla t$

iii. $\int_a^b f(t)\nabla t = -\int_b^a f(t)\nabla t$

iv. $\int_a^b f(t)\nabla t = \int_a^c f(t)\nabla t + \int_c^b f(t)\nabla t$

v. $\int_a^b f(\sigma(t))g^\nabla(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(t)\nabla t$

vi. $\int_a^b f(t)g^\nabla(t)\nabla t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^\nabla(t)g(\rho(t))\nabla t$

vii. $\int_a^a f(t)\nabla t = 0$

dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Teorem 2.14: $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon ve $\tilde{\mathbb{T}} = \gamma(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. $\tilde{\mathbb{T}}$ üzerinde tanımlı delta türev $\tilde{\Delta}$ ile gösterilsin. Kabul edelim ki $\mathbb{T}$ nin her sonlu aralığında $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ-integrallenebilir, γ fonksiyonu Δ-diferensiyellenebilir ve γ^Δ, $\mathbb{T}$ nin her sonlu alt aralığında Δ-integrallenebilir olsun. Bu durumda $f\ \gamma^\Delta$ Δ-integrallenebilir ve $a, b \in \mathbb{T}$

için
$$\int_a^b f(t)\gamma^{\Delta}(t)\Delta t = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \left(f \circ \gamma^{-1}\right)(s)\tilde{\Delta} s$$
dir [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

Tanım 2.18: $a, t \in \mathbb{T}$, ve $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $0 \leq \alpha \leq 1$ olmak üzere, h nin a dan t ye diamond-α integrali
$$\int_a^t h(\tau)\Diamond_\alpha \tau = \alpha \int_a^t h(\tau)\Delta\tau + (1-\alpha)\int_a^t h(\tau)\nabla\tau$$
dir.

$\Diamond_\alpha$-integral, Δ ve ∇ integrallerin lineer birleşimidir. Burada dikkat edilmelidir ki $t \in \mathbb{T}$ için
$$\left(\int_a^t h(\tau)\Diamond_\alpha \tau\right)^{\Diamond_\alpha} = h(t)$$
eşitliği geçerli değildir [Sheng Q., Fadag M., Henderson J. ve Davis J.M. 2006].

Teorem 2.15: $a, b, t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

i. $\int_a^t [f(\tau) + g(\tau)]\Diamond_\alpha \tau = \int_a^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau + \int_a^t g(\tau)\Diamond_\alpha \tau,$

ii. $\int_a^t cf(\tau)\Diamond_\alpha \tau = c\int_a^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau,$

iii. $\int_a^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau = -\int_t^a f(\tau)\Diamond_\alpha \tau,$

iv. $\int_a^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau = \int_a^b f(\tau)\Diamond_\alpha \tau + \int_b^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau,$

v. $\int_a^a f(\tau)\Diamond_\alpha \tau = 0$

dir [Sheng Q., Fadag M., Henderson J. ve Davis J.M. 2006].

Teorem 2.16: $\mathbb{T}_\kappa^\kappa := \mathbb{T}^\kappa \cap \mathbb{T}_\kappa$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{T}_\kappa^\kappa$ ve $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlar olmak üzere

i. $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Diamond_\alpha \tau = \mu(t)\left(\alpha f(t) + (1-\alpha)f^\sigma(t)\right),$

ii. $\int_{\rho(t)}^t f(\tau)\Diamond_\alpha \tau = \nu(t)\left(\alpha f^\rho(t) + (1-\alpha)f(t)\right)$

dir [Sheng Q., Fadag M., Henderson J. ve Davis J.M. 2006].

Tanım 2.19: $\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ zaman skalaları verilsin.

$$\sigma(x) := \inf\{s \in \mathbb{T}_1 : s > x\} \text{ ve } \tau(y) := \inf\{t \in \mathbb{T}_2 : t > y\}$$

şekinde tanımlı $\sigma : \mathbb{T}_1 \rightarrow \mathbb{T}_1$ ve $\tau : \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{T}_2$ operatörlerine ileri sıçrama opetatörleri denir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Tanım 2.20: $a, b \in \mathbb{T}_1$ve $c, d \in \mathbb{T}_2$ olmak üzere $\mathbb{T}_1$ ve $\mathbb{T}_2$ zaman skalaları verilsin. $R = [a, b) \times [c, d) = \{(t, s) : t \in [a, b), s \in [c, d)\}$ şeklinde tanımlı $R \subset \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ bölgesine bir dikdörtgen bölge denir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Tanım 2.21: $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için t_1 in bir U_{t_1} komşuluğundaki her $s \in U_{t_1}$ için

$$\left| f(\sigma_1(t_1), t_2) - f(s, t_2) - f^{\Delta_1}(t_1, t_2)(\sigma_1(t_1) - s) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma_1(t_1) - s \right|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta_1}(t_1, t_2)$ sayısı mevcut ise bu sayıya f fonksiyonunun $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ noktasında Δ_1 kısmi türevi denir.

Eğer her $\varepsilon > 0$ için t_2 in bir U_{t_2} komşuluğundaki her $l \in U_{t_2}$ için

$$\left| f(t_1, \sigma_2(t_2)) - f(t_1, l) - f^{\Delta_2}(t_1, t_2)(\sigma_2(t_2) - l) \right| \leq \varepsilon \left| \sigma_2(t_2) - l \right|$$

olacak şekilde bir $f^{\Delta_2}(t_1, t_2)$ sayısı mevcut ise bu sayıya f fonksiyonunun $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ noktasında Δ_2 kısmi türevi denir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Tanım 2.22: $f : \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha_1 \in \mathbb{T}_1$ için $f(\alpha_1, t_2)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_2$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun süreklidir. Eğer her $\alpha_2 \in \mathbb{T}_2$ için $f(t_1, \alpha_2)$ fonksiyonu $\mathbb{T}_1$ de sağ-yoğun sürekli ise, f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun süreklidir.

Tanım 2.23: $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ üzerinde tanımlı $f(t_1, t_2)$ fonksiyonlarının sınıfı CC_{rd} ile gösterilir ve $f(t_1, t_2)$ fonksiyonı aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. f fonksiyonu t_1 noktasında sağ-yoğun süreklidir.

ii. f fonksiyonu t_2 noktasında sağ-yoğun süreklidir.

iii. x_1 ve x_2 sağ-yoğun veya maksimum noktalar olmak üzere, eğer $(x_1,x_2)\in\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2$ ise f fonksiyonu (x_1,x_2) noktasında süreklidir.

iv. Eğer x_1 ve x_2 noktalarının her ikiside sol-yoğun noktalar ise (x_1,x_2) noktası (t_1,t_2) noktasına yaklaşırken $f(t_1,t_2)$ fonksiyonunun limiti

$$R_{LL}(x_1,x_2)=\{(t_1,t_2): t_1\in[a,x_1]\cap\mathbb{T}_1,\ t_2\in[c,x_2]\cap\mathbb{T}_2\}$$

bölgesinin herhangi bir kısmında mevcuttur.

Tanım 2.24: $f: R\subset\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $A^{\Delta_1}=f$, $B^{\Delta_2}=A$ ve $\left(B^{\Delta_2}\right)^{\Delta_1}=f$ olsun. Bu durumda $a\le t\le b$ ve $c\le s\le d$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_c^d\int_a^b f(t,s)\Delta_1t\Delta_2s &:= \int_c^d \left(A(b,s)-A(a,s)\right)\Delta_2s\\ &= B(b,d)-B(b,c)-B(a,d)+B(a,c)\end{aligned}$$

dir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Tanım 2.25: $f: R\subset\mathbb{T}_1\times\mathbb{T}_2\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon, $C^{\Delta_2}=f$, $D^{\Delta_1}=C$ ve $\left(D^{\Delta_1}\right)^{\Delta_2}=f$ olsun. Bu durumda $a\le t\le b$ ve $c\le s\le d$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(t,s)\Delta_2s\Delta_1t &:= \int_a^b \left(C(t,d)-C(t,c)\right)\Delta_2s\\ &= D(b,d)-D(a,d)-D(b,c)+D(a,c)\end{aligned}$$

dir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Teorem 2.17: f sınırlı ve $R=[a,b)\times[c,d)$ de delta integrallenebilir bir fonksiyon ve her $t\in[a,b)$ için

$$I(t)=\int_c^d f(t,s)\Delta_2s$$

integrali mevcut olsun. Bu durumda

$$\int_a^b I(t)\Delta_1t = \int_a^b\Delta_1t\int_c^d f(t,s)\Delta_2s$$

integrali mevcuttur ve

$$\iint_R f(t,s)\Delta_1t\Delta_2s = \int_a^b\Delta_1t\int_c^d f(t,s)\Delta_2s$$

eşitliği sağlanır.

Burada t ve s nin rolleri değiştirilebilir. Bu durumda her $s \in [c,d)$ için

$$K(s) = \int_a^b f(t,s)\Delta_1 t$$

integrali mevcuttur. Böylece

$$\int_c^d K(s)\Delta_2 s \;=\; \int_c^d \Delta_2 s \int_a^b f(t,s)\Delta_1 t$$

ve

$$\iint_R f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s \;=\; \int_c^d \Delta_2 s \int_a^b f(t,s)\Delta_1 t$$

dir. Dolayısıyla

$$\int_a^b \Delta_1 t \int_c^d f(t,s)\Delta_2 s \;=\; \int_c^d \Delta_2 s \int_a^b f(t,s)\Delta_1 t$$

elde edilir [Bohner M. ve Guseinov G. Sh. 2005].

Teorem 2.18: $f : R \subset \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2 \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda iki katlı integraller için kısmi integrasyon formülleri

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \int_a^b f(\sigma(t), s) g^{\Delta_1}(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s \\
&\quad = -\int_c^d \int_a^b f^{\Delta_1}(t,s)g(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s + \int_c^d f(b,s)g(b,s)\Delta_2 s - \int_c^d f(a,s)g(a,s)\Delta_2 s
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d f(t, \tau(s)) g^{\Delta_2}(t,s)\Delta_2 s\Delta_1 t \\
&\quad = -\int_a^b \int_c^d f^{\Delta_2}(t,s)g(t,s)\Delta_2 s\Delta_1 t + \int_a^b f(t,d)g(t,d)\Delta_1 t - \int_a^b f(t,c)g(t,c)\Delta_1 t
\end{aligned}$$

şeklindedir [Ahlbrandt C. D. ve Morian C. 2002].

Teorem 2.19: f ve g sınırlı, $R = [a,b) \times [c,d)$ de delta integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu da R bölgesinde delta integrallenebilirdir ve

$$\iint_R [\alpha f(t,s) + \beta g(t,s)]\,\Delta_1 t\Delta_2 s = \alpha \iint_R f(t,s))\Delta_1 t\Delta_2 s + \beta \iint_R g(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s$$

yazılır.

Eğer f ve g sınırlı, $R = [a, b) \times [c, d)$ de delta integrallenebilir fonksiyonlar ise fg çarpımıda R de delta integrallenebilirdir [Bohner M. ve Guseinov G. Sh. 2005].

Teorem 2.20: $R = [a, b) \times [c, d)$ dikdirtgen bölgesi $R_1 = [a_1, b_1) \times [c_1, d_1)$ ve $R_2 = [a_2, b_2) \times [c_2, d_2)$ gibi iki dikdötrgen bölgenin birleşimi olsun. Bu durumda f fonksiyonu R_1 ve R_2 üzerinde delta integrallenebilir ise f fonksiyonu R de delta integrallenebilirdir ve

$$\iint_R f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s = \iint_{R_1} f(t,s))\Delta_1 t\Delta_2 s + \iint_{R_2} f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s$$

yazılır [Bohner M. ve Guseinov G. Sh. 2005].

Teorem 2.21 (Jensen eşitsizliği): $a, b \in \mathbb{T}$ ve $c, d \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer $g : [a, b] \to (c, d)$ fonksiyonu sağ-yoğun sürekli ve $F : (c, d) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve konveks ise

$$F\left(\frac{\int_a^b g(t)\Delta t}{b-a}\right) \leq \frac{\int_a^b F\left(g(t)\right)\Delta t}{b-a}$$

dır [Bohner M. ve Peterson A. 2001].

3. HARDY İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde zaman skalasında Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği ve 2-boyutlu Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği elde edilmiştir. Daha sonra zaman skalasında birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir. Bu bölümde verilecek sonuçları ifade etmeden önce Hardy integral eşitsizliklerini kısaca tanıtalım.

G. Hardy 1920 yılında aşağıdaki eşitsizliği vermiştir.

Eğer $a > 0$, $p > 1$, $f(x) \geq 0$ ve $0 < \int_a^\infty f^p(x)dx < \infty$ ise,

$$\int_a^\infty \left[\frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt\right]^p dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f^p(x)dx \tag{3.1}$$

dir. 1925 yılında ise aşağıdaki eşitsizliği ifade ve ispat etmiştir.

Eğer $p > 1$, $f(x) \geq 0$ ve $0 < \int_0^\infty f^p(x)dx < \infty$ ise,

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right]^p dx \quad < \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p(x)dx \tag{3.2}$$

Burada $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabiti mümkün olan en iyi sabittir.

Hardy integral eşitsizliği olarak adlandırılan bu eşitsizlik üzerine bir çok çalışmalar yapılmış ve yeni genelleştirmeleri elde edilmiştir.

Bu çalışmalardan biri de Kaijser tarafından yapılmıştır. f pozitif fonksiyon ve Φ, $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı konvesk fonksiyon olmak üzere,

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\frac{dx}{x} \quad \leq \quad \int_0^\infty \Phi\left(f(x)\right)\frac{dx}{x} \tag{3.3}$$

dir. Bu eşitsizlik Hardy-Knopp integral eşitsizliği olarak adlandırılmış ve Hardy integral eşitsizliğinin Hardy-Knopp integral eşitsizliğinin bir özel durumu olduğu ifade edilmiştir. Burada özel olarak $\Phi(u) = u^p$ seçilirse, Hardy eşitsizliğinin bir özel hali

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p \frac{dx}{x} \quad \leq \quad \int_0^\infty f^p(x)\frac{dx}{x},\ p > 1, \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. $g(x) = f(x^{\frac{p-1}{p}})x^{-\frac{1}{p}}$ olmak üzere (3.4) eşitsizliği

$$\int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt\right]^p dx \quad \leq \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty g^p(x)dx,\ p > 1, \tag{3.5}$$

şeklinde yeniden ifade edilebilir.

Daha sonra Čižmešija tarafından kuvvetlendirilmiş Hardy integral işitsizliği aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

Kabul edelim ki $0 < b \leq \infty$ ve $(0, b)$ aralığında tanımlı yerel integrallenebilir $x \to \frac{u(x)}{x^2}$ fonksiyonu için $u : (0, b) \to \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Ayrıca v fonksiyonu

$$v(t) = t \int_t^b \frac{u(x)}{x^2} dx, \; t \in (0, b)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $-\infty \leq a \leq c \leq \infty$ olmak üzere, eğer Φ, (a, c) aralığında tanımlı reel değerli konveks bir fonksiyon ise, her $x \in (0, b)$ için $f(x) \in (a, c)$ olacak şekilde $f : (0, b) \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonları

$$\int_0^b u(x)\Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)\frac{dx}{x} \quad \leq \quad \int_0^b v(x)\Phi\left(f(x)\right)\frac{dx}{x} \tag{3.6}$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla (3.6) eşitsizliği (3.3) Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliğinin genelleştirilmesidir.

n-boyutlu Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği Kaijser tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

$i = 1, 2, \ldots, n$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$ olmak üzere $0 < b_i \leq \infty$, $-\infty \leq a < c \leq \infty$ ve Φ, $[a, c]$ aralığında tanımlı pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer Φ konveks bir fonksiyon ise, $a < f(x) < c$ olacak şekilde $(0, b)$ aralığında tanımlı her f fonksiyonu için

$$\begin{aligned} &\int_0^{b_1} \cdots \int_0^{b_n} \Phi\left(\frac{1}{x_1 \ldots x_n}\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n\right)\frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n} \\ &\leq \int_0^{b_1} \cdots \int_0^{b_n} \Phi\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right)\left(1 - \frac{x_1}{b_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n}{b_n}\right)\frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n} \end{aligned} \tag{3.7}$$

dir.

Eğer Φ konkav bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} &\int_0^{b_1} \cdots \int_0^{b_n} \Phi\left(\frac{1}{x_1 \ldots x_n}\int_0^{x_1} \cdots \int_0^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)dt_1 \ldots dt_n\right)\frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n} \\ &\geq \int_0^{b_1} \cdots \int_0^{b_n} \Phi\left(f(x_1, \ldots, x_n)\right)\left(1 - \frac{x_1}{b_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{x_n}{b_n}\right)\frac{dx_1 \ldots dx_n}{x_1 \ldots x_n} \end{aligned}$$

dir.

Biz bu eşitsizliği keyfi zaman skalaları üzerinde 2-buyutlu olarak elde ettik. Birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliği ise Bougoffa tarafından 2006 yılında ifade edilmiştir:

$a \geq 0$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_n$ negatif olmayan fonksiyonlar olsun. $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $F_k(t) := \int\limits_0^t f_k(s)ds$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{F_1(t)F_2(t)\ldots F_n(t)}{t^n} \right)^{\frac{p}{n}} dt \quad < \quad \left(\tfrac{p}{np-n} \right)^p \int\limits_0^\infty \left(f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(t) \right)^p dt \tag{3.8}$$

dir. Bu eşitsizlik zaman skalasında bölümün sonunda ifade ve ispat edilmiştir. Zaman skalasında Hardy integral eşitsizliği ile ilgili ilk çalışma 2004 yılında Řehák tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada elde edilen sonuç aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1: $p > 1$ ve negatif olmayan f fonksiyonu için $\int\limits_a^\infty (f(s))^p \Delta s$ integrali mevcut ve sonlu olsun. $F(t) := \int\limits_a^t f(s)\Delta s$ şeklinde tanımlanmak üzere $f \ncong 0$ ise,

$$\int\limits_a^\infty \left(\frac{F^\sigma(t)}{\sigma(t)} \right)^p \Delta t \quad < \quad \left(\tfrac{p}{p-1} \right)^p \int\limits_a^\infty (f(t))^p \Delta t \tag{3.9}$$

dir. Eğer $t \to \infty$ için $\frac{\mu(t)}{t} \to 0$ ise, $\left(\frac{p}{p-1} \right)^p$ sabiti mümkün olan en iyi sabitttir[Řehák P. 2005].

İspat: Kabuledelim ki $f(a) > 0$ ve $\varphi(t) = \frac{F(t)}{t-a}$ olsun. Bu durumda $t \geq a$ için

$$\begin{aligned} (\varphi^\sigma)^p - \tfrac{p}{p-1} (\varphi^\sigma)^{p-1} f &= (\varphi^\sigma)^p - \tfrac{p}{p-1} (\varphi^\sigma)^{p-1} ((t-a)\varphi)^\Delta \\ &= (\varphi^\sigma)^p - \tfrac{p}{p-1} (\varphi^\sigma)^{p-1} \varphi^\sigma - \tfrac{p}{p-1} (\varphi^\sigma)^{p-1} (t-a) \varphi^\Delta \\ &= -\tfrac{1}{p-1} (\varphi^\sigma)^p - \tfrac{p}{p-1} (t-a) (\varphi^\sigma)^{p-1} \varphi^\Delta \end{aligned} \tag{3.10}$$

yazılır. $[(\varphi(t))^p]^\Delta = p\,(\eta(t))^{p-1} \varphi^\Delta(t)$ olacak şekilde $\varphi(t)$ ve $\varphi^\sigma(t)$ arasında $\eta(t)$ mevcuttur. $\mu(t) sgn \varphi^\Delta(t) = sgn\,(\varphi^\sigma(t) - \varphi(t))$ ve φ negatif olamayan bir fonksiyon olduğundan $t \geq a$ için, $p\,(\varphi^\sigma(t))^{p-1} \varphi^\Delta(t) \geq p\,(\eta(t))^{p-1} \varphi^\Delta(t) =$

$[(\varphi(t))^p]^\Delta$ dir. Bu yaklaşım ve (3.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\varphi^\sigma)^p - \tfrac{p}{p-1}(\varphi^\sigma)^{p-1} f &\leq -\tfrac{1}{p-1}(\varphi^\sigma)^p - \tfrac{1}{p-1}(\varphi^p)^\Delta (t-a) \\ &= -\tfrac{1}{p-1}\left((t-a)\varphi^p\right)^\Delta\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlik her $t \geq a$ için sağlandığından bu eşitsizliğin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s - \frac{p}{p-1}\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^{p-1} f(s)\Delta s \leq -\frac{1}{p-1}(t-a)(\varphi(t))^p \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $t \geq a$ için zaman skalasında Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s &\leq \tfrac{p}{p-1}\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^{p-1} f(s)\Delta s \\ &\leq \tfrac{p}{p-1}\left(\int_a^t (f(s))^p \Delta s\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned} \tag{3.11}$$

dir. (3.11) eşitsizliğinin her iki tarafı eşitsizliğin sağ tarafındaki son çarpan ile bölünür ve p. kuvveti alınırsa, $t \geq a$ için

$$\int_a^t (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s \leq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^p \int_a^t (f(s))^p \Delta s \tag{3.12}$$

bulunur. "$<$" yerine "$\leq$" olması ihmal edilirse $\int_a^\infty (\varphi^\sigma(t))^p \Delta t$ sonlu olduğundan $t \to \infty$ için (3.9) eşitsizliği elde edilir. $f \equiv 0$ olmaması durumunda (3.9) eşitsizliliğinin sadece "$<$" için sağlandığı gösterilmelidir. (3.11) eşitsizliğinde t yerine ∞ yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_a^\infty (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s &\leq \tfrac{p}{p-1}\int_a^\infty (\varphi^\sigma(s))^{p-1} f(s)\Delta s \\ &\leq \tfrac{p}{p-1}\left(\int_a^\infty (f(s))^p \Delta s\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^\infty (\varphi^\sigma(s))^p \Delta s\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

bulunur. C , t ye bağlı bir çarpan olmak üzere $t \geq a$ için $f(t) \neq C\varphi^\sigma(t)$ olduğunda yani f^p ve $(\varphi^\sigma)^p$ orantılı olmadıkça eşitsizlik kesin olarak küçüktür. Bu durumda $C = 1$ olduğu gösterilmelidir. Eğer a sağ-yayılmış ise,

$$\varphi^\sigma(a) = \frac{F^\sigma(a)}{\sigma(a)-a} = \frac{\mu(a) F(a)}{\mu(a)} = f(a),$$

eğer a sağ-yoğun ise,

$$\varphi^\sigma(a) = \varphi(a) = \lim_{t\to a}\frac{F(t)}{t-a} = \lim_{t\to a^+} f(t) = f(a)$$

dır. $f = C\varphi^\sigma$ ve $f(a) \neq 0$ olduğundan $C = 1$ bulunur. Bu ise sadece f fonksiyonunun sabit olması ile mümkündür. Fakat f fonksiyonunun sıfırdan farklı bir sabit fonksiyon olması $\int_a^\infty (f(s))^p \, \Delta s$ integralinin yakınsaklığı ile çelişir. Dolayısıyla, (3.11) eşitsizliğinden (3.12) eşitsizliğinin elde edildiği gibi

$$\int_a^\infty (\varphi^\sigma(s))^p \, \Delta s \quad < \quad \tfrac{p}{p-1}\left(\int_a^\infty (f(s))^p \, \Delta s\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^\infty (\varphi^\sigma(s))^p \, \Delta s\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.13}$$

eşitsizliğinden (3.9) elde edilir.

$t \to \infty$ için $\frac{\mu(t)}{t} \to 0$ olduğunda $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ sabitinin mümkün olan en iyi sabit olduğunu göstermek için $a < a' < b$ olmak üzere

$$f(t) = \begin{cases} 0 & for\ t \in [a, a')\,, \\ (t-a)^{-\frac{1}{p}} & for\ t \in [a', b]\,, \\ 0 & for\ t \in (b, \infty)\,, \end{cases}$$

alınırsa,

$$\int_a^\infty (f(t))^p \, \Delta t = \int_{a'}^{\sigma(b)} \frac{\Delta t}{t-a}$$

ve $t \in [a', b]$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F^\sigma(t) &= \int_a^{\sigma(t)} f(s)\Delta s \\ &= \int_{a'}^{\sigma(t)} (s-a)^{-\frac{1}{p}} \, \Delta s \\ &\geq \int_{a'}^{t} (s-a)^{-\frac{1}{p}} \, ds \\ &= \left(\tfrac{p}{p-1}\right)\left[(t-a)^{\frac{p-1}{p}} - (a'-a)^{\frac{p-1}{p}}\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\frac{F^\sigma(t)}{t-a} \quad \geq \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)\left[\frac{1-\left(\frac{a'-a}{t-a}\right)^{\frac{p-1}{p}}}{(t-a)^{\frac{1}{p}}}\right]$$

yazılır. Buradan

$$\left(\frac{F^{\sigma}(t)}{t-a}\right)^{p} \quad \geq \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^{p} \frac{1-\gamma_t}{t-a},$$

dir. Sonuç olarak $b \to \infty$ için $\delta_b \to 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left(\frac{F^{\sigma}(t)}{\sigma(t)-a}\right)^{p} \Delta t &= \int_{a'}^{\sigma(b)} \left(\frac{F^{\sigma}(t)}{t+\mu(t)-a}\right)^{p} \Delta t \\
&\geq \int_{a'}^{b} \left(\frac{F^{\sigma}(t)}{t-a}\right)^{p} \left(\frac{t-a}{t-a+\mu(t)}\right)^{p} \Delta t \\
&= \int_{a'}^{b} \left(\frac{F^{\sigma}(t)}{t-a}\right)^{p} \left(\frac{1}{1+\mu(t)/(t-a)}\right)^{p} \Delta t \\
&\geq \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^{p} (1-\delta_b) \int_a^{\infty} (f(t))^{p} \Delta t
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\delta > 0$ için

$$\int_a^{\infty} \left(\frac{F^{\sigma}(t)}{\sigma(t)-a}\right)^{p} \Delta t \quad < \quad \left(\tfrac{p}{p-1}\right)^{p} (1-\delta) \int_a^{\infty} (f(t))^{p} \Delta t$$

tipindeki herhangi bir eşitsizlik f yukarıdaki gibi ve b yeterince büyük seçilirse sağlanmaz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bizim elde ettiğimiz sonuçları göz önüne alalım.

Burada amaç Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliklerini keyfi zaman skalaları üzerinde ifade etmektir. Bu sonuçları elde etmek için Fubini teoreminden ve Jensen eşitsizliğinden yararlanılmıştır. Bölümün son kısmında ise birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliği ifade edilmiştir.

3.1 Kuvvetlendirilmiş Hardy İntegral Eşitsizliği

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $0 \leq a < b \leq \infty$ olmak üzere $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun.

Teorem 3.2: $\int_t^b \frac{u(x)}{(x-a)(\sigma(x)-a)} \Delta x$ delta integrali mevcut ve sonlu olmak üzere, $u \in C_{rd}([a,b),\mathbb{R})$ olsun. Ayrıca v fonksiyonu

$$v(t) = (t-a) \int_t^b \frac{u(x)}{(x-a)(\sigma(x)-a)} \Delta x, \; t \in [a,b)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, eğer $\Phi : (c,d) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve konveks ise, $f(x) \in (c,d)$ olacak şekilde her $f \in C_{rd}([a,b),\mathbb{R})$ delta integrallenebilir fonksiyonları

$$\int_a^b u(x) \Phi\left(\frac{1}{\sigma(x)-a} \int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right) \frac{\Delta x}{x-a} \quad \leq \quad \int_a^b v(x) \Phi\left(f(x)\right) \frac{\Delta x}{x-a} \qquad (3.14)$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat: $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ sağ-yoğun sürekli bir fonksiyon olsun. Jensen eşitsizliği ve Fubini teoreminden

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)\Phi\left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} &\leq \int_a^b u(x)\left(\int_a^{\sigma(x)} \Phi(f(t))\Delta t\right)\frac{\Delta x}{(x-a)(\sigma(x)-a)} \\
&= \int_a^b \Phi(f(t))\int_t^b \frac{u(x)}{(x-a)(\sigma(x)-a)}\Delta x\Delta t \\
&= \int_a^b v(t)\Phi\left(f(t)\right)\frac{\Delta t}{t-a}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi Teorem 3.1 in bazı uygulamalarını verelim.

Sonuç 3.1: Eğer u ağırlık fonksiyonu $u(x) \equiv 1$ şeklinde seçilirse,

$$v(x) = \begin{cases} (x-a)\int_x^b \frac{\Delta t}{(t-a)(\sigma(t)-a)} = 1 - \frac{x-a}{b-a}, & b < \infty \\ 1, & b = \infty \end{cases}$$

olur. Bu durumda $b < \infty$ için

$$\int_a^b \Phi\left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} \leq \int_a^b \left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)\Phi\left(f(x)\right)\frac{\Delta x}{x-a} \qquad (3.15)$$

yazılır. Ayrıca $b = \infty$ için

$$\int_a^\infty \Phi\left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} \leq \int_a^\infty \Phi\left(f(x)\right)\frac{\Delta x}{x-a} \qquad (3.16)$$

dır.

Sonuç 3.2: $p > 1$, f negatif olmayan bir fonksiyon, $\int_a^b f^p(x)\frac{\Delta x}{x-a}$ integrali mevcut ve sonlu olsun. Eğer Φ konveks fonksiyonu $\Phi(x) = x^p$ şeklinde seçilirse, $f \not\cong 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)^p \frac{\Delta x}{x-a} \leq \int_a^b \left(1-\frac{x-a}{b-a}\right) f^p(x)\frac{\Delta x}{x-a} \qquad (3.17)$$

yazılır.

Sonuç 3.3: f negatif olmayan bir fonksiyon, $\int_a^b f(x)\frac{\Delta x}{x-a}$ integrali mevcut ve sonlu olsun. Eğer Φ konveks fonksiyonu $\Phi(x) = e^x$ şeklinde seçilir ve $f(x)$

yerine $\ln f(x)$ yazılırsa, $f \ncong 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \exp\left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} \ln f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} \leq \int_a^b f(x)\frac{\Delta x}{x-a} \tag{3.18}$$

elde edilir.

3.2 2-Boyutlu Hardy İntegral Eşitsizliği

i. $a, b \in \mathbb{T}_1$ ve $0 \leq a < b$ olmak üzere $\mathbb{T}_1$ bir zaman skalası,

ii. $c, d \in \mathbb{T}_2$ ve $0 \leq c < d$ olmak üzere $\mathbb{T}_2$ bir zaman skalası,

iii. $R = [a, b) \times [c, d) = \{(t, s) : t \in [a, b), s \in [c, d)\}$ olmak üzere $R \subset \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ bir dikdörtgen bölge olsun.

Sonuçlarımızı vermeden önce ihtiyacımız olan aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 3.3 (Jensen eşitsizliği): $t, s \in R$ ve $-\infty \leq m < n \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in CC^1_{rd}(R, (m, n))$ ve $\Phi : (m, n) \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise,

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b\int_c^d f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s}{\int_a^b\int_c^d \Delta_1 t\Delta_2 s}\right) \leq \frac{\int_a^b\int_c^d \Phi\left(f(t,s)\right)\Delta_1 t\Delta_2 s}{\int_a^b\int_c^d \Delta_1 t\Delta_2 s} \tag{3.19}$$

dir.

İspat: Φ konveks bir fonksiyon olduğundan her $t \in (m, n)$ için $\beta \in \mathbb{R}$ mevcuttur öyleki $x_0 \in (m, n)$ için $\Phi(x) - \Phi(x_0) \geq \beta(x - x_0)$ dir.

$$x_0 = \frac{\int_a^b\int_c^d f(u,v)\Delta_1 u\Delta_2 v}{\int_a^b\int_c^d \Delta_1 u\Delta_2 v}$$

olsun. Böylece

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_c^d \Phi\left(f(t,s)\right)\Delta_1 t\Delta_2 s - \left(\int_a^b\int_c^d \Delta_1 t\Delta_2 s\right)\Phi\left(\frac{\int_a^b\int_c^d f(u,v)\Delta_1 u\Delta_2 v}{\int_a^b\int_c^d \Delta_1 u\Delta_2 v}\right)\\ &= \int_a^b\int_c^d \Phi\left(f(t,s)\right)\Delta_1 t\Delta_2 s - \left(\int_a^b\int_c^d \Delta_1 t\Delta_2 s\right)\Phi(x_0)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_c^d \{\Phi(f(t,s)) - \Phi(x_0)\} \Delta_1 t \Delta_2 s \\
&\geq \beta \int_a^b \int_c^d (f(t,s) - x_0) \Delta_1 t \Delta_2 s \\
&= \beta \left\{ \int_a^b \int_c^d f(t,s) \Delta_1 t \Delta_2 s - x_0 \int_a^b \int_c^d \Delta_1 t \Delta_2 s \right\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.4: f fonksiyonu $R \subset \mathbb{T}_1 \times \mathbb{T}_2$ üzerinde integrallenebilir bir fonksiyon ve $-\infty < \alpha < f(t,s) < \beta < \infty$ olmak üzere $f \in CC^1_{rd}(R, \mathbb{R})$ olsun. Eğer Φ fonksiyonu (α, β) aralığında tanımlı konveks ve pozitif bir fonksiyon ise,

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{1}{(\sigma(x)-a)(\tau(y)-c)} \int_a^{\sigma(x)} \int_c^{\tau(y)} f(t,s) \Delta_1 t \Delta_2 s \right) \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y}{(x-a)(y-c)} \\
&\qquad \leq \int_a^b \int_c^d \Phi(f(t,s)) \left(1 - \tfrac{t-a}{b-a}\right) \left(1 - \tfrac{s-c}{d-c}\right) \frac{\Delta_1 t \Delta_2 s}{(t-a)(s-c)}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

dir.

İspat: Φ konveks bir fonksiyon olsun. Jensen eşitsizliği ve Fubini teoreminden

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d \Phi\left(\frac{1}{(\sigma(x)-a)(\tau(y)-c)} \int_a^{\sigma(x)} \int_c^{\tau(y)} f(t,s) \Delta_1 t \Delta_2 s \right) \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y}{(x-a)(y-c)} \\
&\leq \int_a^b \int_c^d \left(\int_a^{\sigma(x)} \int_c^{\tau(y)} \Phi(f(t,s)) \Delta_1 t \Delta_2 s \right) \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y}{(x-a)(\sigma(x)-a)(y-c)(\tau(y)-c)} \\
&= \int_a^b \int_c^d \Phi(f(t,s)) \left(\int_t^b \int_s^d \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y}{(x-a)(\sigma(x)-a)(y-c)(\tau(y)-c)} \right) \Delta_1 t \Delta_2 s \\
&= \int_a^b \int_c^d \Phi(f(t,s)) \left(1 - \tfrac{t-a}{b-a}\right) \left(1 - \tfrac{s-c}{d-c}\right) \frac{\Delta_1 t \Delta_2 s}{(t-a)(s-c)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Sonuç 3.4: $p > 1$ bir sabit ve f fonksiyonu R de pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer Φ konveks fonksiyonu $\Phi(u) = u^p$ olarak seçilirse, $f \not\equiv 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d \left(\frac{1}{(\sigma(x)-a)(\tau(y)-c)} \int_a^{\sigma(x)} \int_c^{\tau(y)} f(t,s) \Delta_1 t \Delta_2 s \right)^p \frac{\Delta_1 x \Delta_2 y}{(x-a)(y-c)} \\
&\qquad \leq \int_a^b \int_c^d f^p(t,s) \left(1 - \tfrac{t-a}{b-a}\right) \left(1 - \tfrac{s-c}{d-c}\right) \frac{\Delta_1 t \Delta_2 s}{(t-a)(s-c)}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

dir.

Sonuç 3.5: f fonksiyonu R de pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer Φ konveks fonksiyonu $\Phi(u) = e^u$ şeklinde seçilir ve $f(x)$ yerine $\ln f(x)$ yazılırsa, $f \not\equiv 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\int_a^b \int_c^d \exp\left(\frac{1}{(\sigma(x)-a)(\tau(y)-c)} \int_a^{\sigma(x)} \int_c^{\tau(y)} \ln f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s\right) \frac{\Delta_1 x\Delta_2 y}{(x-a)(y-c)} \\ &\leq \int_a^b \int_c^d f(t,s)\left(1-\tfrac{t-a}{b-a}\right)\left(1-\tfrac{s-c}{d-c}\right)\frac{\Delta_1 t\Delta_2 s}{(t-a)(s-c)}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

dir.

3.3. Birden Çok Fonksiyon İçeren Hardy İntegral Eşitsizliği

Bu bölümde amacımız zaman skalasında birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliğini elde etmektir.

Teorem 3.4: $a \geq 0$ ve $f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonları negatif olmayan delta integrallenebilir fonksiyonlar olsun. $k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere, $F_k(t) := \int_a^t f_k(s)\Delta s$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\int_a^\infty \left(\frac{F_1^\sigma(t)F_2^\sigma(t)\ldots F_n^\sigma(t)}{(\sigma(t)-a)^n}\right)^{\frac{p}{n}} \Delta t \;<\; \left(\frac{p}{np-n}\right)^p \int_a^\infty (f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t))^p\,\Delta t \tag{3.23}$$

dır.

İspat: Jensen eşitsizliğinden

$$(F_1^\sigma(t)F_2^\sigma(t)\ldots F_n^\sigma(t))^{\frac{1}{n}} \;\leq\; \frac{\sum_{k=1}^n F_k^\sigma(t)}{n} \tag{3.24}$$

yazılır. Buradan

$$(F_1^\sigma(t)F_2^\sigma(t)\ldots F_n^\sigma(t))^{\frac{p}{n}} \;\leq\; \frac{\left(\sum_{k=1}^n F_k^\sigma(t)\right)^p}{n^p} \tag{3.25}$$

dır. Eşitsizliğin her iki tarafı $(\sigma(t)-a)^p$ ile bölünür ve $t \geq a$ için integral alınırsa

$$\int_a^\infty \left(\frac{F_1^\sigma(t)F_2^\sigma(t)\ldots F_n^\sigma(t)}{(\sigma(t)-a)^n}\right)^{\frac{p}{n}} \Delta t \;\leq\; \frac{1}{n^p}\int_a^\infty \left(\frac{F_1^\sigma(t)+F_2^\sigma(t)+\ldots+F_n^\sigma(t)}{\sigma(t)-a}\right)^p \Delta t \tag{3.26}$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafına (3.9) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\int_a^\infty \left(\frac{F_1^\sigma(t)F_2^\sigma(t)\ldots F_n^\sigma(t)}{(\sigma(t)-a)^n}\right)^{\frac{p}{n}} \Delta t \;<\; \left(\frac{p}{np-n}\right)^p \int_a^\infty (f_1(t)+f_2(t)+\ldots+f_n(t))^p\,\Delta t$$

bulunur.

4. DİNAMİK İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Bu bölümde amaç; Young, Hölder, Minkowski, Jensen eşitsizliklerini ilk olarak ∇-türev, daha sonra $\Diamond_\alpha$-türev kullanarak zaman skalasında elde etmektir. Young, Hölder, Minkowski, Jensen eşitsizlikleri Wong tarafından Δ-türev kullanılarak elde edilmiştir. Dolayısıyla $\Diamond_\alpha$-türev kullanarak elde edilen eşitsizlikler, Young, Hölder, Minkowski, Jensen eşitsizliklerinin zaman skalasında yeni genelleştirmeleridir. Bu bölüm boyunca, $a < b$ ve $a, b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olarak alınmıştır.

Teorem 4.1: $\mu \in C^1_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ azalan bir fonksiyon ve $\hat{\mathbb{T}} = \mu(\mathbb{T})$ bir zaman skalası olsun. Eğer $f \in C_{ld}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ise, $a, b \in \mathbb{T}$ için,

$$\int_a^b f(x)\mu^\nabla(x)\nabla x = \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} f(\mu^{-1}(y))\nabla y$$

dir.

İspat: $F^\nabla = f\mu^\nabla$ olsun. $f\mu^\nabla$ sağ-yoğun sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mu^\nabla(x)\nabla x &= \int_a^b F^\nabla(x)\nabla x \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \left(F \circ \mu^{-1}\right)(\mu(b)) - \left(F \circ \mu^{-1}\right)(\mu(a)) \\
&= \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} \left(F \circ \mu^{-1}\right)^{\widehat{\nabla}}(y)\widehat{\nabla} y \\
&= \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} \left(F^\nabla \circ \mu^{-1}\right)(y)(\mu^{-1})^{\widehat{\nabla}}(y)\widehat{\nabla} y \\
&= \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} \left((f\mu^\nabla) \circ \mu^{-1}\right)(y)(\mu^{-1})^{\widehat{\nabla}}(y)\widehat{\nabla} y \\
&= \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} f(\mu^{-1}(y)) \left[(\mu^\nabla \circ \mu^{-1})(\mu^{-1})^{\widehat{\nabla}}\right](y)\widehat{\nabla} y \\
&= \int_{\mu(a)}^{\mu(b)} f(\mu^{-1}(y))\widehat{\nabla} y
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2: $c > 0$ olmak üzere, $g \in C_{ld}([0, c], \mathbb{R})$ azalan bir fonksiyon olsun. Eğer $g(0)=0$, $a\in[0,c]$ ve $b\in[0,g(c)]$ ise,

$$ab \leq \int_0^a g^{\rho}(x)\nabla x+\int_0^b \left(g^{-1}\right)^{\rho}(y)\nabla y \tag{4.1}$$

dir.

İspat: $\rho(x)\leq x$ ve g^{-1} azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\int_0^b \left(g^{-1}\right)^{\rho}(x)\nabla x \geq \int_0^b \left(g^{-1}\right)(x)\nabla x \tag{4.2}$$

yazılır. Teorem 4.1. de $\mu(x)=g(x)$ ve $f(x)=x$ alırsak,

$$\int_0^{g^{-1}(b)} g^{\nabla}(x)x\nabla x = \int_{g(0)}^{g\left(g^{-1}(b)\right)} g^{-1}(y)\nabla y = \int_0^b \left(g^{-1}\right)(y)\nabla y \tag{4.3}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_0^{g^{-1}(b)} g^{\nabla}(x)x\nabla x &= \left(g(x)x\right)\big|_0^{g^{-1}(b)}-\int_0^{g^{-1}(b)} g(\rho(x))\nabla x\\ &= bg^{-1}(b)-\int_0^{g^{-1}(b)} g^{\rho}(x)\nabla x\end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlik ile birlikte (4.2) ve (4.3) göz önüne alınırsa,

$$\int_0^a g^{\rho}(x)\nabla x+\int_0^b \left(g^{-1}\right)^{\rho}(y)\nabla y \geq bg^{-1}(b)+\int_{g^{-1}(b)}^a g^{\rho}(x)\nabla x \tag{4.4}$$

elde edilir.

I. Durum : $a\leq g^{-1}(b)$ olsun. Bu durumda g azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}\int_{g^{-1}(b)}^a g^{\rho}(x)\nabla x &\geq \int_{g^{-1}(b)}^a g(\rho(g^{-1}(b)))\nabla x\\ &\geq \int_{g^{-1}(b)}^a g(g^{-1}(b))\nabla x\\ &= ab-bg^{-1}(b)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (4.4) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\int_0^a g^{\rho}(x)\nabla x+\int_0^b \left(g^{-1}\right)^{\rho}(y)\nabla y \geq ab$$

bulunur.

II. Durum : $a \geq g^{-1}(b)$ ve $h = g^{-1}$ olsun. Bu durumda $a \geq h(b)$ dır. g^{-1} fonksiyonu da azalan olacağından $h^{-1}(a) \leq b$ dir. Dolayısıyla I. durumdan,

$$\begin{aligned} ab &\leq \int_0^b h^\rho(x)\nabla x + \int_0^a \left(h^{-1}\right)^\rho(y)\nabla y \\ &= \int_0^b \left(g^{-1}\right)^\rho(x)\nabla x + \int_0^a g^\rho(y)\nabla y \end{aligned}$$

bulunur. I. ve II. durumları birlikte göz önüne alınırsa, (4.1) eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $p > 1$ ve $q > 1$ olsun. Eğer $a \geq 0$ ve $b \geq 0$ ise,

$$ab \leq \int_0^a (\rho(x))^{p-1}\nabla x + \int_0^b (\rho(y))^{q-1}\nabla y \tag{4.5}$$

dir.

İspat: $[0, \infty)$ üzerinde $g(x) = x^{p-1}$ ve $g^{-1}(y) = y^{q-1}$ olarak alırsak, Teorem 4.2 den (4.5) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 4.1: $m \in \mathbb{N}$ ve α bir sabit olsun. Bu durumda;

i. $f(t) = (t-\alpha)^m$ ile tanımlı f fonksiyonu için

$$f^\nabla(t) = \sum_{k=0}^{m-1} (\rho(t)-\alpha)^k (t-\alpha)^{m-1-k},$$

ii. $(t-\alpha)(\rho(t)-\alpha) \neq 0$ olmak üzere, $g(t) = (t-\alpha)^{-m}$ ile tanımlı g fonksiyonu için

$$g^\nabla(t) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{(\rho(t)-\alpha)^{m-k}(t-\alpha)^{k+1}}$$

dir.

Sonuç 4.2: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, $p > 1$ ve $q > 1$ olsun. Eğer $a \geq 0$, $b \geq 0$ ve $t - \rho(t)$, $[0, \infty)$ aralığında bir sabit ise,

$$ab \leq \frac{(\rho(a))^p}{p} + \frac{(\rho(b))^q}{q} - \frac{(\rho(0))^p}{p} - \frac{(\rho(0))^q}{q}$$

dir.

İspat: $f(t) = \frac{t^p}{p}$ olsun. $\nu(t) = t - \rho(t)$ bir sabit olduğundan ve Lemma 4.1 den ispat açıktır.

Sonuç 4.2 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ alınırsa,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{4.6}$$

elde edilir.

Teorem 4.3 (Hölder eşitsizliği I): $p > 1$ olmak üzere, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f, g, h \in C_{ld}([a, b], \mathbb{R})$ ise,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\, |f(x)|^p \,\nabla x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |h(x)|\, |g(x)|^q \,\nabla x\right)^{\frac{1}{q}} \geq \int_a^b |h(x)|\, |f(x)g(x)| \,\nabla x \tag{4.7}$$

dir.

İspat. $[a.b]$ üzerinde

$$A(t) = \frac{|h(t)|^{\frac{1}{p}}\, |f(t)|}{\left(\int_a^b |h(x)|\, |f(x)|^p \,\nabla x\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ ve } B(t) = \frac{|h(t)|^{\frac{1}{q}}\, |g(t)|}{\left(\int_a^b |h(x)|\, |g(x)|^q \,\nabla x\right)^{\frac{1}{q}}}$$

alınırsa, (4.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_a^b A(t)B(t)\nabla t &\leq \int_a^b \left[\frac{A^p(t)}{p} + \frac{B^q(t)}{q}\right] \nabla t \\
&\leq \frac{1}{p}\int_a^b \frac{|h(t)||f(t)|^p}{\int_a^b |h(x)||f(x)|^p \nabla x} \nabla t + \frac{1}{q}\int_a^b \frac{|h(t)||f(t)|^q}{\int_a^b |h(x)||f(x)|^q \nabla x} \nabla t \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özel olarak, (4.7) eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa, Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği): $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ∇- integrallenebilir fonksiyonları için,

$$\int_a^b |h(x)|\, |f(x)g(x)| \,\nabla x \leq \sqrt{\left(\int_a^b |h(x)|\, |f(x)|^2 \,\nabla x\right) \left(\int_a^b |h(x)|\, |g(x)|^2 \,\nabla x\right)}$$

dir.

Teorem 4.5 (Hölder eşitsizliği II). $p < 0$ veya $q < 0$ olmak üzere, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f, g, h \in C_{ld}([a,b], \mathbb{R})$ ise,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\, \nabla x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q\, \nabla x\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)|\, \nabla x \tag{4.8}$$

dir.

İspat: Kabuledelim ki $p < 0$ olsun. $P = -\frac{p}{q}, Q = \frac{1}{q}$ alınırsa, $P > 1$ ve $Q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$ bulunur. (4.7) eşitsizliğinde $f(x) = F(x)$ ve $g(x) = G(x)$ alınırsa,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|F(x)|^P\, \nabla x\right)^{\frac{1}{P}} \left(\int_a^b |h(x)|\,|G(x)|^Q\, \nabla x\right)^{\frac{1}{Q}} \geq \int_a^b |h(x)|\,|F(x)G(x)|\, \nabla x$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $F(x) = f^{-q}(x)$ ve $G(x) = f^q(x)g^q(x)$ yerine yazılırsa

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\, \nabla x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q\, \nabla x\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)|\, \nabla x$$

elde edilir.

Şimdi Hölder eşitsizliğini kullanarak zaman skalasında Minkowski eşitsizliğini ifade ve ispat edelim.

Teorem 4.6 (Minkowski eşitsizliği): $p > 1$ olmak üzere, $f, g, h \in C_{ld}([a,b], \mathbb{R})$ ise,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^p\, \nabla x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\, \nabla x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^p\, \nabla x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.9}$$

dir.

İspat: Teorem 4.3 den

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |h(x)| \left|(f(x)+g(x))\right|^p \nabla x \\
&\quad = \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^{p-1} (|f(x)+g(x)|)\nabla x \\
&\quad \le \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^{p-1} (|f(x)|+|g(x)|)\nabla x \\
&\quad = \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^{p-1} |f(x)| \nabla x + \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^{p-1} |g(x)| \nabla x \\
&\quad \le \left\{ \int_a^b |h(x)| \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q \nabla x \right\}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |h(x)| \left|f(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \left\{ \int_a^b |h(x)| \left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q \nabla x \right\}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |h(x)| \left|g(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad = \left\{ \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^p \nabla x \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \left(\int_a^b |h(x)| \left|f(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_a^b |h(x)| \left|g(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} \right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\left\{ \int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^p \nabla x \right\}^{\frac{1}{q}}$ ile bölünür ve $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ eşitliği kullanılırsa

$$
\left(\int_a^b |h(x)| \left|f(x)+g(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |h(x)| \left|f(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |h(x)| \left|g(x)\right|^p \nabla x \right)^{\frac{1}{p}}
$$

elde edilir.

Lemma 4.2: $f \in C((c,d),\mathbb{R})$ bir konveks fonksiyon olsun. Bu durumda her $t \in (c,d)$ olmak üzere tüm $s \in (c,d)$ ler için $f(s)-f(t) \ge a_t(s-t)$ olacak şekilde $a_t \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Eğer f tam olarak konveks ise, yukarıdaki eşitsizlikte "$\ge$" yerine "$>$" yazılır.

Teorem 4.7 (Jensen eşitsizliği): $a,b \in \mathbb{T}$ ve $c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\int_a^b |h(x)| \nabla x > 0$ için $h \in C_{ld}([a,b],\mathbb{R})$ ve $g \in C_{ld}([a,b],(c,d))$ olsun. Eğer $f \in C((c,d),\mathbb{R})$ konveks bir fonksiyon ise,

$$
f\left(\frac{\int_a^b |h(x)| g(x) \nabla x}{\int_a^b |h(x)| \nabla x} \right) \le \frac{\int_a^b |h(x)| |f(g(x))| \nabla x}{\int_a^b |h(x)| \nabla x} \tag{4.10}
$$

dir. Eğer f tam olarak konveks ise, (4.10) eşitsizliğinde "$\leq$" yerine "$<$" alınır.

İspat: f konveks olduğundan her $t \in (c,d)$ için, $a_t \in \mathbb{R}$ mevcuttur öyleki tüm $s \in (c,d)$ ler için $f(s) - f(t) \geq a_t(s-t)$ dir. Bu durumda

$$t = \frac{\int_a^b |h(x)|\, g(x) \nabla x}{\int_a^b |h(x)| \nabla x}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b |h(x)|\, f(g(x)) \nabla x - \left(\int_a^b |h(x)| \nabla x\right) f\left(\frac{\int_a^b |h(x)| g(x) \nabla x}{\int_a^b |h(x)| \nabla x}\right) \\
&= \int_a^b |h(x)|\, f(g(x)) \nabla x - \left(\int_a^b |h(x)| \nabla x\right) f(t) \\
&= \int_a^b |h(x)| \left\{ f(g(x)) - f(t) \right\} \nabla x \\
&\geq a_t \int_a^b |h(x)| \left\{ g(x) - t \right\} \nabla x \\
&= a_t \left\{ \int_a^b |h(x)|\, g(x) \nabla x - t \int_a^b |h(x)| \nabla x \right\} \\
&= a_t \left\{ \int_a^b |h(x)|\, g(x) \nabla x - \int_a^b |h(x)|\, g(x) \nabla x \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.7 de $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ alınırsa, sırasıyla aşağıdaki iki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3: $\int_a^b |h(x)|\, dx > 0$ olmak üzere $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $f \in C((c,d), \mathbb{R})$ konveks ise, $g([a,b]) \subseteq (c,d)$ olmak üzere

$$f\left(\frac{\int_a^b |h(x)| g(x) dx}{\int_a^b |h(x)| dx}\right) \leq \frac{\int_a^b |h(x)| |f(g(x))| dx}{\int_a^b |h(x)| dx}$$

dir.

Sonuç 4.4: f konveks olsun. Bu durumda herhangi bir $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve

$\sum\limits_{k=1}^{n} c_k > 0$ olmak üzere $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ için ,

$$f\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k}\right) \leq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k f(x_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} c_k}$$

dir.

Yukarıda verilen eşitsizlikler, zaman skalasında diamond-α integral gözönüne alınarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

Teorem 4.8 (Hölder eşitsizliği I): $p > 1$ olmak üzere, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\Diamond_\alpha$-integrallenebilir fonksiyonlar ise,

$$\left(\int\limits_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p \Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q \Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{q}} \geq \int\limits_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)| \Diamond_\alpha x \tag{4.11}$$

dir.

İspat: $[a.b]$ üzerinde

$$A(t) = \frac{|h(t)|^{\frac{1}{p}}\,|f(t)|}{\left(\int\limits_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p \Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}} \text{ ve } B(t) = \frac{|h(t)|^{\frac{1}{q}}\,|g(t)|}{\left(\int\limits_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q \Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{q}}}$$

alınırsa, (4.6) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int\limits_a^b A(t)B(t)\Diamond_\alpha t &\leq \int\limits_a^b \left[\frac{A^p(t)}{p} + \frac{B^q(t)}{q}\right] \Diamond_\alpha t \\
&\leq \frac{1}{p}\int\limits_a^b \frac{|h(t)||f(t)|^p}{\int\limits_a^b |h(x)||f(x)|^p \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha t + \frac{1}{q}\int\limits_a^b \frac{|h(t)||f(t)|^q}{\int\limits_a^b |h(x)||f(x)|^q \Diamond_\alpha x} \Diamond_\alpha t \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.11) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (1.2) eşitsizliği, $\alpha = 0$ alınırsa (4.7) eşitsizliği elde edilir.

Özel olarak, (4.11) eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa, Cauchy-Schwarz eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.9 (Cauchy-Schwarz eşitsizliği): $a, b \in \mathbb{T}$ olsun. $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\Diamond_\alpha$-integrallenebilir fonksiyonları için

$$\int_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)|\,\Diamond_\alpha x \;\leq\; \sqrt{\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^2\,\Diamond_\alpha x\right)\left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^2\,\Diamond_\alpha x\right)}$$

dir.

Teorem 4.10 (Hölder eşitsizliği II): $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\Diamond_\alpha$-integrallenebilir fonksiyonlar ve $p < 0$ veya $q < 0$ olmak üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \int_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)|\,\Diamond_\alpha x \tag{4.12}$$

dir.

İspat: Kabuledelim ki $p < 0$ olsun. $P = -\frac{p}{q}, Q = \frac{1}{q}$ alınırsa, $P > 1$ ve $Q > 1$ olmak üzere $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$ bulunur. (4.11) eşitsizliğinde $f(x) = F(x)$ ve $g(x) = G(x)$ alınırsa,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|F(x)|^P\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{P}}\left(\int_a^b |h(x)|\,|G(x)|^Q\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{Q}} \;\geq\; \int_a^b |h(x)|\,|F(x)G(x)|\,\Diamond_\alpha x$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $F(x) = f^{-q}(x)$ ve $G(x) = f^q(x)g^q(x)$ yerine yazılırsa

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^q\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{q}} \;\leq\; \int_a^b |h(x)|\,|f(x)g(x)|\,\Diamond_\alpha x$$

elde edilir.

(4.12) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (1.3) eşitsizliği, $\alpha = 0$ alınırsa (4.8) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.11 (Minkowski eşitsizliği): $f, g, h : [a, b] \to \mathbb{R}$ $\Diamond_\alpha$-integrallenebilir fonksiyonlar ve $p > 1$ ise,

$$\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \;\leq\; \left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.13}$$

dir.

İspat: Teorem 4.8 den

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b |h(x)|\,|(f(x)+g(x))|^p \,\Diamond_\alpha x \\
&\quad = \int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,(|f(x)+g(x)|)\Diamond_\alpha x \\
&\quad \leq \int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,(|f(x)|+|g(x)|)\Diamond_\alpha x \\
&\quad = \int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,|f(x)|\,\Diamond_\alpha x + \int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,|g(x)|\,\Diamond_\alpha x \\
&\quad \leq \left\{\int_a^b |h(x)|\left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q \Diamond_\alpha x\right\}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad + \left\{\int_a^b |h(x)|\left(|f(x)+g(x)|^{p-1}\right)^q \Diamond_\alpha x\right\}^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad = \left\{\int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right\}^{\frac{1}{q}} \left\{\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}\right\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $\left\{\int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right\}^{\frac{1}{q}}$ ile bölünür ve $1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ eşitliği kullanılırsa

$$
\left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)+g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |h(x)|\,|f(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |h(x)|\,|g(x)|^p\,\Diamond_\alpha x\right)^{\frac{1}{p}}
$$

elde edilir.

(4.13) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (1.4) eşitsizliği, $\alpha = 0$ alınırsa (4.9) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.12 (Jensen eşitsizliği): $a,b \in \mathbb{T}$ ve $c,d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\int_a^b |h(x)|\,\Diamond_\alpha x > 0$ için $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ ve $g:[a,b]\to(c,d)$ $\Diamond_\alpha$-integrallenebilir fonksiyonlar olsun. Eğer $f \in C((c,d),\mathbb{R})$ konveks bir fonksiyon ise,

$$
f\left(\frac{\int_a^b |h(x)|g(x)\Diamond_\alpha x}{\int_a^b |h(x)|\Diamond_\alpha x}\right) \leq \frac{\int_a^b |h(x)||f(g(x))|\Diamond_\alpha x}{\int_a^b |h(x)|\Diamond_\alpha x} \tag{4.14}
$$

dir.

Eğer f tam olarak konveks ise, (4.14) eşitsizliğinde "$\leq$" yerine "$<$" alınır.

İspat: f konveks olduğundan her $t \in (c,d)$ için, $a_t \in \mathbb{R}$ mevcuttur öyleki tüm $s \in (c,d)$ ler için $f(s) - f(t) \geq a_t(s-t)$ dir. Bu durumda

$$t = \frac{\int\limits_a^b |h(x)|\, g(x) \Diamond_\alpha x}{\int\limits_a^b |h(x)| \Diamond_\alpha x}$$

olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_a^b |h(x)|\, f(g(x)) \Diamond_\alpha x - \left(\int\limits_a^b |h(x)| \Diamond_\alpha x \right) f\left(\frac{\int_a^b |h(x)| g(x) \Diamond_\alpha x}{\int_a^b |h(x)| \Diamond_\alpha x} \right) \\
&= \int\limits_a^b |h(x)|\, f(g(x)) \Diamond_\alpha x - \left(\int\limits_a^b |h(x)| \Diamond_\alpha x \right) f(t) \\
&= \int\limits_a^b |h(x)| \left\{ f(g(x)) - f(t) \right\} \Diamond_\alpha x \\
&\geq a_t \int\limits_a^b |h(x)| \left\{ g(x) - t \right\} \Diamond_\alpha x \\
&= a_t \left\{ \int\limits_a^b |h(x)|\, g(x) \Diamond_\alpha x - t \int\limits_a^b |h(x)| \Diamond_\alpha x \right\} \\
&= a_t \left\{ \int\limits_a^b |h(x)|\, g(x) \Diamond_\alpha x - \int\limits_a^b |h(x)|\, g(x) \Diamond_\alpha x \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

(4.14) eşitsizliğinde $\alpha = 1$ alınırsa (1.5) eşitsizliği, $\alpha = 0$ alınırsa (4.10) eşitsizliği elde edilir.

KAYNAKLAR

Agarwal R.P., Bohner M. and Peterson A. 2004. "Inequalities on time scales: A Survey", Math. Inequal. Appl. 4, 535-557.

Agarwal R.P. and Bohner M. 1999. "Basic calculus on time scales and some of its applications", Results Math. 35(1-2), 3-22.

Ahlbrandt C. D. and Morian C. 2002. "Partial differential equations on time scales*",* Journal of Computational and Applied Mathematics 141, no.1-2, 35-55.

Atıcı F.M. and Guseinov G.Sh. 2002. "On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales", J. Comput. Appl. Math. 141, 75-99.

Bohner M. ve Peterson A. 2001. "Dynamic equations on time scales: An introduction with applications**",** Birkhauser, Boston.

Bohner M. ve Peterson A. 2003. "Advances in dynamic equations on time scales", Birkhauser Boston, Massachusetts.

Bohner M. and Guseinov G. Sh. 2005. "Multiple integration on time scales*",* Dynamic Systems and Applications 14, no. 3-4, 579-606.

Bougoffa L. 2006. "On Minkowski and Hardy integral imequality*",* J. Inequal. in Pure & Appl. Math.7(2).

Bicheng Y., Zhuohua Z. and Debnath L. 1998. "On New Generalizations of Hardy's Integral Inequality", J. Math. Anal. Appl. 217, 321-327.

Čižmešija A., Pečarić J. and Persson L.-E. 2003. "On strengthened Hardy and Pólya-Knopp's Inequalities*",* J. Approx. Theory 125, 74-84.

Hardy G.H. 1920. "Notes on a theorem of Hilbert*",* Math. Z. 6, 314-317.

Hardy G.H. 1925. "Notes on some points in the İntegral calculus" *(60)*, Messenger Math. 54, 150-156.

Hardy G.H., Littlewood J.E. and Polya G. 1952. "Inequalities", 2nd ed., Cambridge University Press.

Hilger S. 1988. "Ein MaBkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten", Ph.D. Thesis, Universtat Würzburg.

Kaijser S., Persson L.-E. and Öberg A. 2002. "On Carleman and Knopp's Inequalities″, J. Approx. Theory 117, 140-151.

Kaijser S., Nikolova L., Persson L.-E. and Wedestig A. 205. "Hardy-type inequalities via convexity″, Math. Inequal. & Appl. 8, 403-417.

Krantz S.G. 1999. "Jensen's inequality″, Handbook of Complex Variables, Boston, MA: Birkhauser, p.118.

Kufner A. and Persson L.-E. 2003. "Weighted inequalities of Hardy type", World Scientific, New Jersey.

Maligranda L. 1998. "Why Hölder's inequality should be called Roger's inequality", Math. Inequal. Appl., 1:69-83.

Özkan U.M. and Yıldırım H. "Hardy-Knopp-type inequalities on time scales", Dynamic Systems and Applications, in press.

Özkan U.M., Sarıkaya M.Z. and Yıldırım H. "Extensions of certain integral inequalities on time scales", Appl. Math. Letters, in press.

Řehák P. 2005. "Hardy inequality on time scales and its application to half-linear dynamic equations″, J. Inequal. Appl. 5, 495-507.

Sheng Q., Fadag M., Henderson J. and Davis J.M. 2006. "An exploration of combined dynamic derivatives on time scales and their applications", Nonlinear Anal.: Real World Appl. 7, 395-413.

Wong F.-H., Yu S.-L. and Yeh C.-C. 2006. "Anderson's inequality on time scales", App. Math. Letters, Vol.19, 931-935.

Wong F.-H., Yeh C.-C., Yu S.-L. and Hong C.-H. 2005. "Young's inequality and related results on time scales", Appl. Math. Letters, 18, 983-988.

Wong F.-H., Yeh C.-C. and Lian W.-C. 2006. "An extension of Jensen's inequality on time scales", Advances in Dynamical Systems and Applications, 1(1), 113-120.

ÖZGEÇMİŞ

Umut Mutlu ÖZKAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora

Eğitim

Yüksek Lisans : 2001 Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Lisans : 1997 Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Lise : 1992 Çay Lisesi, Afyonkarahisar

İş

1998-2001 Araştırma Görevlisi. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

2001- Öğretim Görevlisi. Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Afyonkarahisar 21.01.1976

Cinsiyet : Erkek

Yabancı Dili : İngilizce

EKLER

1. Üçüncü bölümde, zaman skalasında

$$\int_a^b u(x)\Phi\left(\frac{1}{\sigma(x)-a}\int_a^{\sigma(x)} f(t)\Delta t\right)\frac{\Delta x}{x-a} \quad\leq\quad \int_a^b v(x)\Phi\left(f(x)\right)\frac{\Delta x}{x-a}$$

şeklindeki Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği ve

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d \Phi\left(\frac{1}{(\sigma(x)-a)(\tau(y)-c)}\int_a^{\sigma(x)}\int_c^{\tau(y)} f(t,s)\Delta_1 t\Delta_2 s\right)\frac{\Delta_1 x\Delta_2 y}{(x-a)(y-c)}\\ \leq \int_a^b\int_c^d \Phi\left(f(t,s)\right)\left(1-\frac{t-a}{b-a}\right)\left(1-\frac{s-c}{d-c}\right)\frac{\Delta_1 t\Delta_2 s}{(t-a)(s-c)}\end{aligned}$$

şeklindeki 2-boyutlu Hardy-Knopp tipli integral eşitsizliği ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca zaman skalasında birden fazla fonksiyon içeren Hardy integral eşitsizliği elde edilmiştir. Bu bölümde yapılan çalışmalar *"Dynamic Systems and Applications"* isimli dergide yayına kabul edilmiştir.

2. Dördüncü bölümde, zaman skalasında Young, Hölder, Minkowski ve Jensen eşitsizlikleri ilk olarak ∇-türev, daha sonra $\Diamond_\alpha$-türev kullanılarak elde edilmiştir. Dolayısıyla $\Diamond_\alpha$-türev kullanarak elde edilen Young, Hölder, Minkowski ve Jensen eşitsizlikleri zaman skalasında yeni genelleştirmelerdir. Bu bölümde elde edilen sonuçlar *"Applied Mathematics Letters"* isimli dergide yayına kabul edilmiştir.