GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLENEBİLİR

HALKALAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Murat ATİK

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

Murat ATİK

DANIŞMAN
Doç. Dr. Muhittin BAŞER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Muhittin BAŞER danışmanlığında,

Murat ATİK tarafından hazırlanan

Genelleştirilmiş Terslenebilir Halkalar

başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri

uyarınca

03/06/2010

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek lisans tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Fatih NURAY

Üye : Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Üye : Doç. Dr. Mehmet KARABACAK

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
………………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

Murat ATİK

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar, bazı halka sınıfları ve bir halka üzerindeki polinom halkaları hatırlatılmıştır. Üçüncü bölümde, terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olan $\alpha -$terslenebilir halkalar karakterize edilmiştir ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenmiştir.

2010, 41 sayfa

Anahtar Kelimeler: İnmiş Halkalar, Terslenebilir Halkalar, (Genelleştirilmiş) Armendariz Halkalar.

ABSTRACT

Msc Thesis

EXTENDED REVERSIBLE RINGS

Murat ATİK

Afyon Kocatepe University

Institute for the Natural and Applied Sciences

Supervisor: Assoc. Doc. Dr. Muhittin BAŞER

This thesis consists of three chapters. In the first chapter is devoted to the introduction section. In the second chapter, some required preparatory notions, some ring classes and polynomial rings on a ring are recalled. In the third chapter, α −reversible rings, which is a generalization of reversible rings are characterized and the basic properties of this ring classes are studied.

2010, Page 41

Key Words: Reduced Rings, Reversible Rings, (Generalized) Armendariz Rings

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda danışmanlığımı yapan sayın kıymetli hocam Doç. Dr. Muhittin BAŞER'e göstermiş olduğu sabır, ilgi, destek ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmam boyunca samimi desteklerini esirgemeyen Doç. Dr Mehmet KARABACAK, Yrd. Doç. Dr. Önder Enver USLU, Yrd. Doç. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ'a ve bana fevkalade sabır gösteren sevgili eşim ve çocuklarıma sonsuz teşekkür ederim.

Murat ATİK
AFYONKARAHİSAR, Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

α	R halkasının bir endomorfizması
$\bar{\alpha}$	R nin bir α endomorfizmasının R nin bir genişlemesine genişletilmişi
D	R halkasının Dorroh genişlemesi
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
I_R	R halkasının birim endomorfizması
${}_RM_R$	$R - R$ bimodülü
$M_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki tüm matrislerin halkası
R^A	Bir A kümesinden R halkasına tüm fonksiyonların kümesi
$R[x]$	R üzerindeki polinomlar halkası
$R[x; x^{-1}]$	R üzerindeki Laurent polinomlar halkası
$R[x; \alpha]$	R nin skew polinom halkası
$T(R, M)$	R halkasının M modülü ile aşikar genişlemesi
$UTM_n(R)$	R üzerindeki $n \times n$ tipindeki üst üçgensel matrislerin halkası
$\langle x^n \rangle$	$R[x]$ halkasının x^n tarafından üretilen ideali

1. GİRİŞ

Son yıllarda, pek çok matematikçi tarafından çalışılan halka sınıflarından birisi olan terslenebilir halka sınıfları ilk defa 1990 yılında Habeb tarafından çalışılmıştır. Daha sonra, bu halka sınıfları ile ilgili bir çok ilginç sonuçlar elde eden Cohn (1999), bu halka sınıflarına terslenebilir (reversible) halka ismini vermiştir. Bundan sonra bu halka sınıfları bu isim ile çalışılmıştır. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için;

$$ab = 0 \Rightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına terslenebilir (reversible) halka denir. Bu halka sınıfları halka teoride oldukça fazla öneme sahiptir. Yakın zamanlarda birçok araştırmacı bu halka sınıflarının çeşitli genelleştirmelerini yaparak teoriye katkıda bulunmuşlardır.

Çalışmamızın detaylarına geçmeden önce terslenebilir halkalarla ilgili bu güne kadar yapılan çalışmalar hakkında bazı bilgileri hatırlatalım. Eğer bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır (nilpotent) elemanı yoksa veya denk olarak $a \in R$ için $a^2 = 0$ olması $a = 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R ye inmiş (reduced) halka denir. Her tamlık bölgesinin inmiş bir halka olduğu açıktır. Ayrıca inmiş halkaların sınıfının terslenebilir halkaların sınıfını kapsadığı bilinmektedir. Diğer taraftan, her değişmeli halkanın terslenebilir olduğu da açıktır. İnmiş halkaların sınıfının diğer bir genelleştirilmesi Armendariz halkalardır. (Rege ve Chhawchharia 1997)' de Armendariz halka tanımını şu şekilde vermişlerdir. $R[x]$; R üzerindeki polinomların halkası olmak üzere $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x]$ polinomları için $f(x)g(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_ib_j = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası Armendariz halka olarak adlandırılmıştır. Bu özelliği sağlayan halkalara Armendariz halka denilmesinin sebebi; inmiş bir halkanın bu özelliği sağladığını 1974 de gösteren kişinin E.P. Armendariz olmasıdır. Halkaların Armendarizlik özelliği üzerine birçok makale yazılmıştır. Bunlardan bazıları (Armendariz 1974), (Hong ve diğerleri 2003), (Hong ve diğerleri 2005), (Hong ve diğerleri 2006) ve (Kim ve Lee 2000) dir.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere R halkasından katsayılı polinomların kümesi, polinomlarda bilinen toplama işlemi ve herhangi bir $a \in R$ için

$xa = \alpha(a)x$ ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya endomorfizma tipinin Ore genişlemesi (yada skew polinom halkası) denir ve $R[x;\alpha]$ ile gösterilir.

Son yıllarda bir R halkasının Armendarizlik özelliği skew polinomların halkasına genişletilmiştir. (Hong ve diğerleri 2003, 2006) aşağıdaki tanımları vermişlerdir. $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,\ q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m \in R[x;\alpha]$ polinomları için $p(x)q(x) = 0$ iken, her $0 \leq i \leq n$ ve $0 \leq j \leq m$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ oluyorsa, bu durumda R halkası α −skew Armendariz (α −Armendariz) olarak adlandırılmıştır. Eğer α; R nin birim endomorfizması olarak alınırsa bu durumda, yukarıdaki iki tanım da Armendariz halka tanımı ile çakışacaktır. Ayrıca R; α −skew Armendariz (α −Armendariz) bir halka ve $S, \alpha(S) \subseteq S$ olacak şekilde R nin bir alt halkası ise, bu durumda S de α −skew Armendariz (α −Armendariz) dir. Diğer taraftan her α −Armendariz halkanın α −skew Armendariz halka olduğu (Hong ve diğerleri 2006) da ispatlanmıştır ve bu gerektirmenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. (Krempa 1996)' da α; R halkasının bir endomorfizması olmak üzere $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \Longrightarrow a = 0$$

oluyorsa, bu durumda α'yı katı (rigid) endomorfizma olarak adlandırmıştır. Daha sonra (Hong ve diğerleri 2003) bir R halkasının katı bir α endomorfizmasının var olması durumunda R yi α −katı (α −rigid) halka olarak adlandırmışlardır. Kolayca görülebilir ki; I_R; R nin birim endomorfizması olmak üzere R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin I_R −katı olmasıdır. Bir R halkasının herhangi bir katı endomorfizması bir monomorfizmadır. (Hong ve diğerleri 2000)' de α −katı halkaların inmiş halka olduğunu ispatlamışlardır. Diğer taraftan (Hong ve diğerleri 2000)' de herhangi bir α −katı halkanın α −Armendariz olduğu ispatlanmış ve bunun tersinin doğru olmadığına dair örnek verilmiştir. (Hong ve diğerleri 2003)' den bir R halkasının α −katı olması için gerek ve yeter koşulun $R[x;\alpha]$ skew polinom halkasının inmiş olması gerektiğini biliyoruz.

Yukarıda ifade edilen bilgilerin ışığı altında; (Başer ve diğerleri 2009)' dan yararlanarak R halkasının bir α endomorfizması için α −terslenebilir halkaların sınıfı tanımlanacak, bu halka sınıflarıyla diğer halka sınıflarının ilişkileri, özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalar ile arasındaki ilişkiler çalışılacaktır.

Çalışmamız boyunca R birimli bir halka ve aksi söylenmedikçe de $\alpha; R$ nin sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizması olacaktır.

Çalışmamızın ikinci bölümünde, sonraki bölümde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlerle birlikte polinom halkları, matris halkaları gibi bazı özel halka sınıfları verilecektir.

Üçüncü bölümde (Başer ve diğerleri 2009)' dan yararlanarak $\alpha -$terslenebilir halkalar karakterize edilecek ve bu halka sınıflarının bazı temel özellikleri incelenecektir. Örneğin; R nin inmiş ve $\alpha -$terslenebilir bir halka olması durumunda bu halkanın $\alpha -$skew Armendariz halka olduğu ispatlanacaktır. Diğer taraftan bir R halkasının $R[x; \alpha]$ skew polinom halkasının terslenebilir olması durumunda R halkasının terslenebilir olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca $\alpha -$terslenebilir bir halkanın birçok genişlemesinin $\bar{\alpha} -$terslenebilir olduğu gösterilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel kavramlar ve sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak olan bazı halka sınıfları hatırlatılacaktır. Bu bölümde kullandığımız temel referanslar (Hungerford, 1982), (Anderson ve Fuller 1992) ve (Lam 2001) dır.

2.1 Halkalar ve Halka Homomorfizmaları

Bu kısımda halka teorideki bazı temel kavramlar tanımlanacak ve halkaların sıkça kullanacağımız bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1.1. R boştan farklı bir küme ve R üzerinde, genellikle $(+)$ toplama ve $(.)$ çarpma ile gösterilen iki ikili işlem tanımlanmış olsun. Eğer;

(i) $(R,+)$ bir değişmeli grup,

(ii) Her $a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ (çarpmanın birleşme özelliği),

(iii) Her $a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab + ac$ ve $(a+b)c = ac + bc$ (sol ve sağ dağılma özelliği)

oluyorsa, bu durumda R ye $(+)$ ve $(.)$ ikili işlemleri ile birlikte bir *halka* denir.

R bir halka olmak üzere eğer, her $a,b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye *değişmelidir* denir. Eğer her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, bu durumda R ye *birimli bir halka* denir. 1_R elemanına da halkanın *birimi* denir. Bir halkanın toplama işlemine göre etkisiz elemanına halkanın *sıfırı* denir ve 0_R veya herhangi bir karışıklığa sebep olmazsa 0 ile gösterilir.

Teorem 2.1.2. R bir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) Her $a \in R$ için $0a = a0 = 0$ dır.

(ii) Her $a,b \in R$ için $(-a)b = a(-b) = -(ab)$ dir.

(iii) Her $a,b \in R$ için $(-a)(-b) = ab$ dir.

(iv) Her $n \in \mathbb{Z}$ ve her $a,b \in R$ için $(na)b = a(nb) = n(ab)$ dir.

(v) Her $a_i, b_j \in R$ için $(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{j=1}^{m} b_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ dir.

Tanım 2.1.3. R bir halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. Eğer $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa, bu durumda a ya bir *sol (sağ) sıfır bölen* denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen olan bir elemana halkanın bir *sıfır böleni* denir.

Tanım 2.1.4. R birimli bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. Eğer $ca = 1_R$ $(ab = 1_R)$ olacak şekilde bir $c \in R$ $(b \in R)$ varsa bu durumda a ya *sol (sağ) tersinir eleman* denir. c (b) elemanına a nın bir *sol (sağ) tersi* denir. Hem sağ hem de sol tersinir bir elemana *tersinir eleman* denir.

Tanım 2.1.5. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının hiçbir sıfır böleni yoksa bu R halkasına bir *tamlık bölgesi* denir. $0 \neq 1_R$ birim elemanına sahip değişmeli bir R halkasının sıfırdan farklı her elemanı tersinir ise, bu durumda R halkasına bir *cisim* denir.

Uyarı 2.1.6.

(i) Her tamlık bölgesi 0 ve 1_R gibi en az iki elemana sahiptir.
(ii) Her cisim bir tamlık bölgesidir.
(iii) Değişmeli ve birimli bir R halkasının bir cisim olması için gerek ve yeter koşul R nin sıfırdan farklı elemanlarının kümesinin çarpma işlemine göre bir grup olmasıdır.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. Bununla beraber $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi farklı ikili işlemlere göre de halka yapılabilir. Fakat bundan sonraki çalışmalarımızda $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası denildiğinde, tamsayıların bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikteki halka yapısı göz önüne alınacaktır. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlık bölgesidir. $\mathbb{Q}$ (rasyonel sayılar), $\mathbb{R}$ (reel sayılar) ve $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) kümesi bilinen toplama ve çarpma işlemleri ile birlikte birer cisimdir.

Örnek 2.1.8. $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$ kümesi $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$ ve $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ ikili işlemleri ile birlikte değişmeli ve birimli bir halkadır. Eğer p bir asal tamsayı ise $\mathbb{Z}_p$ bir cisimdir.

Tanım 2.1.9. R ile S iki halka ve $f: R \to S$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $a, b \in R$ için

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a)f(b)$$

oluyorsa, bu durumda f ye bir *halka homomorfizması* denir. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere eğer, f birebir ise, bu durumda f ye bir *monomorfizma,* örten ise, bu durumda f ye bir *epimorfizma* denir. Eğer bir $f: R \to S$ halka homomorfizması hem birebir hem de örten ise, bu durumda f ye bir izomorfizma ve R ile S halkalarına da *izomorf* halkalar denir. $R \cong S$ ile gösterilir. Bir $f: R \to R$ homomorfizmasına R halkasının bir *endomorfizması* denir. Bir $f: R \to R$ izomorfizmayada R halkasının bir *otomorfizması* denir.

Örnek 2.1.10. R bir halka olmak üzere $O: R \to R, O(a) = 0_R$ ve $I_R: R \to R, I_R(a) = a$ şeklinde tanımlanan fonksiyonlar R halkasının endomorfizmalarıdır. Bunlara sırasıyla R nin *sıfır endomorfizması* ve *birim endomorfizması* adı verilir.

Tanım 2.1.11. $f: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere

$$Ker\, f = \{r \in R |\, f(r) = 0_S\} \text{ ve } Im\, f = \{\, f(r) |\, r \in R\,\}$$

kümelerine sırasıyla, f homomorfizmasının *çekirdeği* ve *görüntüsü* denir.

Tanım 2.1.12. R bir halka olmak üzere eğer, her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir pozitif en küçük n tamsayısı varsa, bu durumda R halkası n *karekteristiğine* sahiptir denir ve $Char\, R = n$ yazılır. Eğer böyle bir n tamsayısı yoksa R nin *karekteristiği sıfırdır* denir.

Tanım 2.1.13. R ile S iki halka olmak üzere, bir $f: R \to S$ monomorfizmasına R nin S ye bir *gömülüşü* denir. Eğer böyle bir monomorfizma varsa, bu durumda R halkası S halkası içine *gömülebilir* denir.

Teorem 2.1.14. Her R halkası birimli bir S halkası içine gömülebilir. Bu S halkası bir tek değildir. Ayrıca, S halkası karekteristiği 0 veya R nin karekteristiği ile aynı olacak şekilde seçilebilir.

İspat. R bir halka olmak üzere $S = R \times \mathbb{Z} = R \oplus \mathbb{Z} = \{(r,k) | \, r \in R, \; k \in \mathbb{Z}\}$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$(r_1, k_1)(r_2, k_2) = (r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, k_1 k_2) \quad (r_i \in R; k_i \in \mathbb{Z})$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0,1)$ birimine sahip, karekteristiği 0 olan bir halkadır. Ayrıca $f: R \to S, f(r) = (r, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır.

Eğer $Char\, R = n > 0$ ise, bu durumda $S = R \oplus \mathbb{Z}_n$ kartezyen çarpım kümesi bileşensel toplama ve

$$\left(r_1, \overline{k_1}\right)\left(r_2, \overline{k_2}\right) = \left(r_1 r_2 + k_2 r_1 + k_1 r_2, \overline{k_1}\, \overline{k_2}\right)$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte $(0, \overline{1})$ birimine sahip bir halkadır. Ayrıca $Char\, S = n$ olup $g: R \to S, g(r) = (r, \overline{0})$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir monomorfizmadır. ■

Uyarı 2.1.15. $\alpha: R \to S$ bir halka homomorfizması olmak üzere $\alpha(0_R) = 0_S$ dir. Bununla beraber R ile S birimli halkalar ise $\alpha(1_R) = 1_S$ olmak zorunda değildir. Gerçekten $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $\alpha(n) = (n, 0)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Fakat $\alpha(1) = (1,0) \neq (1,1)$ dir. Bununla beraber eğer $\alpha: R \to S$ örten bir halka homomorfizması ise, bu durumda $\alpha(1_R) = 1_S$ olur.

Örnek 2.1.16. R, S, T üç halka, $f: R \to S$, $g: S \to T$ halka homomorfizmaları olmak üzere $g \circ f: R \to T$ bileşke fonksiyonu da bir halka homomorfizmasıdır. Eğer $\alpha: R \to R$ bir homomorfizma ise, bu durumda $\alpha \circ \alpha = \alpha^2$ hatta daha genel olarak $i \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere $\alpha^i = \underbrace{\alpha \circ \alpha \circ \ldots \circ \alpha}_{i \; tane}$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.17. R bir halka $a \in R$ olmak üzere eğer $a^n = 0$ olacak şekilde bir n doğal sayısı varsa, bu durumda a ya *üstel sıfır (nilpotent) eleman* denir.

Tanım 2.1.18. Bir R halkasının $e^2 = e$ özelliğini sağlayan bir e elemanına *eşkare (idempotent)* eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R eşkare elemanlardır.

Tanım 2.1.19. R bir halka olmak üzere

$$C = \{c \in R \mid \text{Her } r \in R \text{ için } cr = rc\}$$

kümesine R halkasının *merkezi* denir.

Tanım 2.1.20. Bir R halkasının bir R eşkare elemanı R halkasının merkezine ait ise, bu durumda e eşkare elemanına *merkezil eşkare (central idempotent) eleman* denir. Bir R halkasının tüm eşkare elemanları merkezil eşkare ise, bu durumda R halkası *abel* olarak adlandırılır.

2.2. Alt halkalar, İdealler ve Bölüm Halkaları

Tanım 2.2.1. R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olmak üzere S kümesi R de tanımlı toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalı olsun. Eğer $S; R$ deki işlemlere göre kendi başına bir halka ise, bu durumda S ye R nin bir *alt halkası* denir. $I; R$ nin bir alt halkası olmak üzere, eğer her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ oluyorsa, bu durumda I ya R nin bir *sol ideali*, $xr \in I$ oluyorsa, bu durumda da I ya R nin bir *sağ ideali* denir. Eğer I hem bir sol hem de bir sağ ideal ise, bu durumda I ya R nin bir *ideali* denir.

Her ideal bir alt halkadır. Fakat her alt halka bir ideal olmak zorunda değildir. Gerçekten bir halkanın merkezi bir alt halka olmasına rağmen bir ideal olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.2. Her bir n tamsayısı için $\langle n \rangle = \{kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$ devirli alt gurubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek 2.2.3. R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve $R; R$ nin idealleridir.

R bir halka olmak üzere $A_1, A_2, \ldots, A_n;$ R nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in A_i, i = 1,2,\ldots,n\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer A ve $B;$ R nin boştan farklı alt kümeleri ise bu durumda,

$$AB = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in A, b_i \in B,\ \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ ise, bu durumda AB yerine aB yazılır. Eğer B kümesi toplama işlemine göre kapalı ise, bu durumda $aB = \{ab \mid b \in B\}$ olur.

Örnek 2.2.4. R bir halka ve e de R de bir merkezil eşkare eleman olmak üzere $1_R - e$ de bir merkezil eşkaredir. Ayrıca eR ve $(1_R - e)R$ kümeleri R nin idealleridir.

Grup teoride normal alt grupların oynadığı rolü halka teoride idealler oynar. R bir halka I da R nin bir ideali olsun. R değişmeli toplamsal bir grup olduğundan $I; R$ nin bir toplamsal normal alt grubudur. Böylece;

$$R/_I = \{a + I \mid a \in R\}$$

kümesi,

$$(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$$

şeklinde tanımlanan toplama işlemine göre değişmeli gruptur. $R/_I$ değişmeli grubu,

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

şeklinde tanımlanan çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya R nin I ideali yardımıyla elde edilen *bölüm halkası* denir. R değişmeli iken $R/_I$ nında değişmeli ve R birimli iken $R/_I$ nınde birimli olduğu açıktır.

Teorem 2.2.5. R bir halka ve I da onun bir ideali olmak üzere;

$$\pi: R \to R/_I\,, \pi(r) = r + I$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon I çekirdeğine sahip bir epimorfizmadır.

Tanım 2.2.6. R bir halka I da onun bir ideali olmak üzere $R/_I$ halkasına R nin bir *homomorfik görüntüsü* denir.

Tanım 2.2.7. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere;

$$l_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } rx = 0\}$$

$$r_R(X) = \{r \in R \mid \text{Her } x \in X \text{ için } xr = 0\}$$

kümelerine sırayla R içinde X in *sol ve sağ sıfırlayanı* denir. Eğer $X=\{x\}$ ise bu durumda $l_R(X)=l_R(\{x\})=l_R(x)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 2.2.8. R bir halka $\phi \neq X \subset R$ olmak üzere; $l_R(X)$; R nin bir sol ideali, $r_R(X)$ de R nin bir sağ idealidir. Ayrıca X ve Y; R nin boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

(i) $X \subset Y$ ise $l_R(Y) \subset l_R(X)$ ve $r_R(Y) \subset r_R(X)$ dir.
(ii) $X \subset r_R(l_R(X))$ ve $X \subset l_R(r_R(X))$ dir.
(iii) $l_R(X) = l_R(r_R(l_R(X)))$ dir.

2.3. Matris Halkaları ve Polinom Halkaları

Bu bölümde verilen bir R halkasından elde edilen bazı yeni halkaları hatırlatacağız.

Tanım 2.3.1. R birimli bir halka ve x bir bilinmeyen olmak üzere;

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

şeklindeki bir formal toplama R den katsayılı bir polinom denir. R den katsayılı tüm polinomların kümesi $R[x]$ ile gösterilir. Yani;

$$R[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid n \in \mathbb{N}^*, a_i \in R\}$$

şeklindedir.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere, bu iki polinomun toplamı ve çarpımı aşağıdaki şekilde tanımlanır. n ve m tamsayılarından büyük olanını k ile gösterirsek;

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{k} (a_i + b_i) x^i$$

şeklinde tanımlanır.

$$c_l = \sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{m+n} c_l x^l$$

şeklinde tanımlanır. c_l katsayıları daha açık bir ifadeyle;

$$c_l = a_0 b_l + a_1 b_{l-1} + a_2 b_{l-2} + \cdots + a_{l-2} b_2 + a_{l-1} b_1 + a_l b_0$$

şeklindedir. Yukarıda tanımlanan ikili işlemlere göre $R[x]$ kümesi bir halkadır. Bu halkaya R üzerindeki *polinomların halkası* veya R den *katsayılı polinomların halkası* denir.

Tanım 2.3.2. R bir halka olmak üzere;

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in R \right\}$$

kümesi polinomlarda bilinen toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *kuvvet serilerinin halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.3. R bir halka olmak üzere;

$$R[x;x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=k}^{n} a_i x^i \mid a_i \in R \ (k \text{ ve } n \text{ negatif olabilir.}) \right\}$$

kümesi polinomlardaki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R den katsayılı *Laurent polinomlarının halkası* adı verilir.

Tanım 2.3.4. R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun. $(R[x],+)$ değişmeli grubu, $r \in R$ için $xr = \alpha(r)x$ yardımı ile tanımlanan yeni çarpma işlemi ile birlikte bir halka olur. Bu halkaya endomorfizma tipinin bir *Ore genişlemesi* veya *Skew polinom halkası* denir ve $R[x,\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. R bir halka olmak üzere bileşenleri R den gelen n satırlı ve n sütunlu matrislerin kümesi matrislerde bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R üzerinde $n \times n$ tipindeki *matrislerin halkası* denir ve $M_n(R)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.6. R bir halka ve $(M, +)$ bir değişmeli grup olmak üzere eğer aşağıdaki koşulları sağlayan bir $R \times M \to M, (r, m) \longmapsto rm$ fonksiyonu varsa, bu durumda M ye bir *sol* R *−modül* denir. Her $r, s \in R$ ve $x, y \in M$ için;

(i) $r(x + y) = rx + ry$
(ii) $(r + s)x = rx + sx$
(iii) $r(sx) = (rs)x$

R; 1_R birimine sahip birimli bir halka olmak üzere, ek olarak her $x \in M$ için $1_R x = x$ koşulu sağlanıyorsa, bu durumda M ye bir *birimsel sol* R *−modül* denir.

Tanım 2.3.7. R bir halka ve S değişmeli bir halka olmak üzere, eğer $(R, +)$ bir sol S −modül ve bu modül yapısındaki $S \times R \to R, (s, r) \longmapsto sr$ fonksiyonu; her $s \in S$ ve her $r_1, r_2 \in R$ için;

$$s(r_1 r_2) = (sr_1)r_2 = r_1(sr_2)$$

özelliğine sahip ise, bu durumda R halkasına S değişmeli halkası üzerinde bir *cebir* veya *R ye S −cebir* denir.

Tanım 2.3.8. S değişmeli bir halka ve R_1 ile R_2; S −cebirler olsun. Bir $f: R_1 \to R_2$ halka homomorfizması aynı zamanda bir S −modül homomorfizması ise bu durumda f ye bir *S −cebir homomorfizması* denir.

2.4. Bazı Halka Sınıfları

Bu kısımda bazı özel halka sınıfları hatırlatılacak ve bu halka sınıfları arasındaki ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.4.1. Bir R halkasının sıfırdan farklı üstel sıfır elemanı yoksa veya denk olarak; $a \in R$ için,

$$a^2 = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R ye *inmiş* (*reduced*) *halka* denir.

Sıfır bölensiz her halka inmiş halkadır. Daha özel olarak $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası inmiş bir halkadır. Diğer taraftan $\bar{0} \neq \bar{2} \in \mathbb{Z}_4$ için $(\bar{2})^2 = \bar{2}\bar{2} = \bar{0}$ olduğundan $\mathbb{Z}_4$ halkası inmiş bir halka değildir. Ayrıca inmiş bir halkanın her alt halkasının da inmiş olduğunu görmek çok kolaydır.

Tanım 2.4.2. $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Rightarrow ba = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına *terslenebilir* (*reversible*) denir.

Lemma 2.4.3. Her inmiş halka terslenebilir bir halkadır.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ ve R inmiş olduğundan $ba = 0$ olur. ■

Tanım 2.4.4. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$ab = 0 \Rightarrow aRb = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı değişmeli* (*semicommitative*) olarak adlandırılır. Bir R halkasının yarı değişmeli olması için gerek ve yeter şart koşul her bir $a \in R$ için $r_R(a)$ $(l_R(a))$ kümesinin R nin bir ideali olmasıdır.

Her terslenebilir halka yarı değişmelidir. Gerçekten R terslenebilir bir halka ve $a, b \in R$ için, $ab = 0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba = 0$ ve böylece her $r \in R$ için

$bar = 0$ olur. Tekrar R terslenebilir olduğundan $arb = 0$ yani $aRb = 0$ elde edilir ki, bu da R nin yarı değişmeli olduğunu gösterir.

Tanım 2.4.5. R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ için,

$$aRa = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *yarı asal* (*semiprime*) olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.6.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x]$$

olmak üzere,

$$f(x)g(x) = 0 \Rightarrow a_i b_j = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkası *Armendariz* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki koşulu sağlayan halkalara Armendariz ismi verilmiştir. Çünkü 1974' te E.P. Armendariz, inmiş bir halkanın yukarıdaki koşulu sağladığını göstermiştir. Yani her inmiş halka bir Armendariz halkadır.

Tanım 2.4.7. R bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. $a \in R$ için,

$$a\alpha(a) = 0 \implies a = 0$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α *−katı* (α *−rigid*) halka denir.

R bir α −katı halka olmak üzere, $\alpha(S) \subseteq S$ koşulunu sağlayan R nin her S alt halkası da α −katı bir halkadır. Diğer taraftan I_R; R nin birim endomorfizması olmak üzere; R nin α − katı olması için gerek ve yeter koşul R nin inmiş bir halka olmasıdır.

Lemma 2.4.8. R bir α −katı halka olsun. Bu durumda α bir monomorfizmadır.

İspat. $a \in R$ için $\alpha(a) = 0$ olsun. Buradan $a\alpha(a) = a0 = 0$ olup R; α −katı olduğundan $a = 0$ bulunurki bu da α nın bir monomorfizma olduğunu gösterir. ■

R inmiş olmayan bir halka olmak üzere R nin I_R birim endomorfizması bir monomorfizmadır. Fakat R; I_R $-$katı değildir. Yani yukarıdaki Lemma'nın tersi doğru değildir.

Lemma 2.4.9. R bir halka ve $\alpha: R \to R$ bir endomorfizma olsun. Eğer $R; \alpha$ $-$katı ise, bu durumda R bir inmiş halkadır.

İspat. R; α $-$katı bir halka ve $a \in R$ için $a^2 = 0$ olsun. Bu durumda $a\alpha(a)\alpha\big(a\alpha(a)\big) = a\alpha(a^2)\alpha^2(a) = a\alpha(0)\alpha^2(a) = a0\alpha^2(a) = 0$ olup, R; α $-$katı olduğundan $a\alpha(a) = 0$ ve tekrar R; α $-$katı olduğundan $a = 0$ elde edilir. Yani R bir inmiş halkadır. ■

Lemma 2.4.10. Her inmiş halka yarı asaldır.

İspat. R inmiş bir halka ve $a \in R$ için $aRa = 0$ olsun. Bu durumda $1_R \in R$ için de $a1_Ra = a^2 = 0$ olacağından ve R inmiş olduğundan $a = 0$ elde edilir ki bu da R nin yarı asal olduğunu gösterir. ■

Tanım 2.4.11. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_i\alpha^i(b_j) = 0 \quad (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α $-$*skew Armendariz* halka denir.

Tanım 2.4.12. R bir halka ve α; R nin bir endomorfizması olsun.

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in R[x;\alpha]$$

olmak üzere,

$$p(x)q(x) = 0 \Longrightarrow a_ib_j = 0 \;\; (0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m)$$

oluyorsa, bu durumda R halkasına α $-Armendariz$ halka denir.

Aşağıdaki verilen önermedeki gerektirmeler (Hong ve diğerleri 2003) tarafından verilmiştir.

Önerme 2.3.13. R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olsun.

(i) Eğer $R;\ \alpha$ −katı ise, bu durumda $R;\ \alpha$ −Armendarizdir.
(ii) Eğer $R;\ \alpha$ −Armendariz ise, bu durumda $R;\ \alpha$ −skew Armendarizdir.
(iii) R nin α −katı olması için gerek ve yeter koşul $R[x,\alpha]$ halkasının inmiş olmasıdır.

Son olarak yukarıda tanıtılan halka sınıfları için aşağıdaki gerektirmeler vardır. Bu gerektirmelerin hiçbirinin tersi doğru değildir.

$R;\ \alpha$ −katı $\Longrightarrow$ R inmiş $\Longrightarrow$ R terslenebilir $\Longrightarrow$ R yarı değişmelidir.

3 GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSLENEBİLİR HALKALAR

Bu bölümde, terslenebilir halkalarla ilgili yapılan çalışmalar ve halkaların Armendariz'lik özelliğinin skew polinomlar halkasına genelleştirilmesi göz önüne alınarak; katı ve terslenebilir halkaların bir genelleştirmesi olan α – terslenebilir halkalar tanımlanacak, bu yeni halka sınıfının bazı karakterizasyonları ve bu halka sınıflarının diğer halka sınıfları ile özelliklede genelleştirilmiş Armendariz halkalarla olan ilişkileri çalışılacaktır. Çalışmamız boyunca R birimli bir halkayı ve aksi belirtilmedikçe α da R halkasının sıfırdan ve birimden farklı bir endomorfizmasını gösterecektir. Bu bölüm için temel referansımız (Başer, Hong ve Kwak 2009) olacaktır.

3.1 Genelleştirilmiş Terslenebilir Halkaların Temel Özellikleri

Tanım3.1.1. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olması $b\alpha(a) = 0$ $(\alpha(b)a = 0)$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda R halkasının α endomorfizmasına *sağ* (*sol*) *terslenebilirdir* denir. Eğer bir R halkasının bir sağ (sol) terslenebilir α endomorfizması varsa, bu durumda R halkasına *sağ* (*sol*) $\alpha - terslenebilir$ denir. Eğer R halkası hem sağ hem de sol $\alpha -$ terslenebilir ise, bu durumda R ye α −*terslenebilir* halka denir.

Uyarı 3.1.2.

(i) R halkasının birim endomorfizması I_R olmak üzere, R tek-yanlı I_R −terslenebilir ise, bu durumda R halkası terslenebilirdir.

(ii) Bir sağ α −terslenebilir halkanın $\alpha(S) \subset S$ koşulunu sağlayan her bir S alt halkasıda sağ $\alpha -$ terslenebilir dir.

(iii) R bir tamlık bölgesi olmak üzere, R halkası her α endomorfizması için

$\alpha -$ terslenebilir dir. Gerçekten; R bir tamlık bölgesi, α ; R nin bir endomorfizması ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda, R bir tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ olup, buradan $b = 0$ veya $\alpha(a)$=0 dır. Böylece $b\alpha(a)$=0 olur. Yani R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilir dir. Benzer şekilde R nin sol $\alpha -$ terslenebilir olduğu gösterilebilir. Fakat, bu durumun tersi genelde doğru değildir. Bunu Örnek 3.1.8.(i) de göreceğiz.

$\alpha -$ terslenebilir halka kavramı ile ilk defa karşılaşan birisinin aklına gelebilecek ilk sorulardan birisi; bu kavramın sağ-sol simetrik olup olmadığıdır. Aşağıdaki örnekten $\alpha -$ terslenebilir halka kavramının sağ-sol simetrik olmadığını görüyoruz.

Örnek 3.1.3. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere,

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

halkasını göz önüne alalım.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, olmak üzere $AB = O$ fakat $BA \neq O$ olduğundan R halkası terslenebilir değildir.

(i) R halkasının,

$$\alpha : R \to R , \qquad \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in R$$

olmak üzere $AB = O$ olsun. Buradan $aa' = 0$ olup, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası değişmeli olduğundan $a'a = 0$ elde edilir. Böylece,

$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$ elde edilir. Sonuç olarak R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilir dir. Bununla beraber $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ için $AB = O$ fakat $\alpha(B)A \neq O$ olduğundan R halkası sol $\alpha -$ terslenebilir değildir.

(ii) R halkasının,

$$\beta : R \to R, \qquad \beta\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. Yukarıdaki metodun aynısı kullanılarak R halkasının sol $\beta -$ terslenebilir fakat sağ $\beta -$ terslenebilir olmadığı kolayca gösterilebilir.

En geniş halka sınıflarından birisi olan inmiş halkaların sınıfı göz önünde bulundurulduğunda inmiş halkaların $\alpha -$ terslenebilir olabileceği düşünülebilir. R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilir olmayacak şekilde inmiş ve hatta değişmeli bir R halkasının bir α endomorfizması bulunabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekte görürüz.

Örnek 3.1.4. Bileşensel toplama ve bileşensel çarpma işlemleri ile birlikte

$R = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ halkasını göz önüne alalım. R değişmeli olduğundan R terslenebilirdir. $\alpha: R \to R$, $\alpha((a,b)) = (b,a)$ şeklinde tanımlanan bağıntı R halkasının bir otomorfizmasıdır. $a = (1,0)$, $b = (0,1) \in R$ için,

$$ab = (1,0)(0,1) = (0,0)$$

olup $b\alpha(a) = (0,1)\alpha((1,0)) = (0,1)(0,1) = (0,1) \neq (0,0)$ olduğundan R halkası sağ $\alpha -$ terslenebilir değildir.

Yukarıdaki Örnek 3.1.3. ve Örnek 3.1.4. bir R halkasının terslenebilirliği ile sağ $\alpha -$ terslenebilirliği ve $\alpha -$ terslenebilirliği kavramlarının birbirinden bağımsız olduğunu göstermektedir. Bununla beraber aşağıdaki önerme bu kavramlar arasındaki ilişkiyi verir.

Önerme 3.1.5. R bir terslenebilir halka olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) R; $\alpha -$ terslenebilirdir.
(ii) R sağ $\alpha -$ terslenebilirdir.
(iii) $a, b \in R$ için $ab = 0$ ise, bu durumda negatif olmayan her bir n tamsayısı için $aR\alpha^n(b) = 0$ ve $\alpha^n(a)Rb = 0$ dır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) R; $\alpha -$terslenebilir halka olsun. Bu durumda $\alpha -$terslenebilir halka tanımı gereğince R sağ $\alpha -$ terslenebilirdir.

(ii) ⇒ (iii) R; sağ $\alpha-$terslenebilir halka ve $a,b \in R$ için $ab=0$ olsun. $aR\alpha(b)=0$ ve $\alpha(a)Rb=0$ olduklarını göstermek yeterlidir. R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $b\alpha(a)=0$ ve R terslenebilir olduğundan $ab=0$ dır. Böylece her $r \in R$ için $b\alpha(a)r=0$ ve R terslenebilir olduğundan $\alpha(a)rb=0$ dır. Yani $\alpha(a)Rb=0$ elde edilir. Diğer taraftan $ba=0$ olduğundan her $r \in R$ için $bar=0r=0$ olup, R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $ar\alpha(b)=0$ dır. Yani $aR\alpha(b)=0$ elde edilir.

(iii) ⇒ (i) (iii) sağlansın ve $a,b \in R$ için $ab=0$ olsun. R terslenebilir olduğundan $ba=0$ dır. (iii) den $bR\alpha(a)=0$ ve $\alpha(b)Ra=0$ olup $b\alpha(a)=0$ ve $\alpha(b)a=0$ elde edilir. Yani R halkası hem sağ hem de sol $\alpha-$terslenebilirdir. ■

Bir R halkasının bir $\alpha-$endomorfizmasının bir monomorfizma olması durumunda daha ilginç sonuçlar ortaya çıkmaktadır. Şimdi bu sonuçları verelim.

Önerme 3.1.6. α bir R halkasının monomorfizması olsun. Bu durumda;

(i) R nin bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka olması için gerek ve yeter koşul $a,b \in R$ için $a\alpha(b)=0$ olmasının $ba=0$ olmasına gerektirmesidir.
(ii) Eğer R bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka ise, bu durumda R yarı-değişmeli halkadır.
(iii) R nin $\alpha-$katı olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı-asal ve sağ $\alpha-$terslenebilir olmasıdır.

İspat. (i) R sağ $\alpha-$terslenebilir ve $a,b \in R$ için $a\alpha(b)=0$ olsun. Bu durumda R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $0=\alpha(b)\alpha(a)=\alpha(ba)$ olup α monomorfizma olduğundan $ba=0$ elde edilir. Tersine $a,b \in R$ için $a\alpha(b)=0$ olması $ba=0$ olmasını gerektirsin. Şimdi $a,b \in R$ için $ab=0$ olsun. Bu durumda $0=\alpha(0)=\alpha(ab)=\alpha(a)\alpha(b)$ olup hipotezden $b\alpha(a)=0$ elde edilir. Yani R sağ terslenebilirdir.

(ii) R sağ terslenebilir halka ve $a,b \in R$ için $ab=0$ olsun. R sağ terslenebilir olduğundan $b\alpha(a)=0$ dır. Böylece her $r \in R$ için $0=0\alpha(r)=b\alpha(a)\alpha(r)=b\alpha(ar)$ olup R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $0=\alpha(ar)\alpha(b)=\alpha(arb)$ ve α

monomorfizma olduğundan $arb = 0$ elde edilir. O halde $aRb = 0$ olup, böylece R yarı-değişmelidir.

(iii) R; $\alpha -$katı halka olsun. Bu durumda açık olarak R yarı-asaldır. Şimdi R nin sağ $\alpha -$terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $b\alpha(a)\alpha\big(b\alpha(a)\big) = b\alpha(a)\alpha(b)\alpha^2(a) = b\alpha(ab)\alpha^2(a) = b\alpha(0)\alpha^2(a) = b0\alpha^2(a) = 0$ olup R; $\alpha -$katı olduğundan $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. Yani R sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. Tersine R yarı-asal ve sağ $\alpha -$ terslenebilir olsun. $a \in R$ için $a\alpha(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $r \in R$ için $0 = a\alpha(a)\alpha(r) = a\alpha(ar)$ olup, R sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $\alpha(ar)\alpha(a) = \alpha(ara) = 0$ elde edilir. α monomorfizma olduğundan $a = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R; $\alpha -$katı halkadır. ■

Sonuç 3.1.7. [Lambek 1971, Önerme 1.3.] Terslenebilir halkalar yarı–değişmelidir. Önerme 3.1.6. (ii) nin tersinin genelde doğru olmadığını Örnek 3.1.4. den görürüz. Diğer taraftan Önerme 3.1.6. nın (i) ve (ii) şıkları için gerekli olan "α nın monomorfizma olma" koşulu gereksiz değildir. Gerçekten Örnek 3.1.3. deki R halkası ve α endomorfizması için;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in R$ alınırsa $AB = O$ fakat $O \neq A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}B \in ARB$ olduğu görülür. Bununla beraber $B\alpha(A) = O$ fakat $AB \neq O$ dır.

Önerme 3.1.6. (iii) ile ilgili olarak; aşağıdaki örneğin (i) şıkkı, R; $\alpha -$ katı olmayacak şekilde bir sağ $\alpha -$ terslenebilir R halkasının bir α otomorfizmasının var olduğunu gösterir. (ii) şıkkı ise, α bir monomorfizma ve böylece bir R; $\alpha -$ katı olmayacak şekilde değişmeli bir R tamlık bölgesinin var olduğunu gösterir.

Örnek 3.1.8.

(i) R halkası

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$$

olmak üzere, $\alpha: R \to R,\ \alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun R halkasının bir endomorfizması olduğu kolayca gösterilebilir. Diğer taraftan açık olarak R yarı–asal değildir. Böylece R; $\alpha -$ katı değildir. Ayrıca α nın 1-1 ve örten olduğu kolayca gösterilebilir.

Bununla beraber R nin sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğu da kontrol edilebilir.

(ii) F bir cisim olmak üzere $R = F[x]$ polinom halkasını ve $\alpha: R \to R\ ; \alpha\big(f(x)\big) = f(0)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmayı göz önüne alalım. Bu durumda R değişmeli bir tamlık bölgesidir ve böylece de inmiş bir halkadır. Fakat α bir monomorfizma değildir. R bir tamlık bölgesi olduğundan R nin herhangi bir α endomorfizması için R sağ $\alpha -$ terslenebilirdir. Bununla beraber $f(x) = x \in R = F[x]$ için $f(x)\alpha\big(f(x)\big) = x\alpha(x) = x0 = 0$ fakat $x \neq 0$ olduğundan R halkası $\alpha -$ katı değildir.

Önerme 3.1.9. Bir R halkası için aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) R sağ $\alpha -$ terslenebilir dir.
(ii) R halkasının her bir S alt halkası için $r_R(S) \subseteq l_R(\alpha(S))$ dir.
(iii) Her bir $a \in R$ için $r_R(a) \subseteq l_R(\alpha(a))$ dır.
(iv) R nin boştan farklı A ve B alt kümeleri için $AB = 0$ ise $B\alpha(A) = 0$ dır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) R sağ $\alpha -$ terslenebilir ve $a \in r_R(S)$ olsun. Bu durumda $Sa = 0$ dır. Yani her $s \in S$ için $sa = 0$ olup R sağ $\alpha -$ terslenebilir olduğundan $a\alpha(s) = 0$ olur. O halde $a\alpha(S) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in l_R(\alpha(S))$ olup $r_R(S) \subseteq l_R(\alpha(S))$ dir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) (ii) sağlansın ve $a \in R$ olsun (ii) de $S = \{a\}$ alınırsa $r_R(\{a\}) \subset l_R(\alpha\{a\})$ olup buradan $r_R(a) \subset l_R(\alpha(a))$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) (iv) sağlansın ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. (iv) de $A = \{a\}$ ve $B = \{b\}$ alınırsa $AB = 0$ ve böylece $B\alpha(A) = 0$ yani $b\alpha(a) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak R sağ $\alpha -$ terslenebilir dir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) (iii) sağlansın ve R nin boşdan farklı A ve B alt kümeleri için $AB = 0$ olsun. Bu durumda her $a \in A$ ve $b \in B$ için $ab = 0$ olup $b \in r_R(a) \subseteq l_R(\alpha(a))$ olduğundan $b \in l_R(\alpha(a))$ dır. Yani $b\alpha(a) = 0$ elde edilir ki, buda $B\alpha(A) = 0$ olduğunu gösterir. ■

Örnek 3.1.4. ve Örnek 3.1.8. (i) den görüldüğü gibi inmiş halkaların sınıfları ile sağ $\alpha -$ terslenebilir halkaların sınıfları birbirinden bağımsızdır. Bununla beraber bu iki halka sınıfının birbiri ile olan ilgisini aşağıdaki teoremle vereceğiz.

Teorem 3.1.10.

(i) Eğer R inmiş ve $\alpha -$ terslenebilir bir halka ise, bu durumda $R;\ \alpha - skew\ Armendariz$ dir.
(ii) Eğer $R[x;\alpha]$ terslenebilir bir halka ise, bu durumda $R;\ \alpha -$ terslenebilirdir.

İspat. (i) R inmiş ve $\alpha -$ terslenebilir bir halka olmak üzere

$$p(x) = a_0 + a_1x^1 + \cdots + a_mx^m\ ,\ q(x) = b_0 + b_1x^1 + \cdots + b_nx^n\ \in R[x;\alpha]$$

için $p(x)q(x) = 0$ olsun. Bu durumda $k = 0,1,2,\ldots,m+n$ için

$$\textstyle\sum_{i+j=k} a_i b^j(b_j)=0$$

elde edilir. İddia ediyoruz ki her i,j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ dir. Bunun ispatını $i+j$ üzerine tümevarım uygulayarak yapacağız $a_0b_0 = 0$ olduğundan iddiamız $i+j = 0$ için doğrudur. Şimdi kabul edelim ki iddiamız $i+j \le s$ için doğru olsun. Yani $i+j \le s$ için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olsun. İddiamızın $i+j = s+1$ içinde doğru olduğunu göstereceğiz. Yukarıdaki eşitlikte $k = s+1$ alınırsa

$$a_0b_{s+1} + a_1\alpha(b_s) + \cdots + a_s\alpha^s(b_1) +\ a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = 0 \qquad (1)$$

elde edilir. (1) eşitliğine sağdan $\alpha^{s+1}(b_0)$ ile çarparsak

$$a_0b_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) + a_1\alpha(b_s)\alpha^{s+1}(b_0) + \cdots +\ a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0)\alpha^{s+1}(b_0) = 0 \qquad (2)$$

olup tümevarım hipotezi ve Önerme 3.1.5. den $i = 0,1,2,\ldots,s$ için $a_i\alpha^i(b_0) = 0$ olması

$0 \leq i \leq s$ için $a_i R\alpha^{s+1}(b_0) = 0$ olmasını gerektirir. Yani

$$a_0 b_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = a_1\alpha(b_s)\alpha^{s+1}(b_0) = \cdots = a_s\alpha^s(b_1)\alpha^{s+1}(b_0) = 0$$

olup (2) denklemden $a_{s+1}(\alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0$ elde edilir. Bu arada bir R halkasının inmiş olması için gerek ve yeter koşulun $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ olmasının $ab = 0$ olması gerektirdiğini hatırlatalım. Böylece R inmiş halka olduğundan $a_{s+1}(\alpha^{s+1}(b_0))^2 = 0$ olması $a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla (1) denklemi

$$a_0 b_{s+1} + a_1\alpha(b_s) + \cdots + a_s\alpha^s(b_1) = 0 \qquad (3)$$

şeklinde olur. Benzer olarak (3) denklemi sağdan $\alpha^s(b_1)$ ile çarpılır ve kabuller kullanılırsa $a_s(\alpha^s(b_1))^2 = 0$ ve böylece de $a_s\alpha^s(b_1) = 0$ elde edilir. Bu işlem devam ettirilirse

$$a_{s+1}\alpha^{s+1}(b_0) = a_s\alpha^s(b_1) = \cdots = a_0(b_{s+1}) = 0$$

elde edilir. Böylece $i + j = s + 1$ şartını sağlayan tüm i, j ler için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ olduğunu ispatlamış olduk. Sonuç olarak tümevarım hipotezi gereğince her i ve j için $a_i\alpha^i(b_j) = 0$ elde edilir ki, buda bize R halkasının $\alpha -$skew Armendariz olduğunu verir.

(ii) $R[x;\alpha]$ terslenebilir halka ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda;

$p(x) = a, q(x) = bx \in R[x;\alpha]$ için $p(x)q(x) = abx = 0x = 0$ olup $R[x;\alpha]$ terslenebilir halka olduğundan $0 = q(x)p(x) = bxa = b\alpha(a)x$ dir. Buradan $b\alpha(a) = 0$ olur ki, bu da R halkasının sağ $\alpha -$terslenebilir olduğunu gösterir. Önerme 3.1.5. den R aynı zaman da sol $\alpha -$terslenebilir dir. Sonuç olarak R; $\alpha -$terslenebilir bir halkadır. ■

Sonuç 3.1.11. Eğer R bir $\alpha -$katı halka ise, bu durumda R; $\alpha -$skew Armendariz halkadır.

İspat. R; $\alpha -$katı olsun bu durumda Önerme 3.1.6. (iii) gereğince R halkası yarı$-$asal ve sağ $\alpha -$terslenebilir dir. Diğer taraftan da Teorem 3.1.10. (i) gereğince R; $\alpha -$skew Armendariz dir. ■

α −Armendariz halkaların α −skew Armendariz olduğunu biliyoruz. Teorem 3.1.10.(i) deki “ $R; \alpha$ −skew−Armendariz dir ’’ ifadesi “ $R; \alpha$ −Armendariz ’’ ifadesiyle yer değiştiremez. Gerçekten Örnek 3.1.8.(ii) deki R halkasını ve bu halkanın α endomorfizmasını göz önüne alalım. Yani F bir cisim, $R = F[x]$ ve $\alpha\big(f(x)\big) = f(0)$ olmak üzere R inmiş ve α −terslenebilir dir. Fakat (Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Örnek 1.9) dan R; α −Armendariz değildir.

Diğer taraftan Teorem 3.1.10.(i) nin hipotezinde istenen R nin inmiş halka olma şartı fazladan değildir. Gerçekten Örnek 3.1.8.(i) deki R halkası sağ α −terslenebilir fakat inmiş değildir. $p(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x \in R[x; \alpha]$ için $p^2(x) = 0$ fakat $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \neq O$ olduğundan $R; \alpha$ −skew Armendariz dir.

Sonuç 3.1.12. $R; \alpha$−Armendariz halka olsun bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) $R[x, \alpha]; \alpha$ −terslenebilir dir.
(ii) $R; \alpha$ −terslenebilir dir.
(iii) R sağ α −terslenebilir dir.
(iv) R terslenebilir dir.

İspat. (i) ⇔ (iv) (Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Teorem 3.6.(2)) den verilmiştir.

(i) ⇒(ii) Teorem 3.1.10.(ii) den verilmiştir.

(ii) ⇒ (iii) α −terslenebilir halka tanımın dan açıktır.

(iii) ⇒ (iv) R sağ α −terslenebilir ve $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun bu durumda $b\alpha(a) = 0$ olup (Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Önerme 1.3.(2)) den $ba = 0$ elde edilir ki böylece R terslenebilir halkadır. ■

Örnek 3.1.8.(ii) ve (Huh ve Lee 2002, Örnek 14) den de anlaşılacağı üzere sağ α −terslenebilir halkaların sınıfı ile α −Armendariz halkaların sınıfı birbirinden bağımsızdır.

Sonuç 3.1.12. de α endomorfizması yerine birim endomorfizması alınırsa aşağıda ki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.13. R bir Armendariz halka olsun. Bu durumda R nin terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ polinom halkasının terslenebilir olmasıdır.

Teorem 3.1.10.(ii) nin tersi doğru olmadığı gibi Sonuç 3.1.12.deki R nin $\alpha-$Armanderiz olma şartı da fazladan değildir. Gerçekten Örnek 3.1.8.(ii) deki R halkasını ve R nin $\alpha-$endomorfizmasını göz önüne alalım. $A = R[T;\alpha] = F[x][T;\alpha]$ olsun $p(x) = xT$, $q(x) = x \in A$ için $p(x)q(x) = 0$ olup $q(x)p(x) = x^2T \neq 0$ dır. Böylece $A = R[T;\alpha]$ halkası terslenebilir değildir. Ayrıca R nin $\alpha-$Armendariz olduğunuda bilmekteyiz.

Teorem 3.1.14. R bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka olsun. Bu durumda

(i) Eğer α; R nin bir monomorfizması ise, bu durumda $\alpha(1_R) = 1_R$ dir.
(ii) R nin herhangi bir eşkare (idempotent) elemanı e olmak üzere $\alpha(1_R) = 1_R$ olması için gerek ve yeter koşul $\alpha(e) = e$ olmasıdır.
(iii) Eğer $\alpha(1_R) = 1_R$ ise, bu durumda R bir abel halkadır. Ayrıca $R[x;\alpha]$ daki tüm eşkare elemanlar R deki eşkare elemanlar ile aynıdır.

İspat. (i) α bir monomorfizma olsun
$\left(1_R - \alpha(1_R)\right)\alpha(1_R) = 1_R\,\alpha(1_R) - \alpha(1_R)\alpha(1_R) = \alpha(1_R) - \alpha(1_R1_R) = \alpha(1_R) - \alpha(1_R) = 0$ olup, R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $\alpha(1_R)\alpha\left(1_R - \alpha(1_R)\right) = 0$ olur. Böylece $0 = \alpha(1_R)\alpha\left(1_R - \alpha(1_R)\right) = \alpha\left(1_R\left(1_R - \alpha(1_R)\right)\right) = \alpha\left(1_R - \alpha(1_R)\right)$ olup α monomorfizma olduğundan $1_R - \alpha(1_R) = 0$ yani $\alpha(1_R) = 1_R$ dir.

(ii) $\alpha(1_R) = 1_R$ ve $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $(1_R - e)e = 0$ ve $e(1_R - e) = 0$ dır. Bu durum da R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $e\alpha(1_R - e) = 0$ ve $(1_R - e)\alpha(e) = 0$ olur. Böylece $0 = e\alpha(1_R - e) = e\left(\alpha(1_R) - \alpha(e)\right) = e\left(1_R - \alpha(e)\right) = e - e\alpha(e)$ olup buradan $e\alpha(e) = e$ elde edilir. Diğer taraftan $0 = (1_R - e)\alpha(e) = 1_R\alpha(e) - e\alpha(e) = \alpha(e) - e\alpha(e)$ olup buradan $e\alpha(e) = \alpha(e)$ bulunur. Sonuç olarak $\alpha(e) = e$ elde edilir. Tersine herhangi bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olsun. Bu durumda $1_R^2 = 1_R1_R = 1_R$ olduğundan $\alpha(1_R) = 1_R$ dir.

(iii) $e^2 = e \in R$ olsun. Bu durumda $e(1_R - e) = 0$ ve $(1_R - e)e = 0$ olur. Böylece her $r \in R$ için $e(1_R - e)r = 0$ ve $(1_R - e)er = 0$ olur. R sağ α −terslenebilir olduğundan $(1_R - e)r\alpha(e) = 0$ ve $er\alpha(1_R - e) = 0$ elde edilir. (ii) den $(1_R - e)re = 0$ ve $er(1_R - e) = 0$ olur. Yani $re = ere = er$ olur ki buda bize R halkasının abel olduğunu gösterir. (ii) den dolayı herhangi bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ olduğunu hatırlatalım.

Şimdi $f(x) = e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n$ olmak üzere $f^2(x) = f(x) \in R[x;\alpha]$ olsun. $f^2(x) = f(x)$ eşitliğinden aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

(0) $e_0^2 = 0,$

(1) $e_0e_1 + e_1\alpha(e_0) = e_1,$

(2) $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2\alpha^2(e_0) = e_2,$

…

(n) $e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \cdots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_n\alpha^n(e_0) = e_n.$

Yukarıdaki (0) dekleminden $e_0$elemanı R de bir eşkaredir ve hipotezden bu eşkare merkezidir. Ayrıca (ii) den dolayı da $\alpha(e_0) = e_0$ dır. Böylece yukarıdaki denklem sisteminden aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$(1')$ $2e_1e_0 = e_1,$

$(2')$ $e_0e_2 + e_1\alpha(e_1) + e_2e_0 = e_2,$

…

(n′) $e_0e_n + e_1\alpha(e_{n-1}) + \cdots + e_{n-1}\alpha^{n-1}(e_1) + e_ne_0 = e_n.$

Yukarıdaki $(1')$ denklemini sağ taraftan $(1_R - e_0)$ ile çarpılırsa $e_1(1_R - e_0) = 0$ elde edilir. Böylece $e_1 = e_1e_0$ olup, buradan $e_1 = 0$ elde edilir. Diğer taraftan $(2')$ denklemi $2e_0e_2 = e_2$ haline gelir. Benzer şekilde $2e_0e_2(1_R - e_0) = e_2(1_R - e_0)$ dan $e_2 = 0$ bulunur. Bu işleme devam edilirse $i \geq 1$ için $e_i = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $f(x) =$

$e_0 + e_1x + e_2x^2 + \cdots + e_nx^n = e_0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = e_0 = e_0^2 \in R$ bulunur. Diğer taraftan R abel olduğundan $R[x;\alpha]$ da abel dir. ■

Sonuç 3.1.15. R bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka olmak üzere $\alpha(1_R) = 1_R$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) R bir $\alpha-$Armendariz halkadır.

(ii) Herhangi bir $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1_R - e)R$ halkaları $\alpha-$Armendariz dir.

(iii) Uygun bir $e^2 = e \in R$ için eR ve $(1_R - e)R$ halkaları $\alpha-$Armendariz dir.

İspat. R bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka ve $\alpha(1_R) = 1_R$ olsun. Bu durumda Teorem 3.1.14.(iii) den dolayı R bir abel halka ve Teorem 3.1.14.(ii) den dolayı da herhangi bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir. Böylece (Hong, Kwak ve Rizvi 2006, Önerme 1.5.) in hipotezleri sağlanır. ■

Teorem 3.1.14.(i) okunduğunda, bunun tersinin doğru olup olmadığı sorusu akla gelebilir. Fakat Örnek 3.1.8.(ii) den Teorem 3.1.14.(i) nin tersinin doğru olmadığı görülür. Diğer taraftan Teorem 3.1.14.(iii) deki $\alpha(1_R) = 1_R$ olma koşulu gereklidir. Bu gerekliliği de Örnek 3.1.3. den görebiliriz.

3.2. Genelleştirilmiş Terslenebilir Halkaların Genişlemeleri

R değişmeli bir S halkası üzerinde bir cebir olsun. Bu durumda

$$D = R \times S = \{(r,s) \mid r \in R, s \in S\}$$

kartezyen çarpım kümesi;

$$(r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2)$$

$$(r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1,\ s_1s_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin S ile $Dorroh\ genişlemesi$ denir. R nin bir α endomorfizması için, $\bar{\alpha} : D \to D, \bar{\alpha}(r,s) = (\alpha(r), s)$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir $S-$Cebir homomorfizmasıdır.

Bir R halkasının Dorroh genişlemesi yardımıyla sağ $\alpha-$terslenebilir halka örneklerini çoğaltılabilir.

Önerme 3.2.1.

(i) R bir halka, $e^2 = e \in R$ merkezil bir eşkare $\alpha(e) = e$ ve $\alpha(1_R - e) = 1_R - e$ olmak üzere eR ve $(1_R - e)R$ halkalarının sağ $\alpha-$terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R nin sağ $\alpha-$terslenebilir olmasıdır.

(ii) Eğer R bir sağ $\alpha-$terslenebilir halka, $\alpha(1_R) = 1_R$ ve S bir tamlık bölgesi ise, bu durumda R nin S ile Dorroh genişlemesi olan D halkası da $\overline{\alpha}-$terslenebilir dir.

İspat. (i) R nin sağ $\alpha-$terslenebilir olması durumunda eR ve $(1_R - e)R$ halkalarının sağ $\alpha-$terslenebilir oldukları açıktır. Şimdi eR ve $(1_R - e)R$ halkaları sağ $\alpha-$terslenebilir olsun.

$a, b \in R$ için $ab = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $eab = 0$ ve $(1_R - e)ab = 0$ olur. Kabulden $0 = b\alpha(ea) = be\alpha(a) = eb\alpha(a)$ ve $0 = b\alpha((1_R - e)a) = b(1_R - e)\alpha(a) = (1_R - e)b\alpha(a)$ elde edilir. Yani $b\alpha(a) = eb\alpha(a) + (1_R - e)b\alpha(a) = 0$ elde edilir ki, bu da R nin sağ $\alpha-$terslenebilir olduğunu gösterir.

(ii) $(r_1, s_1), (r_2, s_2) \in D$ için $(r_1, s_1)(r_2, s_2) = 0$ olsun. Buradan $r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = 0$ ve $s_1s_2 = 0$ olur. S bir tamlık bölgesi olduğundan $s_1 = 0$ veya $s_2 = 0$ olur. Eğer $s_1 = 0$ ise, bu durumda $0 = r_1r_2 + s_1r_2 + s_2r_1 = r_1r_2 + s_2r_1$ ve buradan da $r_1(r_2 + s_2) = 0$ elde edilir. R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $0 = (r_2 + s_2)\alpha(r_1) = r_2\alpha(r_1) + s_2\alpha(r_1)$ bulunur. Buradan $(r_2, s_2)\,\overline{\alpha}\big((r_1, s_1)\big) = (r_2, s_2)(\alpha(r_1), s_1) = (r_2\alpha(r_1) + s_2\alpha(r_1) + s_1r_2\,, s_2s_1) = 0$ elde edilir. Benzer olarak, eğer $s_2 = 0$ ise, bu durumda $(r_1 + s_1)r_2 = 0$ olur ki ve böylece R sağ $\alpha-$terslenebilir ve $\alpha(1_R) = 1_R$ olduğunda $0 = r_2\alpha(r_1 + s_1) = r_2\alpha(r_1) + r_2s_1$ elde edilir. Bunları kullanarak $(r_2, s_2)\,\overline{\alpha}\big((r_1, s_1)\big) = 0$ elde ederiz ki bu da D Dorroh genişlemesinin $\overline{\alpha}-$terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Yukarıdaki önermede ki "$\alpha(1_R) = 1_R$" koşulu kaldırılamaz. Bu durumu aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 3.2.2. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$ olmak üzere R halkasının $\alpha: R \to R, \alpha\big((a,b)\big) = (0,b)$ şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım. R halkasının $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ile Dorroh genişlemesi D olsun. Yani $D = R \times \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $\big((1,0),-1\big),((1,0),0) \in D$ için $\big((1,0),-1\big)\big((1,0),0\big) = 0$ olmasına rağmen $\big((1,0),0\big)\bar{\alpha}\big((1,0),-1\big) = (-(1,0),0) \neq 0$ dır. Yani D Dorroh genişlemesi $\bar{\alpha}$ −terslenebilir değildir. Bunun sebebi ise $\alpha\big((1_R,1_R)\big) = (0,1_R) \neq (1_R,1_R)$ olmasıdır.

R bir halka ve M bir (R,R) −bimodül olmak üzere

$$R \oplus M = R \times M = \{(r,m) | r \in R, m \in M\}$$

kümesi,

$$(r_1,m_1) + (r_2,m_2) = (r_1 + r_2,\ m_1 + m_2)$$

$$(r_1,m_1)(r_2,m_2) = (r_1 r_2,\ r_1 m_2 + m_1 r_2)$$

ikili işlemleri ile birlikte bir halkadır. Bu halkaya R nin M ile aşikar genişlemesi (trival extension) denir ve $T(R,M)$ ile gösterilir. Bir R halkasının $M; (R,R)$ −bimodülü ile aşikar genişlemesi

$$\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M\right\}$$

halkasına izomorftur.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere R nin $T(R,R)$ aşikar genişlemesi üzerinde

$$\bar{\alpha}: T(R,R) \to T(R,R), \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $T(R,R)$ halkasının bir endomorfizmasıdır. $T(R,0)$; R ye izomorf olduğundan $\bar{\alpha}$ ın $T(R,0)$ a kısıtlamasını α ile özdeş kılarız. (Kim ve Lee 2003, Önerme 1.6) da bir inmiş halkanın aşikar genişlemesinin terslenebilir bir halka oluğunu biliyoruz. Bir sağ α −terslenebilir R halkasının $T(R,R)$ aşikâr genişlemesi $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olmak zorunda değildir. Bu gerçeği aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 3.2.3. $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ ve $\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ olmak üzere Örnek 3.1.8.(i) den R nin sağ $\alpha -$terslenebilir olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in T(R, R)$$

için $AB = O$ olup $B\bar{\alpha}(A) \neq O$ dır. Yani R halkası $\bar{\alpha}$ −terslenebilir değildir.

Bununla beraber aşağıda ki önermeyi ispatlayabiliyoruz.

Önerme 3.2.4. R inmiş bir halka olsun. Eğer R; $\alpha -$terslenebilir bir halka ise, bu durumda $T(R, R)$; $\bar{\alpha}$ −terslenebilir bir halkadır.

İspat. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \in T(R, R)$ için $AB = O$ olsun, bu durumda $ac = 0$ ve $ad + bc = 0$ dır. R inmiş bir halka olduğundan terslenebilirdir. Böylece $ca = 0$ dır. Bu durumda $0 = c0 = c(ad + bc) = (ca)d + cbc = 0d + cbc = cbc$ elde edilir ki buradan $(bc)^2 = (bc)(bc) = b(cbc) = b0 = 0$ elde edilir. R inmiş olduğundan $bc = 0$ bulunur. $ad + bc = 0$ dan da $ad = 0$ elde edilir. R; $\alpha -$terslenebilir olduğundan $c\alpha(a) = 0, c\alpha(b) = 0$ ve $d\alpha(a) = 0$ elde edilir. Böylece,

$$B\bar{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \bar{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) \\ 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c\alpha(a) & c\alpha(b) + d\alpha(a) \\ 0 & c\alpha(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 + 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

bulunur ki, buda bize $T(R, R)$ nin $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğunu gösterir. ■

Sonuç 3.2.5. [Kim ve Lee 2003, Önerme 1.6.] R bir inmiş halka olmak üzere $T(R, R)$ bir terslenebilir halkadır.

Bir R halkasının $T(R, R)$ aşikar genişlemesi aşağıdaki halkaya genişletilebilir.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R \right\}$$

Ayrıca R nin bir α endomorfizması S nin aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$\overline{\alpha}\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \alpha(a) & \alpha(b) & \alpha(c) \\ 0 & \alpha(a) & \alpha(d) \\ 0 & 0 & \alpha(a) \end{pmatrix}$$

$\overline{\alpha}$ endomorfizmasına genişletilebilir.

R nin bir $\alpha -$katı halka olması durumunda S halkasının $\overline{\alpha} -$terslenebilir olabileceği düşünülebilir. Fakat aşağıdaki örnek bu durumu ortadan kaldırır.

Örnek 3.2.6. R; $\alpha -$katı olmak üzere,

$$S = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} | a, b, c, d \in R\right\}$$

olsun. (Hong, Kim ve Kwak 2000, Önerme 5) den dolayı bir $e^2 = e \in R$ için $\alpha(e) = e$ dir. Özel olarak $\alpha(1_R) = 1_R$ dir.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_R \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

için $AB = O$ dır. Fakat

$$B\overline{\alpha}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overline{\alpha}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_R \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(1_R) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_R \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_R \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olduğundan S halkası $\overline{\alpha} -$terslenebilir değildir.

R bir halka, $\alpha; R$ nin bir endomorfizması, $I; R$ nin bir ideali ve $\alpha(I) \subseteq I$ olsun. Bu durumda, $\bar{\alpha}: R/_I \longrightarrow R/_I$, $\bar{\alpha}(a + I) = \alpha(a) + I$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $R/_I$ bölüm halkasının bir endomorfizmasıdır. Gerçekten, her $a + I, b + I \in R/_I$ için;

$$\bar{\alpha}(a+I+b+I)=\bar{\alpha}(a+b+I)=\alpha(a+b)+I=\alpha(a)+\alpha(b)+I$$
$$=\alpha(a)+I+\alpha(b)+I=\bar{\alpha}(a+I)+\bar{\alpha}(b+I)$$

$$\bar{\alpha}\big((a+I)(b+I)\big)=\bar{\alpha}(ab+I)=\alpha(ab)+I=\alpha(a)\alpha(b)+I$$
$$=(\alpha(a)+I)(\alpha(b)+I) \quad =\bar{\alpha}(a+I)+\bar{\alpha}(b+I)$$

elde edilir. $\alpha(I)\subseteq I$ şartı $\bar{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ şeklinde tanımlanan bağıntının bir fonksiyon olabilmesi için gereklidir. Gerçekten; $a+I=b+I$ olsun. Bu durumda $(a-b)+I=I$ olup buradan $a-b\in I$ ve kabulden $\alpha(a-b)\in\alpha(I)\subset I$ dır. Yani $\alpha(a-b)\in I$ olup $\alpha(a)-\alpha(b)\in I$ olur. Buradan $\alpha(a)-\alpha(b)+I=I$ dir. O halde $\alpha(a)+I=\alpha(b)+I$ yani $\bar{\alpha}(a+I)=\bar{\alpha}(b+I)$ elde edilir. (Hong, Kim ve Kwak 2005, sayfa 233) den terslenebilir bir halkanın homomorfik görüntüsü terslenebilir olmak zorunda değildir. Önerme 3.2.4. den R nin bir inmiş ve α −terslenebilir halka olması durumunda $T(R,R)$ nin $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğunu gördük. Bu gözlemden hareketle; R nin herhangi bir sıfırdan farklı sağ α −terslenebilir I öz ideali için eğer $R/_I$; $\bar{\alpha}$ −terslenebilir ise, bu durumda R nin sağ α −terslenebilir olabileceği düşünülebilir. Fakat aşağıdaki örnekten böyle bir durumun gerçekleşmesinin mümkün olmadığını görüyoruz.

Örnek 3.2.7. *F* bir cisim olmak üzere

$$R=\begin{pmatrix} F & F \\ 0 & F\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a,b,c\in F\right\}$$

halkasını ve bu halkanın

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & c\end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\in R$$

için

$$B\alpha(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \alpha\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$$

olmasına rağmen $AB = O$ dır. Yani R halkası sağ α −terslenebilir değildir. R halkasının tüm sıfırdan farklı öz idealleri;

$$I = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in F\right\}$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in F\right\}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in F\right\}$$

şeklindedir.

Diğer taraftan $R/_I \cong F$ ve $R/_J \cong F$ olduğundan $R/_I$ ve $R/_J$ bölüm halkaları da $\bar{\alpha}$ −terslenebilirdir.

R nin K ideali için;

$$R/_K = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} + K \mid a, c \in F\right\}$$

bölüm halkası inmiş bir halkadır ve $\bar{\alpha}$ endomorfizması $R/_K$ üzerinde özdeşlik dönüşümüdür. Böylece $R/_K$ bölüm halkası $\bar{\alpha}$ −terslenebilirdir.

Önerme 3.2.8. R bir halka, $I; R$ nin $\alpha(I) \subseteq I$ şartını sağlayan bir ideali ve $R/_I$ sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olsun. Eğer $I; \alpha$ −katı ise, bu durumda $R; \alpha$ −terslenebilirdir.

İspat. $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda $a + I, b + I \in R/_I$ olup $(a + I)(b + I) = ab + I = 0 + I = I$ olup $R/_I$; sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğundan $(b + I)\bar{\alpha}(a + I) = I$ dır. Yani; $I = (b + I)\bar{\alpha}(a + I) = (b + I)(\alpha(a) + I) = b\alpha(a) + I$ olup $b\alpha(a) \in I$ dır. Böylece $b\alpha(a)\alpha\big(b\alpha(a)\big) = b\alpha(a)\alpha(b)\alpha\big(\alpha(a)\big) = b\alpha(ab)\alpha\big(\alpha(a)\big) = b\alpha(0)\alpha\big(\alpha(a)\big) = b0\alpha\big(\alpha(a)\big) = 0$ elde edilir. $I; \alpha$ −katı olduğundan $b\alpha(a) = 0$ bulunur. Sonuç olarak R α −terslenebilirdir. ■

Sonuç 3.2.9. [Kim ve Lee 2003, Önerme 1.12] R halkasının bir I ideali için ${}^{R}/_{I}$ terslenebilir bir halka olsun. Eğer I inmiş ise, bu durumda R terslenebilirdir.

R bir halka ve $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m \mapsto \alpha(a_0) + \alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_m)x^m$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda $R[x]$ polinom halkasının bir endomorfizmasıdır. $R[x]$ polinom halkasının yukarıdaki şekilde tanımlanan endomorfizmasınıda α ile göstereceğiz.

$$R[x;x^{-1}] = \left\{ \sum_{i=-s}^{n} a_ix^i : s \geq 0, n \geq 0, a_i \in R \right\}$$

şeklinde tanımlanan küme polinomlarda ki toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya *Laurent polinomlarının halkası* denir. $\alpha; R$ nin bir endomorfizması olmak üzere α yardımıyla $R[x]$ polinom halkası üzerinde tanımladığımız endomorfizmanın benzeri $R[x;x^{-1}]$ Laurent polinomlarının halkası üzerindede tanımlanır.

Aşağıda vereceğimiz teoremle, α −terslenebilir halkaların sınıfını genişleteceğiz.

Teorem 3.2.10. R bir halka olsun.

(i) $R[x]$ in sağ α −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x;x^{-1}]$ halkasının sağ α −terslenebilir olması gerekir.

(ii) Eğer R bir Armendariz halka ise, bu durumda R nin sağ α −terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul $R[x]$ in sağ α −terslenebilir olmasıdır.

(iii) R inmiş bir halka ve n bir pozitif tamsayı olsun. Eğer R sağ α −terslenebilir ve $\alpha(1_R) = 1_R$ ise, bu durumda $\langle x^n \rangle$; x^n tarafından üretilen ideal olmak üzere ${}^{R[x]}/_{\langle x^n \rangle}$ bölüm halkası sağ $\overline{\alpha}$ −terslenebilirdir.

İspat. (i) Eğer $R[x;x^{-1}]$ sağ α −terslenebilir ise, bu durumda açık olarak $R[x]$ de sağ α −terslenebilirdir. Şimdi $R[x]$ sağ α −terslenebilir olsun. $R[x;x^{-1}]$ halkasının sağ

α −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $f(x), g(x) \in R[x; x^{-1}]$ için $f(x)g(x) = 0$ olsun. Bu durumda, $f_1(x) = f(x)x^n, g_1(x) = g(x)x^n \in R[x]$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır ve $f_1(x)g_1(x) = 0$ dır. $R[x]$ sağ α −terslenebilir olduğundan $g_1(x)\alpha(f_1(x)) = 0$ dır. Böylece $g(x)\alpha\big(f(x)\big) = x^{-2n}g_1(x)\alpha(f_1(x)) = 0$ elde edilir ki, buda $R[x; x^{-1}]$ halkasının sağ α −terslenebilir olduğunu gösterir.

(ii) Eğer $R[x]$ α −terslenebilir ise, bu durumda açık olarak R; α −terslenebilirdir. Şimdi R bir Armendariz halka ve sağ α −terslenebilir olsun. $R[x]$ polinom halkasının α −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m, \qquad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n \in R[x]$$

olmak üzere $f(x)g(x) = 0$ olsun. R bir Armendariz halka olduğundan her i ve j için $a_ib_j = 0$ dır. Diğer taraftan, R sağ α −terslenebilir olduğundan her i ve j için $b_j\alpha(a_i) = 0$ dır. $g(x)\alpha\big(f(x)\big) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)\alpha(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m) = (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n)(\alpha(a_0) + \alpha(a_1)x + \cdots + \alpha(a_m)x^m) = b_0\alpha(a_0) + \big(b_0\alpha(a_1) + b_1\alpha(a_0)\big)x + \cdots + b_n\alpha(a_m)x^m = 0 + (0 + 0)x + \cdots + 0x^{n+m} = 0$ elde edilir ki, buda $R[x]$ in sağ α −terslenebilir olduğunu gösterir.

(iii) $S = {}^{R[x]}\big/_{\langle x^n\rangle}$ olsun. Eğer $n = 1$ ise bu durumda $S \cong R$ olup R sağ α −terslenebilir olduğundan S de sağ $\overline{\alpha}$ −terslenebilirdir. Eğer $n = 2$ ise, bu durumda $S \cong T(R, R)$ olup Önerme 3.2.14. den dolayı $T(R, R)$ ve dolayısıyla S halkası da sağ $\overline{\alpha}$ −terslenebilirdir. Şimdi $n \geq 3$ kabul edelim. $\bar{x} = x + \langle x^n\rangle$ olmak üzere

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\bar{x}^i,\ g = \sum_{j=0}^{n-1} b_j\bar{x}^j \in S$$

için $fg = 0$ olsun. Eğer $i + j \geq n$ ise bu durumda $a_jb_j\bar{x}^{i+j} = 0$ dır. Böylece $i + j \leq n - 1$ alabiliriz. Bu durumda $fg = 0$ eşitliği bize aşağıdaki denklem sistemini verir:

(1) $a_0b_0 = 0,$

(2) $a_0b_1 + a_1b_0 = 0,$

(3) $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0,$

…

(4) $a_0b_{n-2} + a_1b_{n-3} + \cdots + a_{n-3}b_1 + a_{n-2}b_0 = 0,$

(5) $a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}b_1 + a_{n-1}b_0 = 0.$

Bu arada R nin bir inmiş halka olması için gerek ve yeter koşul $a, b \in R$ için $ab^2 = 0$ olması $ab = 0$ olmasını gerektirir. Ayrıca her inmiş halkanın yarı değişmeli olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki (1) ve (2) denklemlerini sağdan b_0 ile çarparsak,

$$0 = a_0b_1b_0 + a_1b_0b_0 = a_1b_0^2$$

eşitliğini ve buradan da

(6) $a_1b_0 = 0$ ve $a_0b_1 = 0$

elde ederiz. (3) denklemini sağ taraftan b_0 ve b_1 ile çarpar ve (1) ile (6) kullanılırsa $0 = a_0b_2 = a_1b_1 = a_2b_0$ elde edilir. Bu şekilde devam ederek $i + j = 0,1, \ldots, n-2$ için $a_ib_j = 0$ kabul edebiliriz. (5) denklemini sağ taraftan b_0 ile çarparsak $0 = a_{n-1}b_0b_0$ ve böylece $a_{n-1}b_0 = 0$ elde edilir. Bu durumda (5) denklemi,

(7) $a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \cdots + a_{n-2}b_1 = 0$

haline gelir. (7) denklemini sağ taraftan b_1 ile çarparsak $a_{n-2}b_1b_1 = 0$ ve böylece $a_{n-2}b_1 = 0$ elde ederiz. Buradan $a_0b_{n-1} + a_1b_{n-2} + \cdots + a_{n-3}b_2 = 0$ eşitliğine sahip oluruz. İşlemlere bu şekilde devam ederek $i + j = n - 1$ olacak şekildeki her i ve j için $a_ib_j = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak $i + j \leq n - 1$ olacak şekildeki her i ve j için $a_ib_j = 0$ bulunur. R sağ α −terslenebilir ve inmiş olduğundan da herhangi bir pozitif t tamsayısı için $b_j\alpha^t(a_i) = 0$ bulunur. Bu yüzden $g\bar{\alpha}(f) = 0$ olur ki, buda bize S halkasının sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğunu gösterir. ∎

Sonuç 3.2.11. [Kim ve Lee 2003, Teorem 2.5] Eğer R inmiş bir halka ise, bu durumda herhangi bir n pozitif tamsayısı için ${R[x]}/{\langle x^n \rangle}$ bölüm halkası terslenebilirdir.

R bir halka ve X de boştan farklı bir küme olmak üzere;

$$R^X = \{f \mid f: X \to R \text{ bir fonksiyon}\}$$

kümesi aşağıda tanımlanan ikili işlemlerle birlikte bir halkadır. Her $f, g \in R^X$ ve her $x \in X$ için,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (fg)(x) = f(x)g(x).$$

α; R halkasının bir endomorfizması olmak üzere,

$$\bar{\alpha}: R^X \to R^X, \bar{\alpha}(f) = \alpha o f$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonda R^X halkasının bir endomorfizmasıdır.

Önerme 3.2.12. α; R halkasının bir endomorfizması olsun. Bu durumda;

(i) X boştan farklı bir küme olmak üzere R nin sağ $\alpha-$terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul R^X halkasının $\bar{\alpha}-$terslenebilir olmasıdır.

(ii) S herhangi bir halka ve $\sigma: R \to S$ bir halka izomorfizması olsun. Bu durumda R nin sağ $\alpha-$terslenebilir olması için gerek ve yeter koşul S halkasının sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1}-$terslenebilir olmasıdır.

İspat. (i) R sağ $\alpha-$terslenebilir olsun. R^X halkasının sağ $\bar{\alpha}-$terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $f, g \in R^X$ için $fg = 0$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ için $0 = 0(x) = (fg)(x) = f(x)g(x)$ olup R sağ $\alpha-$terslenebilir olduğundan $\alpha\big(g(x)\big)f(x) = 0$ elde edilir. Buradan $0 = \alpha\big(g(x)\big)f(x) = (\alpha o g)(x)f(x) = \big((\alpha o g)f\big)(x)$ olup, böylece $\bar{\alpha}(g)f = 0$ elde edilir ki, buda bize R^X halkasının sağ $\bar{\alpha}-$terslenebilir olduğunu gösterir. Şimdi R^X halkası sağ $\bar{\alpha}-$terslenebilir olsun. R halkasının sağ $\alpha-$terslenebilir olduğunu gösterir. Bunun için $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Her $x \in X$ için $f_a(x) = a$ ve $f_b(x) = b$ şeklinde tanımlanan $f_a, f_b \in R^X$ sabit fonksiyonlarını göz önüne alalım. Her $x \in X$ için $0 = ab = f_a(x)f_b(x) = (f_a f_b)(x)$ olup R^X halkası sağ $\bar{\alpha}$ −terslenebilir olduğundan $\bar{\alpha}(f_b)f_a = 0$ elde edilir. Buradan her $x \in X$ için $0 = (\alpha o f_b)(x)f_a(x) = \alpha\big(f_b(x)\big)f_a(x) = \alpha(b)a$ elde edilir ki buda bize R halkasının sağ α −terslenebilir olduğunu gösterir.

(ii) S herhangi bir halka ve $\sigma: R \to S$ bir halka izomorfizması olmak üzere açık olarak $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ fonksiyonuda S halkasının bir endomorfizmasıdır. Şimdi R sağ α −terslenebilir olsun. S halkasının sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $x, y \in S$ için $xy = 0$ olsun. σ örten olduğundan $\sigma(a) = x$ ve $\sigma(b) = y$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. $0 = xy = \sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab)$ olup σ birebir olduğundan $ab = 0$ bulunur. R sağ α −terslenebilir olduğundan $b\alpha(a) = 0$ olur. Böylece $0 = b\alpha(a) = \sigma^{-1}(y)\alpha\big(\sigma^{-1}(x)\big)$ olup buradan $0 = \sigma\left(\sigma^{-1}(y)\alpha\big(\sigma^{-1}(x)\big)\right) = y\sigma\alpha\sigma^{-1}(x)$ elde edilirki buda S halkasının sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −terslenebilir olduğunu gösterir. Tersine S halkası sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −terslenebilir olsun. R halkasının sağ α −terslenebilir olduğunu gösterelim. Bunun için $a, b \in R$ için $ab = 0$ olsun. Bu durumda S halkası içinde $0 = \sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ olup, S halkası sağ $\sigma\alpha\sigma^{-1}$ −terslenebilir olduğundan $0 = \sigma(b)\sigma\alpha\sigma^{-1}\sigma(a) = \sigma(b)\sigma(\alpha(a)) = \sigma(b\alpha(a))$ olur. σ birebir olduğundan $b\alpha(a) = 0$ elde edilir ki, buda bize R halkasının sağ α −terslenebilir olduğunu gösterir. ■

KAYNAKLAR

Anderson, F.W. and Fuller, K.R. 1992. Rings and categories of modules. Springer Verlag.

Armendariz, E.P. 1974. A note on extension of Baer and p.p.-Rings. Australian Mathematical Society, 18, 470-473.

Başer, M., Hong, C.Y. and Kwak, T.K. 2009. On Extended Riversible Rings. Algebra Colloq, 16: 1, 37-48.

Cohn, P.M. 1999. Reversible rings. Bull. London Math. Soc., 31, 641-648.

Habeb, J.M. 1990. A note on zero commutative and duo rings. Math. J. Okayama Univ., 32, 73-76.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2000. Ore extensions of Baer and p.p.-rings. J. Pure and Appl. Algebra, 151(3), 215-226.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2003. On skew Armendariz rings. Comm. Algebra, 31(3), 103-122.

Hong, C.Y. , Kim, N.K. and Kwak, T.K. 2005. Extensions of generalized reduced rings. Algebra Colloq., 12(2), 229-240.

Hong, C.Y. , Kwak, T.K. and Rizvi, S.T. 2006. Extensions of generalized Armendariz rings. Algebra Colloq., 13(2), 253-266.

Huh, C. , Lee, Y. and Smoktunowicz, A. 2002. Armendariz rings and semicommutative rings, Comm. Algebra 30 (2) 751-761.

Hungerford, T.W. 1982, Algebra. Holt, Rinehart and Winston, Inc.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2000. Armendariz rings and reduced rings, J. Algebra, 223 477-488.

Kim, N.K. and Lee, Y. 2003. Extensions of reversible rings, J. Pure Appl. Algebra, 185, 207-223.

Krempa, J. 1996. Some examples of reduced rings. Algebra Colloq. 3 (4), 289-300.

Lam, T.Y. 2001. A First Course in Noncommutative Rings, Springer Verlag, New York, Inc.

Lambek, J. 1971. On the representation of modules by sheaves of factor modules, Canad. Math. Bull. 14, 359-368

Rege, M.B. and Chhawchharia, S. 1997. Armendariz rings, Proc. Japan Acad. (Ser. A, Math. Sci.) 73, 14-17

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat ATİK

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 15. 01. 1972

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kayseri Lisesi, 1988

Lisans : Atatürk Üniversitesi, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği Bölümü, 1994

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Özel Zafer Lisesi, 2007-…