HERMİTE-HADAMARD İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nagihan KARACALI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HERMİTE-HADAMARD İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Nagihan KARACALI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM danışmanlığında Nagihan KARACALI tarafından hazırlanan "Hermite-Hadamard İntegral Eşitsizlikleri" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 22.06.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Özkan ÖCALAN	
Danışman	Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç. Dr. Erdoğan HALAT	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../...... tarih ve
....../...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HERMİTE-HADAMARD İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

Nagihan KARACALI

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, bu çalışma için kısa bir giriş, ikinci bölümde, çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler, üçüncü bölümde, Hermite-Hadamard Eşitsizliği ile ilgili sonuçlar ve bu sonuçların özel ortalamalar için uygulamaları ele alındı. Dördüncü bölümde, Hermite-Hadamard Eşitsizliğini geliştiren belirli eşitsizlikler, beşinci bölümde, Hermite-Hadamard Eşitsizlğinin bir genişlemesi verildi.

2010, 80 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Özel Ortalamalar, Konveks Fonksiyon, Hölder Eşitsizliği

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

HERMİTE-HADAMARD INTEGRAL INEQUALITIES

Nagihan KARACALI

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Hüseyin YILDIRIM

This thesis consists of five chapters. In the first chapter an introduction for this study have given, in the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have given. In the third chapter, results related to the Hermite-Hadamard inequality and application for special means of the results have given, in the fourth chapter, on certain inequalities improving the Hermite-Hadamard inequality is given, and in the fifth chapter, on an extended of the Hermite-Hadamard inequality have given.

2010, 80 page

KEY WORDS : Hermite-Hadamard Inequality, Special Means, Convex Function, Hölder Inequality

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmamın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan, engin bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, çalışmam boyunca yardımlarını benden esirgemeyen hocam Arş. Gör. Aziz SAĞLAM'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan canım arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nagihan KARACALI

AFYONKARAHİSAR, Haziran 2010

SİMGELER DİZİNİ

$\overset{\circ}{I}$	:	I da açık aralık
h_d	:	Hadamard'ın alt toplamı
H_d	:	Hadamard'ın üst toplamı
s_d	:	Darboux'un alt toplamı
S_d	:	Darboux'un üst toplamı
B	:	Beta Fonksiyonu
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
$A = A(a, b)$	:	Aritmetik Ortalama
$G = G(a, b)$	:	Geometrik Ortalama
$H = H(a, b)$	:	Harmanik Ortalama
$L = L(a, b)$	:	Logaritmik Ortalama
$I = I(a, b)$	:	Identrik Ortalama
$L_p = L_p(a, b)$	:	p-Logaritmik Ortalama
$H. - H.$	:	Hermite-Hadamard Eşitsizliği
H_f	:	f fonksiyonunun Harmonik Ortalaması
G_f	:	f fonksiyonunun Geometrik Ortalaması
A_f	:	f fonksiyonunun Aritmetik Ortalaması
$M_n^{[\gamma]}(x; p)$	:	γ-power Ortalama

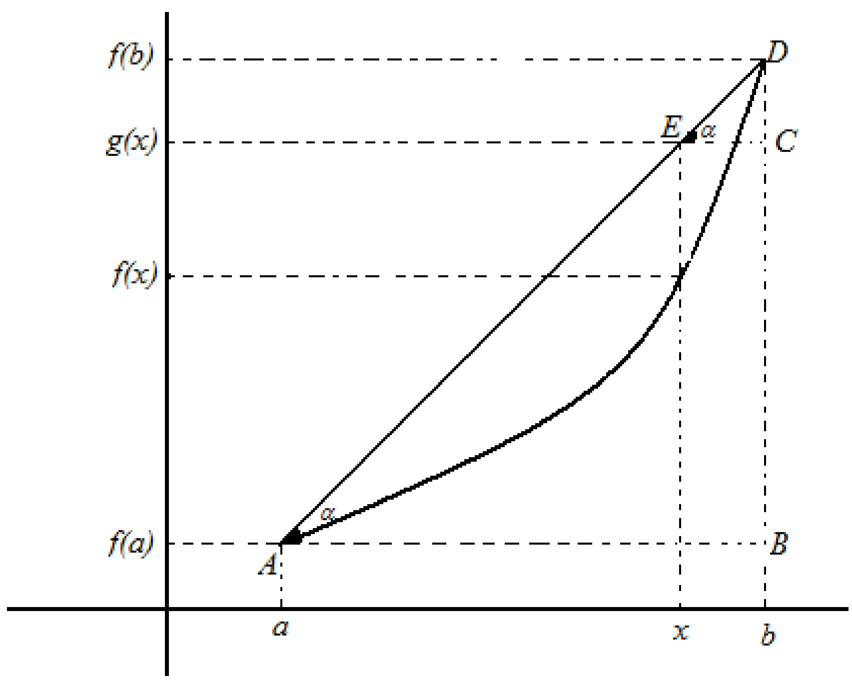
1. GİRİŞ

Eski bir atasözü "Üstadları okuyun!" der ve gerçekten onların çalışmalarının içerdiği derin ve daimi yenilikçi fikirler bizleri şaşırtmaya devam ediyor. Pisagor teoremi, cebirin temel teoremi ve Fermat'ın son teoremi yeni nesiller için büyük bir miras ve ilham kaynağı teşkil eder. Son zamanlarda, O.B. Bekken, N. Abel'in hikayesini ve matematiğini hatırlatan bir çalışma ele almıştır. Bu çalışmada N. Abel'in daha az bilinen bazı teknik ve yöntemlerini yeni matematikçilere göstermeyi amaçlamıştır. Eşitsizlikler matematiğin hemen hemen bütün alanlarında önemli bir rol oynamaktadır. Eşitsizlikler ile ilgili ilk temel çalışma 1934 yılında Hardy, Littlewod ve Pólya tarafından "Inequalities" adlı kitapta toplanmıştır. Bu kitap yeni eşitsizlikler ve uygulamaları ile ilgili konuları geniş çapta ele almaktadır. 1934-1960 yılları arasında elde edilen yeni ilginç eşitsizlikleri içeren "Inequalities" adlı yeni bir kitap 1961 yılında E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından yeniden yazılmıştır. Daha sonra 1970 yılında Mitrinović "Analitic Inequalities" adlı kitap ile o güne kadar yapılmış tüm yeni eşitsizlikleri bir başlık altında toplamıştır. 1993 yılında Mitrinović, Pečarić ve Fink daha genel olan "Classical and New Inequalities in Analysis" adlı kitabı yazmışlardır.

Konveks fonksiyonların geçmişi çok eski olmasına rağmen ancak 19. yüzyılın sonlarına doğru varlığını göstermiştir. 1893 de Hadamard'ın çalışmalarında açık olarak belirtilmemesine rağmen fonksiyonların bu tipteki temel özellikleri ifade edilmiştir. Bu sonuçların konveks fonksiyonları ima etmesine rağmen literatüre 1905 ve 1906 yıllarında Jensen'ın yaptığı çalışmalar kabul görerek konveks fonksiyonlar sistematik olarak çalışılmaya başlanmış ve hızla konveks fonksiyonlar teorisi bu alandaki çalışmalara önderlik etmiştir. 1934 de Hardy, Littlewod ve Pólya, 1961 de Beckenbach ve Bellman ve 1970 de de Mitrinović gibi araştırmacıların kitaplarında konveks fonksiyonlar için temel eşitsizlikler ele alınmıştır. Ayrıca 1987 yılında Pečarić tarafından sadece konveks fonksiyonları içeren genel eşitsizlikler ile ilgili "Convex Functions: Inequalities" adlı ilk temel kitabı yazmıştır. Konveks fonksiyonların Analiz, Uygulamalı Matematik, Olasılık teorisi ve matematiğin diğer bir çok alanında direkt veya en direkt bir çok uygulamaları vardır. Ayrıca konveks fonksiyonlar, eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonların uygulamasının bir sonucu olan bir çok eşitsizlik ile bağlantısı vardır. Örneğin Hölder ve Minkovski gibi genel eşitsizlikler konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliğinin bir sonucudur. Bu bağlamda konveks fonksiyonun tanımı da aslında bir eşitsizliktir. Dolayısıyla konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde çok önemli bir role sahiptir. 1883 yılında Hermite tarafından elde edilen yeni bir eşitsizlik bundan on yıl sonra Hadamard tarafından yeniden ele alınarak bu çalışma şimdi günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen aşağıdaki

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

eşitsizliğini vermiştir. Buna ek olarak, bu ifadenin her iki tarafı sadece afin fonksiyonlar için birbirine eşittir(yani, $mx+n$ şeklindeki fonksiyonlar için).



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveksliği her $u, v \in [a,b]$ için $f|[u,v]$ fonksiyonunun grafiğinin $(u, f(u))$ ve $(v, f(v))$ noktalarını birleştiren kirişin altında kalmasıdır. Yukarıdaki şekilden,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

yazılır. Buradan da bu eşitsizliğin her iki tarafı üzerinde $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinden integral alınırsa (1) eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir.

f fonksiyonunun sürekli olduğuda kabul edilirse f afin olmadığında

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2}$$

eşitsizliği elde edilir, ve f afin olduğunda

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

olur. (1) ifadesinin sol tarafını elde etmek de çok kolaydır.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{(a+b)/2} f(x)\,dx + \int_{(a+b)/2}^b f(x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right)\right] dt \qquad (3) \\
&\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

(1) ifadesinin iki tarafının da konveks fonksiyonları karakterize etmesi biraz ilginçtir. Daha açık olarak, I bir aralık olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun $[a,b]$ aralığının her kompakt alt aralığına kısıtlanışı (3) ifadesini sağlıyor ise f konvekstir. Benzer şekilde (3) yerine (2) sağlanması durumunda da geçerli olur.

İlk olarak, yukarıdaki ifadeye (1) ifadesinin tüm konveks fonksiyonlar için sağlandığını söyleyebiliriz. Gerçekten, $[a,b]$ üzerindeki her konveks fonksiyon uç noktaları düzenlenmiş (yukarıya kaydırılmış) olan bir sürekli fonksiyondan gelir. Bu gerçek aşağıdaki temel sonucun bir ürünüdür. Kabul edelim ki, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. O zaman, ya f monotondur, ya da bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ve $f|[a,c]$ azalan ve $f|[c,b]$ artandır. Sonuç olarak, böyle bir f fonksiyonu için $f(a+)$ ve $f(b-)$ limitleri $\mathbb{R}$ içinde vardır ve

$$f(x) = \begin{cases} f(a+) & , x = a \text{ ise} \\ f(x) & , x \in (a,b) \text{ ise} \\ f(b-) & , x = b \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonu sürekli ve konvekstir.

Konveks fonksiyonlar teorisi çekirdeğinde aritmetik ortalamaları (verilen bir fonksiyonlar belli bazı değişkenlerin bileşkesi) kıyaslayan bir teoridir. Buna benzer teoriler ortalama çiftlerini (tanım ve yardımcı tanım kümesinde) dikkate alarak geliştirilebilir (log-konvekslik tanımı gibi) ve burada Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler ispatlanabilir.

Ele aldığımız bu çalışmanın üçüncü bölümünde,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili bazı sonuçlar verilerek bu sonuçların özel ortalamalar için genellemeleri ve uygulamaları yapıldı.

Dördüncü bölümünde, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonunu gözönüne alarak $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{f(b)(b-x)+f(a)(x-a)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy \\
&\qquad \geq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)-f(x)|\,dy-\frac{1}{b-a}\int_a^b |x-y|\,|f'(y)|\,dy\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği gösterildi.

Beşinci bölümünde ise, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (2n-1)-kez diferensiyellenebilir ve (2n)-konveks fonksiyonunu ele alarak $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy-(b-a)f(x)-\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}}{(k+1)!\,(b-a)}f^{(k)}(x) \\
&\qquad \geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)-\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right|dy\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left|f^{(2n-1)}(x)\,\frac{(b-x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{(2n)!\,(b-a)}\right|\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği ispatlandı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1 (Konvekslik) : $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f\left(tx + (1-t)\, y\right) \leq tf\left(x\right) + (1-t)\, f\left(y\right)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir(S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000).

Tanım 2.2 (Sınırlı Fonksiyon) : $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlanmış olsun. Her $x \in [a, b]$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlıdır denir.

Tanım 2.3 (Hölder Eşitsizliği) : $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)|\, dx \quad \leq \quad \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^q\, dx\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Burada q, p nin konjigesi olarak adlandırılır(**Y. Mizuta,** Tokyo, 1996).

Tanım 2.4 (Mutlak Süreklilik) : $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ verildiğinde, $[a, b]$ aralığının sonlu sayıdaki her $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ ayrık alt aralıkları için,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| < \delta \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$$

olacak biçimde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa bu durumda, f fonksiyonuna, $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.5 (Grüss İntegral Eşitsizliği) : $\forall x \in [a, b]$ ve $\varphi \leq f(x) \leq \phi$, $\gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olacak şekilde integrallenebilir, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları için,

$$\left| \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{4}\left(\phi - \varphi\right)\left(\Gamma - \gamma\right)$$

dır(**S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000**).

Tanım 2.6 (Sekronize fonksiyonlar) : $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonları için,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0, \forall x, y \in [a, b]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu fonksiyonlara sekronize fonksiyonlar denir(**S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000**).

Tanım 2.7 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği) : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu konveks ise $a, b \in I$ $(a \leq b)$ için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

dır(**S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000**).

Tanım 2.8 (Gamma Fonksiyonu) : $n > 0$ için,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanan fonksiyon gamma fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $n > 0$ için yakınsaktır.

Tanım 2.9 (Beta Fonksiyonu) : $\mathrm{Re}(x)$, $\mathrm{Re}(y) > 0$ için,

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon beta fonksiyonu olarak tanımlanır. Bu integral $x > 0$ ve $y > 0$ için yakınsaktır.

Tanım 2.10 (Özel Ortalamalar) : İki pozitif sayı için,

1. **Aritmetik ortalama,**

$$A = A(a, b) := \frac{a+b}{2}, \;\; a, b > 0;$$

2. **Geometrik ortalama,**

$$G = G(a, b) := \sqrt{a.b}, \;\; a, b > 0;$$

3. **Harmonik ortalama,**

$$H = H(a,b) := \frac{2ab}{a+b}, \; a,b > 0;$$

4. **Logaritmik ortalama,**

$$L = L(a,b) := \begin{cases} a & , \; a = b, \quad a,b > 0 \\ \dfrac{b-a}{\ln b - \ln a} & , \; a \neq b, \quad a,b > 0; \end{cases}$$

5. **Identrik ortalama,**

$$I = I(a,b) := \begin{cases} a & , \; a = b \quad a,b > 0 \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \; a \neq b \quad a,b > 0; \end{cases}$$

6. **p-Logaritmik ortalama,**

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & , \; a = b \quad a,b > 0 \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \; a \neq b \quad a,b > 0. \end{cases}$$

şeklindedir(**S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce, 2000**).

Tanım 2.11 (Chebychev İntegral Eşitsizliği) : $f_1, \; f_2, ..., \; f_n$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilir monoton fonksiyonlar (tümü birden ya monoton azalan ya da monoton artan) olmak üzere,

$$\int_a^b f_1(x)\,dx \int_a^b f_2(x)\,dx ... \int_a^b f_n(x)\,dx \leq (b-a)^{n-1} \int_a^b f_1(x)\,f_2(x)\,...f_n(x)\,dx$$

eşitsizliğine Chebychev İntegral Eşitsizliği denir.

3. HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİ İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

3.1. Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin Genelleştirilmesi

Bu başlık altında Hermite-Hadamard'ın konveks fonksiyonlar için bilinen

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklindeki klasik eşitsizliğinin genelleştirmelerini vereceğiz.

3.1.1. İntegral Eşitsizlikleri : Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağlandığı ilk eşitsizlik aşağıdaki şekilde ifade edilen bir genellemedir.

Teorem 3.1.1 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir konveks fonksiyon ve $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ ve $\lambda \in \left[f'_-(t), f'_+(t)\right]$ için,

$$f(t) + \lambda\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $t \in [a,b]$ olsun. $\forall \lambda \in \left[f'_-(t), f'_+(t)\right]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için,

$$f(x) - f(t) \geq \lambda(x-t)$$

eşitsizliğinin varlığını biliyoruz. Bu eşitsizliğin x bağımsız değişkenine göre $[a,b]$ üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[f(x) - f(t)\right] dx \quad &\geq \quad \int_a^b \lambda(x-t)\,dx \\ \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(t) \quad &\geq \quad \lambda(b-a)\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür.

Eğer burada, $t = \dfrac{a+b}{2}$ alınırsa H.-H. eşitsizliğinin ilk tarafı elde edilir.

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir konveks fonksiyon ve $0 \leq a \leq b$ olsun.

a. Eğer $f'_+\left(\sqrt{ab}\right) \geq 0$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq f\left(\sqrt{ab}\right)$$

eşitsizliği vardır.

b. Eğer $f'_{+}\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \geq 0$ ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

dir.

c. Eğer f, a ve b de diferensiyellenebilir ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \max\left\{f(a)+f'(a)\frac{b-a}{2}, f(b)+f'(b)\frac{a-b}{2}\right\}$$

ve

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{f'(b)+f'(a)}{2}(b-a)$$

dır.

d. Eğer $x_i \in [a,b]$ ler, f fonksiyonunun diferensiyellenebildiği noktalar ve $p_i \geq 0$ noktalarında,

$$P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$$

ve

$$\frac{a+b}{2}\sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\,p_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i f'(x_i)\,x_i$$

olacak şekilde ise,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

eşitsizliği vardır.

Eğer f fonksiyonu (a,b) aralığında diferensiyellenebilir ise, H.-H. eşitsizliğinin ikinci tarafı aşağıdaki gibi genişletilebilir [11].

Teorem 3.1.2 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I üzerinde bir konveks fonksiyon ve $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{f(t)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{bf(b)-af(a)-t\left(f(b)-f(a)\right)}{b-a} \tag{3.1}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : (a,b) üzerinde diferensiyellenebilir konveks fonksiyonların sınıfı gözönüne alındığında bu sınıf, (a,b) üzerinde tanımlanan bütün konveks fonksiyonların sınıfı üzerindeki düzgün topolojide yoğun olacaktır. Bu yüzden $\forall t,x\in(a,b)$ için,

$$f(t)-f(x)\geq(t-x)f'(x)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliğin x bağımsız değişkenine göre $[a,b]$ üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_a^b[f(t)-f(x)]\,dx\geq\int_a^b(t-x)f'(x)\,dx$$

olmasından,

$$(b-a)f(t)-\int_a^b f(x)\,dx\geq t(f(b)-f(a))-\int_a^b xf'(x)\,dx$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında kısmi integrasyon metodu kullanılarak,

$$\int_a^b xf'(x)\,dx=xf(x)|_a^b-\int_a^b f(x)\,dx=bf(b)-af(a)-\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir. Buradan da

$$(b-a)f(t)-t(f(b)-f(a))+bf(b)-af(a)\geq2\int_a^b f(x)\,dx$$

eşitsizliği yardımıyla,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(t)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{bf(b)-af(a)-t(f(b)-f(a))}{b-a}$$

olduğu görülür.

Buraya kadar yapılanlar dikkate alındığında $0\leq a<b$ şartı altında, (3.1) eşitsizliğinde sırasıyla, $t=\dfrac{2ab}{a+b}$, $t=\sqrt{ab}$ ve $t=\dfrac{a+b}{2}$ alınırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\min\left\{H_f(a,b),G_f(a,b),A_f(a,b)\right\}$$

Burada,

$$\begin{aligned} H_f(a,b) &:= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)+\frac{bf(b)+af(a)}{b+a}\right] \\ G_f(a,b) &:= \frac{1}{2}\left[f\left(\sqrt{ab}\right)+\frac{\sqrt{b}f(b)+\sqrt{a}f(a)}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right] \\ A_f(a,b) &:= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(b)+f(a)}{2}\right] \end{aligned}$$

dır. Buradaki $A_f(a,b)$ için eşitsizlik 1988 de P.S. Bullen tarafından ispatlanmış, [5,p. 140] ve $G_f(a,b)$ için ise 1988 de J. Sandor tarafından ispatlanmıştır [3].

Teorem 3.1.3 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, $a, b \in \overset{\circ}{I}$ ve $a < b$, $x_i \in [a, b]$, $p_i \geq 0$ ve $P_n > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\leq \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)+\frac{1}{b-a}\left[(b-x_p)f(b)+(x_p-a)f(a)\right]\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

vardır. Burada,

$$x_p = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

dir.

İspat : Yukarıda verildiği gibi, (a, b) üzerinde diferensiyellenebilir konveks fonksiyonlar bu eşitsizliğin ispatı için önemlidir. $\forall x, y \in (a, b)$ için,

$$f(y) - f(x) \geq f'(x)(y - x)$$

eşitsizliği vardır. Böylece $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ için,

$$f(x_i) - f(x) \geq f'(x)(x_i - x)$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin x bağımsız değişkenine göre $[a, b]$ üzerinden integrali alınırsa,

$$\int_a^b [f(x_i) - f(x)]\,dx \geq \int_a^b f'(x)(x_i - x)\,dx$$

ve

$$(b-a) f(x_i) - \int_a^b f(x)\,dx \geq x_i (f(b) - f(a)) - \int_a^b x f'(x)\,dx$$

eşitsizlikleri yardımıyla,

$$\begin{aligned} f(x_i) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\geq \frac{x_i}{b-a}(f(b)-f(a)) \\ &\quad - \frac{1}{b-a}(bf(b) - af(a)) + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitsizlik $p_i \geq 0$ ile çarpılarak, eşitsizliğin 1 den n e kadar toplamı alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &\geq \frac{x_p}{b-a}(f(b)-f(a)) \\ &\quad - \frac{1}{b-a}(bf(b) - af(a)) + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x_p = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ dir. Dolayısıyla,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) + \frac{1}{b-a}\left[(b-x_p) f(b) + (x_p - a) f(a)\right]$$

elde edilir ve (3.2) nin ilk eşitsizliği ispatlanır.

$$\alpha = \frac{b-x_i}{b-a} \quad , \quad \beta = \frac{x_i - a}{b-a} \quad , \quad x_i \in [a,b] \quad , \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$$

olsun. Bu durumda $\alpha + \beta = 1$ olur ve f fonksiyonunun konveksliğinden her $i \in \{1, ..., n\}$ için,

$$\frac{b-x_i}{b-a} f(a) + \frac{x_i - a}{b-a} f(b) \geq f(x_i)$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik $p_i \geq 0$ ile çarpılarak, eşitsizliğin 1 den n e kadar toplamı alınırsa,

$$\frac{1}{b-a}\left[(b-x_p) f(a) + (x_p - a) f(b)\right] \geq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)$$

olacaktır. Dolayısıyla, Lah-Ribaric eşitsizliği olarak bilinen eşitsizlik elde edilir [2, p. 9]. Elde edilen bu son eşitsizlik yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f\left(x_i\right)+\frac{1}{b-a}\left[\left(b-x_p\right) f\left(b\right)+\left(x_p-a\right) f\left(a\right)\right] \\
&\quad \leq \frac{1}{b-a}\left[\left(b-x_p\right) f\left(a\right)+\left(x_p-a\right) f\left(b\right)+\left(b-x_p\right) f\left(b\right)+\left(x_p-a\right) f\left(a\right)\right] \\
&\quad = f\left(a\right)+f\left(b\right)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da teoremin ispatıdır.

$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon, $a, b \in \overset{\circ}{I}$ ve $a<b$ ve eğer $t \in [a, b]$ ise,

$$\frac{f\left(t\right)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{bf\left(b\right)-af\left(a\right)-t\left(f\left(b\right)-f\left(a\right)\right)}{b-a} \leq \frac{f\left(a\right)+f\left(b\right)}{2}$$

eşitsizliği vardır.

Bu eşitsizliğin ispatı için yukarıdaki teoremde $x_i=t$, $i \in \{1, ..., n\}$ olarak seçilir.

3.1.2. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar :

İki pozitif sayı için aşağıdaki ortalamaları hatırlayalım.

1. Aritmetik ortalama,

$$A=A(a, b):=\frac{a+b}{2}, \ a, b>0;$$

2. Geometrik ortalama,

$$G=G\left(a, b\right):=\sqrt{a.b}, \ a, b>0;$$

3. Harmonik ortalama,

$$H=H\left(a, b\right):=\frac{2ab}{a+b}, \ a, b>0;$$

4. Logaritmik ortalama,

$$L=L\left(a, b\right):=\begin{cases} a & , \ a=b, \quad a, b>0 \\ \dfrac{b-a}{\ln b-\ln a} & , \ a \neq b, \quad a, b>0; \end{cases}$$

5. Identrik ortalama,

$$I=I(a, b):=\begin{cases} a & , \ a=b \quad a, b>0 \\ \dfrac{1}{e}\left(\dfrac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} & , \ a \neq b \quad a, b>0; \end{cases}$$

6. p-Logaritmik ortalama,

$$L_p = L_p(a,b) := \begin{cases} a & , \quad a = b \quad a,b > 0 \\ \left[\dfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right]^{\frac{1}{p}} & , \quad a \neq b \quad a,b > 0. \end{cases}$$

Bu ortalamalar arasında

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

eşliğinde bir ilişkinin olduğu iyi bilinir. Bunun la birlikte L_p, $p \in \mathbb{R}$ üzerinde monoton artandır. Burada,

$$L_0 = I \ ve \ L_{-1} = L$$

eşitlikleri vardır.

Önerme 3.1.1 : $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$ ve $[a,b] \subset (0, \infty)$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\frac{L_p^p - t^p}{pt^{p-1}} \geq A - t$$

dir.

İspat : Teorem 3.1.1 de $f : [a,b] \to [0, \infty)$, $f(x) = x^p$ olarak seçilirse $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b x^p dx \geq t^p + pt^{p-1} \left(\frac{a+b}{2} - t \right)$$

eşitsizliği yazılır. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b x^p dx &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^{p+1}}{p+1} \bigg|_a^b \\ &= \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \\ &= L_p^p(a,b) \\ &= L_p^p \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\frac{L_p^p - t^p}{pt^{p-1}} \geq A - t$$

eşitsizliği elde edilir.

Elde edilen bu eşitsizlik kullanılarak,

$$\frac{L_p^p - I^p}{pI^{p-1}} \geq A - I \geq 0,\ \frac{L_p^p - L^p}{pL^{p-1}} \geq A - L \geq 0,$$

$$\frac{L_p^p - G^p}{pG^{p-1}} \geq A - G \geq 0,\ \frac{L_p^p - H^p}{pH^{p-1}} \geq A - H \geq 0$$

ve

$$\frac{L_p^p - a^p}{pa^{p-1}} \geq A - a \geq 0,\ 0 \leq \frac{L_p^p - b^p}{pb^{p-1}} \leq b - A$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Önerme 3.1.2 : $0 < a < b$ olsun. $\forall t \in [a, b]$ için,

$$\frac{L - t}{L} \leq \frac{A - t}{t}$$

dir.

İspat : Teorem 3.1.1 de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a, b]$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x} &\geq \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \\
\frac{\ln b - \ln a}{b - a} &\geq \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}(A - t) \\
\frac{1}{L} &\geq \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}(A - t) \\
Lt - L(A - t) &\leq t^2 \\
Lt - t^2 &\leq L(A - t) \\
\frac{L - t}{L} &\leq \frac{A - t}{t}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yine elde edilen eşitsizlik yardımıyla,

$$\frac{L_p - L}{L} \geq \frac{L_p - A}{L_p},\ \frac{A - G}{G} \geq \frac{L - G}{L},$$

$$\frac{A - H}{H} \geq \frac{L - H}{L},\ \frac{L - a}{L} \geq \frac{A - a}{a}$$

ve

$$\frac{b - L}{L} \geq \frac{b - A}{b}$$

eşitsizlikleri yazılır.

Önerme 3.1.3 : $0 < a < b$ olsun. $\forall t \in [a, b]$ için,

$$\ln I - \ln t \leq \frac{A - t}{t}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.1.1 de $f(x) = -\ln x$, $x \in [a, b]$ seçilirse,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx &\geq -\ln t - \frac{1}{t}\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \\ -\ln I &\geq -\ln t - \frac{1}{t}(A - t) \\ \ln I - \ln t &\leq \frac{A - t}{t} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.3 deki eşitsizlik kullanılarak,

$$\ln L_p - \ln I \geq \frac{L_p - A}{L_p} \geq 0, \;\; \ln b - \ln I \geq \frac{b - A}{b},$$

$$0 \leq \ln I - \ln L \leq \frac{A - L}{L}, \;\; 0 \leq \ln I - \ln G \leq \frac{A - G}{G}$$

ve

$$0 \leq \ln I - \ln H \leq \frac{A - H}{H}, \;\; 0 \leq \ln I - \ln a \leq \frac{A - a}{a}$$

eşitsizlikleri yazılır.

Şimdi yukarıda ifade ve ispat ettiğimiz Teorem 3.1.2 ile ilgili bazı uygulamalar verelim.

Önerme 3.1.4 : $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$ ve $[a, b] \subset [0, \infty)$ olsun. $\forall t \in [a, b]$ için,

$$L_p^p - t^p \leq p\left(L_p^p - tL_{p-1}^{p-1}\right)$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.1.2 de $f : [a, b] \to [0, \infty)$, $f(x) = x^p$ (konveks) seçilirse $\forall t \in [a, b]$ için,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx \leq \frac{t^p}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{b-a} - t\frac{b^p - a^p}{b-a}\right]$$

yazılır.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx = L_p^p,\ \ \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{b-a} = (p+1)\,L_p^p$$

ve

$$\frac{b^p-a^p}{b-a} = pL_{p-1}^{p-1}$$

eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} L_p^p &\leq \frac{t^p}{2}+\frac{1}{2}\left[(p+1)\,L_p^p - tpL_{p-1}^{p-1}\right] \\ &= \frac{t^p}{2}+\frac{L_p^p}{2}+\frac{1}{2}p\left(L_p^p - tL_{p-1}^{p-1}\right) \\ L_p^p - t^p &\leq p\left(L_p^p - tL_{p-1}^{p-1}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$p \geq 1$ için aşağıdaki eşitsizlikler vardır:

$$0 \leq L_p^p - A^p \leq p\left(L_p^p - AL_{p-1}^{p-1}\right),\ 0 \leq L_p^p - L^p \leq p\left(L_p^p - LL_{p-1}^{p-1}\right)$$

ve

$$0 \leq L_p^p - I^p \leq p\left(L_p^p - IL_{p-1}^{p-1}\right),\ 0 \leq L_p^p - G^p \leq p\left(L_p^p - GL_{p-1}^{p-1}\right).$$

Önerme 3.1.5 : $0<a<b$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\frac{t-L}{L} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2-G^2}{G^2}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.1.2 de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x} &\leq \frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\frac{t\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}{b-a} \\ \frac{1}{L} &\leq \frac{1}{2t}+\frac{t}{2ab} \\ \frac{1}{L}-\frac{1}{t} &\leq \frac{t}{2ab}-\frac{1}{2t} \\ \frac{t-L}{L} &\leq \frac{1}{2}\frac{t^2-G^2}{G^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Elde edilen yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki özel sonuçları verir:

$$0 \leq \frac{L_p - L}{L} \leq \frac{1}{2}\frac{L_p^2 - G^2}{G^2} \quad (p \geq 1),$$
$$0 \leq \frac{A - L}{L} \leq \frac{1}{2}\frac{A^2 - G^2}{G^2}, \; 0 \leq \frac{I - L}{L} \leq \frac{1}{2}\frac{I^2 - G^2}{G^2}$$

ve

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{G^2 - H^2}{G^2} \leq \frac{L - H}{L}.$$

Önerme 3.1.6 : $0 < a < b$ olsun. $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\frac{L - t}{L} \leq \ln I - \ln t$$

dir.

İspat : Teorem 3.1.2 de $f(x) = -\ln x$, $x \in [a,b]$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx &\leq -\frac{\ln t}{2} - \frac{1}{2}\frac{b\ln b - a\ln a - t(\ln b - \ln a)}{b-a} \\
&= -\frac{\ln t}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} + \frac{1}{2}t\left(\frac{\ln b - \ln a}{b-a}\right) \\
&= -\frac{\ln t}{2} - \frac{1}{2}\ln[eI(a,b)] + \frac{t}{2L} \\
-\ln I &\leq -\frac{\ln t}{2} - \frac{1}{2}(1 + \ln I) + \frac{t}{2L} \\
-2\ln I &\leq -\ln t - 1 - \ln I + \frac{t}{L} \\
1 - \frac{t}{L} &\leq \ln I - \ln t \\
\frac{L-t}{L} &\leq \ln I - \ln t
\end{aligned}$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlikten aşağıdaki özel eşitsizlikleri elde ederiz:

$$0 \leq \frac{L - G}{L} \leq \ln I - \ln G, \; 0 \leq \frac{L - H}{L} \leq \ln I - \ln H$$

ve

$$\frac{A - L}{L} \geq \ln A - \ln I \geq 0.$$

Şimdi de Teorem 3.1.3 ün bazı uygulamalarını inceleyelim.

Önerme 3.1.7 : $\gamma \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$ ve $[a, b] \subset [0, \infty)$ olsun. Eğer $x_i \in [a, b]$, $p_i \geq 0$ ve $P_n = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i > 0$ $(i = 1, ..., n)$ ise,

$$\begin{aligned} L_\gamma^\gamma(a,b) - \left[M_n^{[\gamma]}(x;p)\right]^\gamma &\leq \gamma\left[\left[L_\gamma(a,b)\right]^\gamma - A_n(x,p)\left[L_{\gamma-1}(a,b)\right]^{\gamma-1}\right] \\ &\leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - \left[L_\gamma(a,b)\right]^\gamma - \left[M_n^{[\gamma]}(x;p)\right]^\gamma \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$A_n(x,p) = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

aritmetik ortalamadır ve

$$M_n^{[\gamma]}(x;p) = \left(\frac{1}{p_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

γ-power ortalamadır.

İspat : Teorem 3.1.3 de $f(x) = x^\gamma$, $x \in [a, b]$ seçilirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b x^\gamma dx &\leq \frac{1}{2}\left[\left(M_n^{[\gamma]}(x;p)\right)^\gamma + \frac{b^{\gamma+1} - a^{\gamma+1}}{b-a} - A_n(x,p)\frac{b^\gamma - a^\gamma}{b-a}\right] \\ &\leq A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) \end{aligned}$$

yazılır.

$$\frac{b^{\gamma+1} - a^{\gamma+1}}{b-a} = (\gamma+1)\left[L_\gamma(a,b)\right]^\gamma$$

ve

$$\frac{b^\gamma - a^\gamma}{b-a} = \gamma\left[L_{\gamma-1}(a,b)\right]^{\gamma-1}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} L_\gamma^\gamma(a,b) &\leq \frac{1}{2}\left[\left[M_n^{[\gamma]}(x;p)\right]^\gamma + (\gamma+1)\left[L_\gamma(a,b)\right]^\gamma - \gamma A_n(x,p)\left[L_{\gamma-1}(a,b)\right]^{\gamma-1}\right] \\ &\leq A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer Önerme 3.1.7 de $x_i = t$, $i = 1, ..., n$ olarak seçilirse,

$$L_\gamma^\gamma - t^\gamma \leq \gamma\left[L_\gamma^\gamma - tL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - t^\gamma, \ t \in [a,b]$$

elde edilir. Buradaki ikinci $\gamma\left[L_\gamma^\gamma - tL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - t^\gamma$ eşitsizlik,

$$0 \leq \gamma\left[L_\gamma^\gamma - AL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - A^\gamma,$$

$$0 \leq \gamma\left[L_\gamma^\gamma - LL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - L^\gamma,$$

$$0 \leq \gamma\left[L_\gamma^\gamma - IL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - I^\gamma,$$

ve

$$0 \leq \gamma\left[L_\gamma^\gamma - GL_{\gamma-1}^{\gamma-1}\right] \leq 2A\left(b^\gamma, a^\gamma\right) - L_\gamma^\gamma - G^\gamma$$

özel eşitsizlikleri verir.

Önerme 3.1.8 : $0 < a < b$, $x_i \in [a,b]$ ve $p_i > 0$, $i = 1, ...n$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{H_n(p,x) - L(a,b)}{L(a,b)} &\leq \frac{1}{2}\frac{A_n(p,x)\,H_n(p,x) - G^2(a,b)}{G^2(a,b)} \\ &\leq \frac{A(a,b)\,H_n(p,x) - G^2(a,b)}{G^2(a,b)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

eşitsizliği vardır. Burada $H_n(p,x)$ harmonik ortalamadır. Yani,

$$H_n(p,x) = \left[M_n^{[-1]}(x;p)\right]^{-1} = \frac{P_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i}}$$

dir.

İspat : Teorem 3.1.3 de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [a,b]$ seçilirse,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{p_i}{x_i} + \frac{\frac{b}{b}-\frac{a}{a}}{b-a} - A_n(x,p)\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}\right] \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

elde edilir. Yani,

$$\frac{1}{L(a,b)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_n(p,x)} + \frac{A_n(p,x)}{G^2(a,b)}\right] \leq \frac{A(a,b)}{G^2(a,b)}$$

olarak yazılır. Buradan hareketle,

$$\frac{1}{L(a,b)} - \frac{1}{H_n(p,x)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{A_n(x,p)}{G^2(a,b)} - \frac{1}{H_n(p,x)}\right] \leq \frac{A(a,b)}{G^2(a,b)} - \frac{1}{H_n(p,x)}$$

olarak elde edilir. Bu da,

$$\frac{H_n(p,x)-L(a,b)}{L(a,b)H_n(p,x)} \leq \frac{1}{2}\left[\frac{A_n(x,p)H_n(p,x)-G^2(a,b)}{G^2(a,b)H_n(p,x)}\right] \leq \frac{A(a,b)H_n(p,x)-G^2(a,b)}{G^2(a,b)H_n(p,x)}$$

dır ve böylece (3.3) eşitsizliği elde edilir.

Eğer yukarıdaki önermede $x_i = t,\ i = 1,...,n$ seçilirse,

$$\frac{t-L}{L} \leq \frac{1}{2}\frac{t^2-G^2}{G^2} \leq \frac{tA-G^2}{G^2},\ t \in [a,b] \tag{3.4}$$

elde edilir. (3.4) eşitsizliği daha önce verdiğimiz

$$\frac{t-L}{L} \leq \frac{1}{2}\frac{t^2-G^2}{G^2}$$

eşitsizliğini ihtiva eder. Diğer yandan (3.4) eşitsizliğinin ikinci tarafı,

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{I^2-G^2}{G^2} \leq \frac{IA-G^2}{G^2},$$

$$0 \leq \frac{1}{2}\frac{L^2-G^2}{G^2} \leq \frac{LA-G^2}{G^2}$$

şeklindeki özel sonuçlara sahiptir.

Önerme 3.1.9 : $0 < a < b,\ x_i \in [a,b]$ ve $p_i \geq 0\ (i = 1,...,n),\ P_n > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\ln I(a,b) - \ln G_n(p,x) &\geq \frac{L(a,b)-A_n(x,p)}{L(a,b)} \\ &\geq \ln G^2(a,b) - \ln I(a,b) - \ln G_n(p,x)\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $G_n(p,x)$,

$$G_n(p,x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i}\right)^{\frac{1}{P_n}}$$

şeklinde tanımlanan geometrik ortalamadır.

İspat : Eğer Teorem 3.1.3 de $f(x) = -\ln x,\ x \in [a,b]$ seçilirse,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b(-\ln x)\,dx &\leq -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n}p_i\ln x_i + \frac{b\ln b - a\ln a}{b-a} - A_n(x,p)\frac{\ln b-\ln a}{b-a}\right] \\ &\leq -\frac{\ln b+\ln a}{2}\end{aligned}$$

yazılır. Yani,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx \geq \frac{1}{2}\left[\ln G_n(p,x) + \ln\left[eI(a,b)\right] - \frac{A_n(x,p)}{L(a,b)}\right] \geq \ln G(a,b)$$

veya

$$\ln I(a,b) \geq \frac{1}{2}\ln G_n(p,x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln I(a,b) - \frac{A_n(x,p)}{2L(a,b)} \geq \ln G(a,b)$$

dir. Bu eşitsizliğin her tarafına $-\frac{1}{2}\ln I(a,b)$ eklenirse,

$$\frac{1}{2}\ln I(a,b) \geq \frac{1}{2}\left[\ln G_n(p,x) + 1 - \frac{A_n(x,p)}{L(a,b)}\right] \geq \ln G(a,b) - \frac{1}{2}\ln I(a,b)$$

eşitsizliği elde edilir ve bu eşitsizliğin de her tarafına $-\frac{1}{2}\ln G_n(p,x)$ eklenirse,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[\ln I(a,b) - \ln G_n(p,x)\right] &\geq \frac{1}{2}\left[\frac{L(a,b) - A_n(x,p)}{L(a,b)}\right] \\ &\geq \ln G(a,b) - \frac{1}{2}\ln I(a,b) - \frac{1}{2}\ln G_n(p,x)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise önermenin ispatıdır.

Eğer Önerme 3.1.9 daki eşitsizlikte $x_i = t,\ i = 1, ..., n$ seçilirse,

$$\ln I - \ln t \geq \frac{L-t}{L} \geq \ln G^2 - \ln I - \ln t,\ \ t \in [a,b]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik aşağıdaki özel eşitsizlikleri verir:

$$0 \leq \frac{A-L}{L} \leq \ln\left(\frac{IA}{G^2}\right) \quad \text{ve} \quad 0 \leq \frac{I-L}{L} \leq \ln\left(\frac{I^2}{G^2}\right)$$

ve

$$1 \leq \exp\left(\frac{A}{L} - 1\right) \leq \frac{IA}{G^2} \quad \text{ve} \quad 1 \leq \exp\left(\frac{1}{L} - 1\right) \leq \frac{I^2}{G^2}.$$

3.2. Hadamard'ın Alt ve Üst Toplamları

3.2.1. Bazı Eşitsizlikler :

$[a,b]$, reel sayıların kapalı bir alt aralığı olsun. Bu $[a,b]$ aralığının bir parçalanması,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \geq 1)$$

özellikli notaları yardımıyla $d = \{x_i \mid i = 0, ..., n\} \subset [a,b]$ şeklinde tanımlansın ve f, $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir dönüşüm olsun.

Buna göre sırasıyla,

$$h_d(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

toplamı Hadamard'ın alt toplamı,

$$H_d(f) := \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1} - x_i)$$

toplamı da Hadamard'ın üst toplamıdır [6]. Diğer yandan,

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \ M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \ i = 0, ..., n-1$$

olmak üzere,

$$s_d(f) := \sum_{i=0}^{n-1} m_i (x_{i+1} - x_i), \ S_d(f) := \sum_{i=0}^{n-1} M_i (x_{i+1} - x_i)$$

şeklindeki Darboux'un toplamlarını gözönüne alalım. Bir f fonksiyonunun bir $[a,b]$ aralığı üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartın,

$$\sup_d s_d(f) = \inf_d S_d(f) = I \in \mathbb{R}$$

olduğu iyi bilinir. Bu sebeple,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

yazılır.

Teorem 3.2.1 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

i. $h_d(f)$, d parçalanmasına göre monoton artandır. Yani, $d_1 \subseteq d_2$ için $h_{d_1}(f) \leq h_{d_2}(f)$ dir.

ii. $H_d(f)$, d parçalanmasına göre azalandır.

iii.

$$\frac{1}{b-a}\inf_d h_d(f) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), \ \sup_d h_d(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.5}$$

ve

$$\inf_d H_d(f) = \int_a^b f(x)\,dx, \ \frac{1}{b-a}\sup_d H_d(f) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.6}$$

dir.

İspat :

i. Genelliği bozmaksızın, $d_1 \subseteq d_2$, $d_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ve $d_2 = \{x_0, ..., x_k, y, x_{k+1}, ..., x_n\}$, $y \in [x_k, x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n-1)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} h_{d_2}(f) - h_{d_1}(f) = f\left(\frac{x_k+y}{2}\right)(y-x_k) \\ + f\left(\frac{y+x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1}-y) - f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)(x_{k+1}-x_k) \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikte sırasıyla α, β, x ve y için,

$$\alpha = \frac{y-x_k}{x_{k+1}-x_k}, \ \beta = \frac{x_{k+1}-y}{x_{k+1}-x_k}$$

ve

$$x = \frac{x_k+y}{2}, \ z = \frac{y+x_{k+1}}{2}$$

tanımlamalarını yapalım. Bu durumda,

$$\alpha+\beta = 1, \ \alpha x + \beta y = \frac{x_k+x_{k+1}}{2}$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler ve f fonksiyonunun konveksliğinden dolayı,

$$\alpha f(x) + \beta f(z) \geq f(\alpha x + \beta z)$$

dir. Böylece,

$$h_{d_2}(f) \geq h_{d_1}(f)$$

eşitsizliği elde edilir.

ii. $d_1 \subseteq d_2$, $d_1 = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ve $d_2 = \{x_0, ..., x_k, y, x_{k+1}, ..., x_n\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_{d_2}(f) - H_{d_1}(f) &= \frac{f(x_k) + f(y)}{2}(y - x_k) \\ &+ \frac{f(y) + f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1} - y) - \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}(x_{k+1} - x_k) \\ &= \frac{f(y)(x_{k+1} - x_k)}{2} - \frac{f(x_k)(x_{k+1} - y) + f(x_{k+1})(y - x_k)}{2} \end{aligned}$$

yazılır.

Şimdi $\alpha = \dfrac{y - x_k}{x_{k+1} - x_k}$, $\beta = \dfrac{x_{k+1} - y}{x_{k+1} - x_k}$ ve $u = x_k, v = x_{k+1}$ olsun. Bu durumda, $\alpha u + \beta v = y$ olması ve f fonksiyonunun konveksliğinden,

$$\alpha f(u) + \beta f(v) \geq f(y)$$

eşitsizliği yazılır. Yani,

$$H_{d_2}(f) \leq H_{d_1}(f)$$

dir.

iii. $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması $d = \{x_0, ..., x_n\}$ olsun. $p_i := x_{i+1} - x_i$, $u_i = \dfrac{(x_i + x_{i+1})}{2}$, $i = 0, ..., n-1$ tanımlamalarını yapalım. Bu durumda Jensen'ın ayrık(discrete) eşitsizliği yardımıyla,

$$f\left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i u_i}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}\right) \leq \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i f(u_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} p_i}$$

eşitsizliği yazılır.

$$\sum_{i=0}^{n} p_i = b - a, \quad \sum_{i=0}^{n} p_i u_i = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

olduğundan,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} h_d(f)$$

sonucu çıkarılır. Eğer, $d = d_0 = \{a, b\}$ ise,

$$h_{d_0}(f) = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.5) deki ilk sınırın ispatıdır.

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ilk eşitsizliği ile, $[a, b]$ aralığındaki tüm d parçalanmaları için,

$$\begin{aligned} h_d(f) &= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan,

$$f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) \leq \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx, \; i = 0, ..., n-1$$

eşitsizlik yazılır.

$$s_d(f) \leq h_d(f) \leq \int_a^b f(x)\,dx$$

eşitsizliklerinde d, $[a, b]$ aralığının bir parçalanması ve f, $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir olduğundan, yani

$$\sup_d s_d(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

olduğundan

$$\sup_d h_d(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir. Bu da (3.5) deki ikinci kısmı gösterir.

Şimdi (3.6) yı ispatlamak için Hermite-Hadamard sonucundaki ikinci eşitsizlik yardımıyla,

d, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması olmak üzere,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i) \\ &= H_d(f)\end{aligned}$$

eşitsizliğini gözönüne alalım. d, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve f, $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olduğundan,

$$H_d(f)\leq S_d(f)$$

için,

$$\inf_d H_d(f)=\int_a^b f(x)\,dx$$

eşitliğini yazarız. Son olarak d, $[a,b]$ nin bir parçalanması olduğu için, $d\supseteq d_0=\{a,b\}$ yazılır. Böylece,

$$\frac{1}{b-a}\sup_d H_d(f)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitliği elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında konveks bir dönüşüm olsun. Böylece tüm $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ için,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1}-x_i) \\ &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i) \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\end{aligned} \tag{3.7}$$

eşitsizliği elde edilir. $n\geq 1$ için,

$$h_n(f):=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(a+\frac{2i+1}{2n}(b-a)\right)$$

ve

$$H_n(f) := \frac{1}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{i+1}{n}(b-a)\right)\right]$$

dizilerini tanımlayalım.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında konveks bir dönüşüm ve $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq h_n(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq H_n(f) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \end{aligned} \tag{3.8}$$

eşitsizliği vardır. Buna ek olarak,

$$\lim_{n\to\infty} h_n(f) = \lim_{n\to\infty} H_n(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \tag{3.9}$$

limitleri de vardır.

Bu durumları göstermek için,

$$d := \left\{x_i = a+\frac{i}{n}(b-a) \mid i=0,...,n\right\}$$

parçalanmasını gözönüne alalım. Buradaki (3.8) eşitsizliği (3.7) ile elde edilir. (3.9) eşitlikleri ise f fonksiyonunun integrallenebilmesinden açıktır.

Şimdi $n\geq 1$ için,

$$t_n(f) := \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{2^i}{2^{n+1}}(b-a)\right)2^i$$

ve

$$T_n(f) := \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f\left(a+\frac{2^i}{2^n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{2^{i+1}}{2^n}(b-a)\right)\right]2^i$$

dizilerini tanımlayalım ve şöyle bir sonuç vererek ispatından kısaca bahsedelim.

Burada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde bir konveks dönüşüm olmak üzere,

i. $t_n(f)$ monoton artandır;

ii. $T_n(f)$ monoton azalandır;

iii. Aşağıdaki sınırlar vardır:

$$\lim_{n\to\infty} t_n(f) = \sup_{n\geq 1} t_n(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f) = \inf_{n\geq 1} T_n(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

dir.

İspat : (i) ve (ii),

$$d_n := \left\{ x_i = a + \frac{2^i}{2^n}(b-a) \mid i = 0, ..., n \right\} \subseteq d_{n+1},\ n \in \mathbb{N}$$

için Teorem 3.2.1 in (i) ve (ii) şıklarından açıktır.

(iii) ise f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilir olmasından ve (3.5) ve (3.6) nın sınırlarından elde edilir.

3.2.2. Özel Ortalamalar İçin Uygulamalar :

$[a,b]$, reel sayıların kompakt bir aralığı ve $d \in Div\,[a,b]$ olsun. Yani, $d := \{x_i \mid i = 0, ..., n\} \subset [a,b]$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ şeklinde verilen $[a,b]$ aralığının bir parçalanmasıdır. $p \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \setminus \{-1\}$ için,

$$h_d^{[p]} := \sum_{i=0}^{n-1} A^p\left(x_i, x_{i+1}\right)\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

ve

$$H_d^{[p]} := \sum_{i=0}^{n-1} A\left(x_i^p, x_{i+1}^p\right)\left(x_{i+1} - x_i\right)$$

toplamlarını tanımlayalım. Her $d \in Div\,[a,b]$ için,

$$\begin{aligned} A^p(a,b) &\leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} A^p\left(x_i, x_{i+1}\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &\leq L_p^p(a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx \\ &\leq \frac{1}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} A\left(x_i^p, x_{i+1}^p\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) \\ &\leq A\left(a^p, b^p\right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri vardır. Bununla birlikte

$$\frac{1}{b-a}\sup_d h_d^{[p]} = L_p^p(a,b)$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\inf_d H_d^{[p]} = L_p^p(a,b)$$

sınırları vardır. Şimdi $0 < a < b$ için,

$$h_d^{[-1]} = 2\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} + x_i}$$

ve

$$H_d^{[-1]} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{x_i x_{i+1}}$$

toplamlarını tanımlayalım. Burada her $d \in Div\,[a,b]$ parçalanması için,

$$\begin{aligned} A^{-1}(a,b) &\leq \frac{2}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1} + x_i} \leq L^{-1}(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2(b-a)}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1}^2 - x_i^2}{x_i x_{i+1}} \leq H^{-1}(a,b) \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır ve sınırlar,

$$\frac{1}{b-a}\sup_{d} h_d^{[-1]} = L^{-1}(a,b)$$

ve

$$\frac{1}{b-a}\inf_{d} H_d^{[-1]} = L^{-1}(a,b)$$

dir. Aynı zamanda $[a,b] \subset (0,\infty)$ aralığının bir d parçalanması için,

$$H_d^{[0]} := \prod_{i=0}^{n-1} [A(x_i, x_{i+1})]^{(x_{i+1}-x_i)}$$

ve

$$h_d^{[0]} := \prod_{i=0}^{n-1} [G(x_i, x_{i+1})]^{(x_{i+1}-x_i)}$$

dizilerini tanımlayabiliriz.

Yukarıdaki sonuçları kullanarak $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f(x) = -\ln x$ konveks dönüşümü için (3.7) eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} A(a,b) &\geq \prod_{i=0}^{n-1} [A(x_i, x_{i+1})]^{\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}} &\geq I(a,b) \\ &\geq \prod_{i=0}^{n-1} [G(x_i, x_{i+1})]^{\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}} &\geq G(a,b) \end{aligned}$$

yazılır.

Teorem 3.2.1 ile,

$$\inf_{d} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} [A(x_i, x_{i+1})]^{\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}} \right\} = I(a,b)$$

ve

$$\sup_{d} \left\{ \prod_{i=0}^{n-1} [G(x_i, x_{i+1})]^{\frac{x_{i+1}-x_i}{b-a}} \right\} = I(a,b)$$

sınırlarını yazabiliriz.

3.3. Mutlak Değer İçin H.-H. Eşitsizliğinin Geliştirilmesi

3.3.1. Mutlak Değer için Bazı Eşitsizlikler : S.S. Dragomir [14] numaralı çalışmasında olduğu gibi, H.-H. eşitsizliğinin ikinci tarafının geliştirilmesini içeren bazı temel yapıları ele alalım.

Teorem 3.3.1 : $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Bu durumda, H.-H. eşitsizliğinin sağ tarafı,

$$\begin{aligned} &\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\geq \begin{cases} \left| f(a) - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx \right| & , \quad f(a) = f(b) \\ \left| \frac{1}{f(b)-f(a)}\int_{f(a)}^{f(b)} |x|\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx \right| & , \quad f(a) \neq f(b) \end{cases} \end{aligned} \tag{3.10}$$

şeklinde genişletilebilir.

İspat : f fonksiyonunun I üzerinde konveksliğinden ve mutlak değerin süreklilik özelliğinden her $a, b \in I$ ve $t \in [0,1]$ için,

$$\begin{aligned} &tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b) \\ &\qquad = |tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ &\qquad \geq ||tf(a) + (1-t)f(b)| - |f(ta + (1-t)b)|| \geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinde t bağımsız değişkenine göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} &f(a)\int_0^1 tdt + f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt - \int_0^1 f(ta + (1-t)b)\,dt \\ &\qquad \geq \left| \int_0^1 |tf(a) + (1-t)f(b)|\,dt - \int_0^1 |f(ta + (1-t)b)|\,dt \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\int_0^1 tdt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\int_0^1 |tf(a)+(1-t)f(b)|\,dt = \begin{cases} f(a) & , \quad f(a)=f(b) \\ \dfrac{1}{f(b)-f(a)}\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} |x|\,dx & , \quad f(a)\neq f(b) \end{cases}$$

ve

$$\int_0^1 |f(ta+(1-t)b)|\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx$$

dir. Böylece (3.10) eşitsizliği ispatlanır.

Bu teorem için şu sonucu yazabiliriz: $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Böylece $\forall x\in[a,b]$ için $f(a+b-x)=f(x)$ olmak üzere,

$$f(a)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \left| |f(a)| - \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|\,dx \right| \geq 0$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.3.2 : $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $a,b\in I$, $a<b$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\qquad \geq \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b \left| \frac{f(x)+f(a+b-x)}{2} \right| dx - \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right| \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : f fonksiyonunun konveksliğinden $\forall x,y\in I$ için,

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \left| \left| \frac{f(x)+f(y)}{2} \right| - \left| f\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \right|$$

eşitsizliği yazılır. $t\in[0,1]$ için $x=ta+(1-t)b$, $y=(1-t)a+tb$ tanımlayalım.

$\forall t\in[0,1]$ için,

$$\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \left|\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}\right|-\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin $[0,1]$ üzerinden t bağımsız değişkenine göre integrali alınırsa,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt+\frac{1}{2}\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt-f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \left|\int_0^1\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}\right|dt-\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Bununla birlikte,

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt=\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

ve $x:=ta+(1-t)b$, $t\in[0,1]$ için,

$$\int_0^1\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}\right|dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\right|dx$$

elde edilir. Böylece (3.11) eşitsizliği ispatlanır.

Yine bu teorem için şöyle bir sonuç verebiliriz: $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir konveks fonksiyon ve $a,b\in I, a<b$ olsun. $\forall x\in[a,b]$ için $f(a+b-x)=f(x)$ sağlanması durumunda,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\,dx-\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|\geq 0$$

eşitsizliği vardır.

3.3.2. Özel Ortalamalar için Uygulamalar :

$$G(a,b)\leq I(a,b)\leq A(a,b)$$

eşitsizliği $(G-I-A)$ olarak ifade edilen bir eşitsizliktir. $a<b$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere,

$$G(a,b):=\sqrt{ab}$$

geometrik ortalama,

$$I(a,b) := \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}$$

identrik ortalama ve

$$A(a,b) := \frac{a+b}{2}$$

ise aritmetik ortalamadır.

Önerme 3.3.1 : $a \in (0,1]$, $b \in [1,\infty)$, $a \neq b$ ise,

$$\frac{I(a,b)}{G(a,b)} \geq \exp\left[\left|\frac{(\ln b)^2 + (\ln a)^2}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)^2} - \ln\left[\left(b^b a^a e^{2-(a+b)}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right]\right|\right] \geq 1$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik $(G-I-A)$ eşitsizliğinin ilk tarafını sağlar.

İspat : $a \in (0,1]$, $b \in [1,\infty)$ ve $a \neq b$ olsun. Bu durumda $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ konveks dönüşümü için,

$$\begin{aligned}
A &:= \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= -\frac{\ln a + \ln b}{2} + \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[b\ln b - a\ln a - (b-a)\right] - \ln G(a,b) \\
&= \ln\left[\frac{I(a,b)}{G(a,b)}\right]
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada,

$$B := \left|\frac{1}{f(b)-f(a)}\int_{f(b)}^{f(a)} |x|\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b |\ln x|\,dx\right|$$

olarak tanımlansın. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int_{\ln a}^{\ln b} |x|\,dx &= -\int_{\ln a}^{\ln 1} xdx + \int_{\ln 1}^{\ln b} xdx \\
&= \frac{(\ln b)^2 + (\ln a)^2}{2}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\int_a^b |\ln x|\,dx &= -\int_a^1 \ln x dx + \int_1^b \ln x dx \\ &= b\ln b + a\ln a - (a+b) + 2 \\ &= \ln\left[a^a b^b e^{2-(a+b)}\right]\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla,

$$B = \left| \frac{(\ln b)^2 + (\ln a)^2}{\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)^2} - \ln\left[\left(a^a b^b e^{2-(a+b)}\right)^{\frac{1}{b-a}}\right] \right|$$

yazılır. (3.10) eşitsizliği kullanılarak $A \geq B \geq 0$ yazılabilir. Böylece önerme ispatlanır.

Önerme 3.3.2 : $a, b \in (0, \infty)$, $a \neq b$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{A(a,b)}{I(a,b)} \geq \exp\left[\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\ln\sqrt{x(a+b-x)}\right| dx - \left|\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|\right] \geq 1$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlik $(G - I - A)$ eşitsizliğinin ikinci tarafını sağlar.

İspat : $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ için,

$$\begin{aligned} C &:= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \ln I(a,b) \\ &= \ln\left[\frac{A(a,b)}{I(a,b)}\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D &:= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f(x) + f(a+b-x)}{2}\right| dx - \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right| \\ &= \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\ln\sqrt{x(a+b-x)}\right| dx - \left|\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right| \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. (3.11) eşitsizliğinden $C \geq D \geq 0$ elde edilir ve böylece önerme ispatlanır.

3.4. Diferensiyellenebilir Konveks Fonksiyonlar İçin Daha Genel Eşitsizlikler

3.4.1. İntegral Eşitsizlikleri :

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ olsun. $f' \in L_1[a, b]$ ise,

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx \tag{3.12}$$

eşitliği vardır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx &= \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\,dx \\ &= (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)\,dx\end{aligned}$$

eşitliği yardımıyla hemen (3.12) eşitliği görülür.

Teorem 3.4.1 : Eğer f dönüşümü $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir ve

$$\varphi(x) := \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)$$

dönüşümü $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\frac{b-a}{8}\left(f'(a) - f'(b)\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \tag{3.13}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : φ dönüşümü için Hadamard ve Bullen eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right] \geq \frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\frac{b-a}{2}\left(f'(b) - f'(a)\right)}{2}\right] \geq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

elde edilir. Yazılan bu eşitsizlikler yardımıyla (3.13) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 3.4.1 : $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrallenebilir dönüşümler ve,

$$(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0,\ \forall x, y \in [a, b]$$

olacak şekilde sekronize olsun. Bu durumda,

$$C(f,g) \geq \max\{|C(|f|,|g|)|, |C(|f|,g)|, |C(f,|g|)|\} \geq 0 \tag{3.14}$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$C(f,g) := (b-a)\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx$$

şeklindedir.

İspat : f, g sekronize dönüşümleri için,

$$0 \leq (f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) = |(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))|$$

eşitsizliği yazılır. Diğer yandan mutlak değerce süreklilik yardımıyla $\forall x, y \in [a,b]$ için,

$$|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))| \geq |(|f(x)|-|f(y)|)(|g(x)|-|g(y)|)|,$$

$$|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))| \geq |(|f(x)|-|f(y)|)(g(x)-g(y))|$$

ve

$$|(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))| \geq |(f(x)-f(y))(|g(x)|-|g(y)|)|$$

eşitsizlikleri yazılır.

İlk olarak (3.14) deki ilk eşitsizliği ispatlayalım.

(x,y) değişkenlerine göre $[a,b]^2$ üzerinden integral alınırsa,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,dxdy \\ &\qquad \geq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |(|f(x)|-|f(y)|)(|g(x)|-|g(y)|)|\,dxdy \\ &\qquad \geq \left|\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (|f(x)|-|f(y)|)(|g(x)|-|g(y)|)\,dxdy\right| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler gözönüne alınarak ve basit hesaplar yapılarak,

$$C(f,g) = \frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\,dxdy$$

ve

$$C\left(|f|,|g|\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{(b-a)^{2}}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(|f(x)|-|f(y)|\right)\left(|g(x)|-|g(y)|\right)dxdy$$

elde edilir ve bu da (3.14) eşitsizliğinin ilk bölümüdür.

Teorem 3.4.2 : $f:I\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir konveks bir dönüşüm ve $a,b\in\overset{\circ}{I}$, $a<b$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx\geq\max\left\{|A|,|B|,|C|\right\}>0 \tag{3.15}$$

eşitsizliği vardır. Burada sırasıyla A, B ve C,

$$A:=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|dx-\frac{1}{4}\int_{a}^{b}\left|f'(x)\right|dx;$$

$$B:=\frac{f(b)-f(a)}{4}+\frac{1}{b-a}\left[\int_{a}^{\frac{a+b}{2}}f(x)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)\,dx\right]$$

ve

$$C:=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left|f'(x)\right|dx$$

şeklindedir.

İspat : f fonksiyonu I üzerinde konveks, f' ve $\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$ dönüşümleri $[a,b]$ üzerinde sekronize olsun. Bu şartlarda Lemma 3.4.1 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}(b-a)\int_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx-\int_{a}^{b}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\int_{a}^{b}f'(x)\,dx&\\ \geq\max\left\{\left|\overline{A}\right|,\left|\overline{B}\right|,\left|\overline{C}\right|\right\}\geq0&\end{aligned} \tag{3.16}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$$\overline{A}:=(b-a)\int_{a}^{b}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|dx-\int_{a}^{b}\left|x-\frac{a+b}{2}\right|dx\int_{a}^{b}\left|f'(x)\right|dx,$$

$$\overline{B} := (b-a)\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right| f'(x)\,dx - \int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right| dx \int_a^b f'(x)\,dx$$

ve

$$\overline{C} := (b-a)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) |f'(x)|\,dx - \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx \int_a^b |f'(x)|\,dx$$

şeklindedir. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) dx &= \left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{a+b}{2}x\right)\right|_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2}-\frac{a+b}{2}b+\frac{a+b}{2}a=0\end{aligned}$$

ve

$$\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right| dx = \frac{(b-a)^2}{4}$$

olarak hesaplandığından $\overline{A}$, $\overline{B}$ ve $\overline{C}$ değerleri,

$$\overline{A} := (b-a)\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right| |f'(x)|\,dx - \frac{(b-a)^2}{4}\int_a^b |f'(x)|\,dx,$$

$$\overline{B} := \frac{(b-a)^2}{4}\left(f(b)-f(a)\right) + \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right]$$

ve

$$\overline{C} := (b-a)\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) |f'(x)|\,dx$$

şeklinde yazılır. (3.16) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'(x)\,dx \geq \max\left\{|A|,|B|,|C|\right\} \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. A, B ve C yukarıda verildiği gibidir. (3.12) deki eşitlik gözönüne alınırsa (3.15) elde edilir.

Teorem 3.4.3 : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir dönüşüm, $a,b\in\overset{\circ}{I}$, $a<b$ ve $p>1$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında q-integrallenebilir ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.17}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olacak şekilde $p>1$ ve $q>1$ için Hölder integral eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx\right|\le\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\times\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

yazılır. Bu eşitsizlikte,

$$\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^p dx=2\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^p dx=\frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)\,2^p}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece,

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|x-\frac{a+b}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\left(\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)\,2^p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\&=\frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

bulunur ve (3.17) eşitsizliği elde edilir.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir dönüşüm, $a,b\in\overset{\circ}{I}$, $a<b$ ve $p>1$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun $\overset{\circ}{I}$ üzerinde konveks olmasından,

$$0\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le\frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b|f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

Aşağıdaki sonuç Grüss integral eşitsizliği olarak bilinir.

Lemma 3.4.2 : $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir fonksiyonlar yani $\forall x \in [a,b]$ için $\varphi \leq f(x) \leq \phi, \gamma \leq g(x) \leq \Gamma$ olsun. Bu durumda,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{4} (\phi - \varphi)(\Gamma - \gamma)$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 3.4.4 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathring{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in \mathring{I}$, $a < b$ ve $\forall x\, [a,b]$ için $m \leq f'(x) \leq M$ olsun. Eğer $f' \in L_1 [a,b]$ ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4} \tag{3.18}$$

dir.

İspat : $x \in [a,b]$ için $g(x) = x - \dfrac{a+b}{2}$ dönüşümü tanımlansın. Bu durumda $\forall x \in [a,b]$ için,

$$-\left(\frac{b-a}{2}\right) \leq g(x) \leq \frac{b-a}{2}$$

eşitsizliği vardır. Böylece, Grüss eşitsizliği yardımıyla,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\, dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx \frac{1}{b-a} \int_a^b f'(x)\, dx \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4}$$

elde edilir.

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx = 0$$

olduğundan ve (3.12) tanımından,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'(x)\, dx \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4}$$

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \frac{(M-m)(b-a)}{4}$$

eşitsizliği elde edilir.

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ ve $\forall x\,[a,b]$ için $m \leq f'(x) \leq M$ olsun. f, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde konveks olduğundan,

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{(f'(b)-f'(a))(b-a)}{4}$$

yazılır.

Şimdi tanınmış H.-H. integral eşitsizliğinin ilk tarafı ile bağlantılı bazı yeni eşitsizlikler oluşturalım.

Lemma 3.4.3 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ ve $f' \in L_1[a,b]$ olsun. Böylece,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)\,f'(x)\,dx \tag{3.19}$$

eşitliği vardır. Bu eşitlikte,

$$p(x) = \begin{cases} x-a & , \quad x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ x-b & , \quad x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat : Kısmi integrasyon metodu kullanılarak sırasıyla,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\,f'(x)\,dx = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx$$

ve

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)\,f'(x)\,dx = \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler toplanırsa,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) f'(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b) f'(x)\, dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(x)\, dx$$

sonucu çıkarılır. Buradan da,

$$\int_a^b p(x) f'(x)\, dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) f'(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b) f'(x)\, dx$$

olduğu açıktır. Böylece verilen eşitlik ispatlanır.

Aynı zamanda,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b q(x) f'(x)\, dx \tag{3.20}$$

$$q(x) := \begin{cases} a-x & , \quad x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ b-x & , \quad x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

gösteriminin olduğuda açıktır.

Eğer,

$$\overline{p}(x) := \begin{cases} x-a & , \quad x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right] \\ x-b & , \quad x \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

ve

$$\overline{q}(x) := \begin{cases} a-x & , \quad x \in \left[a, \dfrac{a+b}{2}\right) \\ b-x & , \quad x \in \left[\dfrac{a+b}{2}, b\right] \end{cases}$$

olacak şekilde ayrı ayrı seçilirse aynı sonuçlar elde edilir.

Teorem 3.4.5 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ ve $p > 1$ olsun. Eğer $|f'|$, $[a,b]$ aralığında q-integrallenebilir ise,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \right| \le \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_a^b |f'(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.21}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)\,f'(x)\,dx\right| \le \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |p(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Bununla birlikte,

$$\int_a^b |p(x)|^p\,dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} |x-a|^p\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |x-b|^p\,dx = \frac{(b-a)^{p+1}}{(p+1)\,2^p}$$

olduğundan (3.21) eşitsizliği ispatlanır.

Teoremdeki varsayımlar ile f fonksiyonunun $\overset{\circ}{I}$ üzerinde konveks olmasından,

$$0 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b |f'(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 3.4.6 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşüm, $a, b \in \overset{\circ}{I}$, $a < b$ ve $\forall x\,[a,b]$ için $m \le f'(x) \le M$ olsun. $f' \in L_1[a,b]$ ise aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{(M-m)(b-a)}{4}$$

3.4.2. Özel Ortalamalar için Uygulamalar :

Önerme 3.4.1 : $p > 1$ ve $[a,b] \subset [o,\infty)$ olsun. $q := \dfrac{p}{p-1}$ olmak üzere,

$$0 \le A(a^p, b^p) - L_p^p(a,b) \le \frac{p(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_p(a,b)\right]^{\frac{p}{q}} \tag{3.22}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $f(x) = x^p$ konveks dönüşümü için Teorem 3.4.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\frac{a^p+b^p}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b x^p dx &\le \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b |px^{p-1}|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}p\left(\int_a^b x^{(p-1)q}dx\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$$\begin{aligned}
\int_a^b x^{(p-1)q}dx &= \left.\frac{x^{pq-q+1}}{pq-q+1}\right|_a^b \\
&= \frac{b^{pq-q+1}-a^{pq-q+1}}{pq-q+1} \\
&= \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \\
&= L_p^p(a,b)(b-a)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
A(a^p,b^p)-L_p^p(a,b) &\leq \frac{p(b-a)^{\frac{1}{p}}}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}(b-a)^{\frac{1}{q}}[L_p(a,b)]^{\frac{p}{q}} \\
&= \frac{p(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}[L_p(a,b)]^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.22) eşitsizliği ispatlanır.

Önerme 3.4.2 : $p>1$ ve $0<a<b$ olsun. Bu şartlar altında aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$0 \leq H^{-1}(a,b)-L^{-1}(a,b) \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{\frac{p+1}{1-p}}(a,b)\right]^{\frac{p+1}{p}} \tag{3.23}$$

İspat : $f(x):=\dfrac{1}{x}$ konveks dönüşümü için, $1-2q=\dfrac{p+1}{1-p}$ olmak üzere Teorem 3.4.3 gözönüne alınırsa,

$$0 \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}-\frac{\ln b-\ln a}{b-a} \leq \frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b \frac{dx}{x^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{dx}{x^{2q}} &= \left.\frac{x^{-2q+1}}{-2q+1}\right|_a^b \\
&= \frac{b^{-2q+1}-a^{-2q+1}}{-2q+1} \\
&= (b-a)L_{1-2q}^{1-2q}(a,b)
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
0 &\leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \\
&\leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{1-2q}^{1-2q}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{\frac{p+1}{1-p}}(a,b)\right]^{\frac{p+1}{p}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece önerme ispatlanır.

Önerme 3.4.3 : $p > 1$ ve $0 < a < b$ olsun.

$$1 \leq \frac{I(a,b)}{G(a,b)} \leq \exp\left[\frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{-p}(a,b)\right]^{(1-p)}\right] \tag{3.24}$$

dir.

İspat : $f(x) = -\ln x$, $x > 0$ konveks dönüşümü için Teorem 3.4.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx - \frac{\ln a + \ln b}{2} &\leq \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\int_a^b \frac{dx}{x^q}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}(b-a)^{\frac{1}{q}}}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{-p}^{-p}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(b-a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{-p}^{-p}(a,b)\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(b-a)}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{-p}(a,b)\right]^{(1-p)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Teorem 3.4.4 ile ilgili bazı uygulamaları verelim.

Önerme 3.4.4 : $p > 1$ ve $0 \leq a < b$ olsun. Bu durumda,

$$0 \leq A(a^p, b^p) - L_p^p(a,b) \leq \frac{p(p-1)}{4}(b-a)^2 L_{p-2}^{p-2}(a,b) \tag{3.25}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $f(x) = x^p$, $p > 1$ için Teorem 3.4.4 uygulanırsa, $\forall x \in [a,b]$ için,

$$pa^{p-1} \leq f'(x) \leq pb^{p-1}$$

dir. Böylece, (3.18) eşitsizliğinden,

$$0 \leq A(a^p, b^p) - L_p^p(a,b) \leq \frac{p\left(b^{p-1} - a^{p-1}\right)(b-a)}{4}$$
$$= \frac{p(p-1)}{4}(b-a)^2 L_{p-2}^{p-2}(a,b)$$

elde edilir.

Önerme 3.4.5 : $0 < a < b$ olsun.

$$0 \leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \leq \frac{\left(b^2 - a^2\right)(b-a)}{4a^2b^2} \tag{3.26}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ için Teorem 3.4.4 uygulanırsa,

$$-\frac{1}{a^2} \leq f'(x) = -\frac{1}{x^2} \leq -\frac{1}{b^2}$$

dır ve böylece

$$M - m = -\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{b^2 - a^2}{4a^2b^2}$$

elde edilir. (3.18) eşitsizliği kullanılarak ispat tamamlanır.

Önerme 3.4.6 : $0 < a < b$ ise,

$$1 \leq \frac{I(a,b)}{G(a,b)} \leq \exp\left[\frac{(b-a)^2}{4ab}\right]$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.4.4 kullanılarak yapılır.

Eğer Teorem 3.4.5 kullanılırsa $p > 1$ ve $q := \dfrac{p}{p-1}$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$0 \leq A(a^p, b^p) - L_p^p(a,b) \leq \frac{p(b-a)\, L_p^{\frac{p}{q}}(a,b)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}},$$

$$0 \leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{\frac{(p+1)}{1-p}}(a,b)\right]^{\frac{p+1}{p}}$$

ve

$$1 \leq \frac{I(a,b)}{G(a,b)} \leq \exp\left[\frac{(b-a)}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[L_{-p}^{1-p}(a,b)\right]\right]$$

dir.

Diğer yandan eğer Teorem 3.4.6 kullanılırsa $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$0 \leq A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p\left(a, b\right) \leq \frac{p\left(p-1\right)}{4}\left(b-a\right)^2 L_{p-2}^{p-2}\left(a, b\right),$$

$$0 \leq H^{-1}\left(a, b\right) - L^{-1}\left(a, b\right) \leq \frac{\left(b^2-a^2\right)\left(b-a\right)}{4a^2b^2}$$

ve

$$1 \leq \frac{I\left(a, b\right)}{G\left(a, b\right)} \leq \exp\left[\frac{\left(b-a\right)^2}{4ab}\right]$$

dir.

3.5. İki Kez Diferensiyellenebilir Konveks Fonksiyonlar İçin Daha Genel Eşitsizlikler

3.5.1. İki kez diferensiyellenebilen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri :

Lemma 3.5.1 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve f'', $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ üzerinde intgrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - \int_a^b f(x)\,dx \tag{3.27}$$

eşitliği vardır.

İspat : Kısmi integrasyon yöntemi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x)\,dx &= \frac{1}{2}(x-a)(b-x) f'(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \left[-2x+(a+b)\right] f'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \left[2x-(a+b)\right] f'(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[(2x-(a+b)) f(x)|_a^b - 2\int_a^b f(x)\,dx\right] \\
&= \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) - \int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

işlemleri yapılır. Böylece (3.27) eşitliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.1 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve f'', $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ üzerinde integrallenebilir olsun. $[a,b]$ aralığında $k \leq f''(x) \leq K$ verilirse,

$$k \cdot \frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq K \cdot \frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.28}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $\forall x \in [a,b]$ için,

$$k(x-a)(b-x) \leq (x-a)(b-x) f''(x) \leq K(x-a)(b-x)$$

eşitsizliği yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx &\leq \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx \\ &\leq \frac{K}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte verilen integraller (3.27) yardımıyla hesaplanarak,

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b f(x)\,dx$$

ve

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx &= \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{(a+b)x^2}{2}-abx\right]\Bigg|_a^b \\ &= \frac{(b-a)^3}{6}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece (3.28) eşitsizliği ispatlanır.

Teoremdeki varsayımlar ile birlikte $\|f''\|_\infty := \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)| \leq \infty$ verilirse,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \|f''\|_\infty \frac{(b-a)^2}{12}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 3.5.2 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve f'', $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ üzerinde intgrallenebilir olsun. Eğer $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = (x-a)(b-x)f''(x)$$

dönüşümü $[a,b]$ aralığında konveks ise,

$$\begin{aligned}\frac{(b-a)^2}{16}f''\left(\frac{a+b}{2}\right) &\geq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\geq \frac{(b-a)^2}{8}f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned} \tag{3.29}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : φ dönüşümü için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ilk tarafı uygulanırsa,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx \geq \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{4} f''\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

yazılır ve Bullen eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(x)\,dx &\leq \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\varphi(a)+\varphi(b)}{2}\right] \\ &= \frac{(b-a)^2}{8} f''\left(\frac{a+b}{2}\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (3.29) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.3 : $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve f'', $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ üzerinde integrallenebilir olsun. Bu varsayımlar ile birlikte $p > 1$, $q := \dfrac{p}{p-1}$ ve $|f''|$, $[a,b]$ aralığında q-Lebesque anlamında integrallenebilir ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}} \left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}} \|f''\|_q \qquad (3.30)$$

eşitsizliği vardır. B, Euler Beta fonksiyonudur.

İspat : (3.27) denklemi ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ &\qquad = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x)\,dx\right| \qquad (3.31) \\ &\qquad \leq \frac{1}{2(b-a)}\left(\int_a^b (x-a)^p (b-x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f''(x)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

elde edilir. $x = (1-t)a + tb$ olarak tanımlanırsa $dx = (b-a)\,dt$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}\int_a^b (x-a)^p (b-x)^p\,dx &= (b-a)\int_0^1 ((1-t)a + tb - a)^p (b-(1-t)a - tb)^p\,dt \\ &= (b-a)^{2p+1}\int_0^1 t^p (1-t)^p\,dt \\ &= (b-a)^{2p+1} B(p+1,p+1)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada B,

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt, \quad p,q>0$$

şeklinde tanımlanan Euler Beta fonksiyonudur. (3.31) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \frac{(b-a)^{\frac{2p+1}{p}}}{2(b-a)}\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}}\|f''\|_q \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}}\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}}\|f''\|_q\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece teorem ispatlanır.

Eğer $p>1$, $p\in\mathbb{N}$ ise,

$$B(p+1,p+1)=\frac{p!}{(p+1)\ldots(2p+1)}=\frac{[p!]^2}{(2p+1)!}$$

için,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}}\left[\frac{[p!]^2}{(2p+1)!}\right]^{\frac{1}{p}}\|f''\|_q$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $p=2$ alınırsa,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}\|f''\|_2\sqrt{30}}{60}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.5.4 : $f : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir dönüşüm, f'' integrallenebilir ve $[a,b]\subset\overset{\circ}{I}$ üzerinde $\gamma\leq f''(x)\leq\Gamma$ olsun. Bu durumda,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{12}\left(f'(b)-f'(a)\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{32}(\Gamma-\gamma) \quad (3.32)$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Grüss eşitsizliği yardımıyla**,**

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f''(x)\,dx\right| \\ &\qquad \leq \frac{1}{4}(L-l)(\Gamma-\gamma)\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte,

$$L=\sup_{x\in[a,b]}\{(x-a)(b-x)\}=\frac{(b-a)^2}{4}$$

ve

$$l=\inf_{x\in[a,b]}\{(x-a)(b-x)\}=0$$

şeklindedir. Aynı zamanda basit bir hesaplama ile,

$$\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx=\frac{(b-a)^3}{6}$$

elde edilir ve Lemma 3.5.1 ile,

$$I:=\frac{1}{2(b-a)}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx=\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

elde edilir. Bu elde edilen eşitlikler kullanılarak,

$$\left|I-\frac{1}{2(b-a)}\frac{(b-a)^3}{6}\frac{1}{b-a}\left(f'(b)-f'(a)\right)\right|\leq\frac{1}{8}\frac{(b-a)^2}{4}(\Gamma-\gamma)$$

eşitsizliği yazılır. Yani,

$$\left|I-\frac{b-a}{12}\left(f'(b)-f'(a)\right)\right|\leq\frac{(b-a)^2}{32}(\Gamma-\gamma)$$

dir. Böylece teorem ispatlanmıştır.

Lemma 3.5.2 : $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında diferensiyellenebilir olsun. Eğer (a,b) üzerinde $g'(x)\neq 0$ ve $l\leq\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\leq L$ ise,

$$\begin{aligned} l\left[(b-a)\int_a^b g^2(x)\,dx-\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2\right] &\leq (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b g(x)\,dx \\ &\leq L\left[(b-a)\int_a^b g^2(x)\,dx-\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : İlk olarak, $\forall x, y \in [a, b]$ için,

$$l\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}\leq\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)\leq L\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim.

Eğer $g(x) = g(y)$ ise bu eşitsizlik doğrudur.

Kabul edelim ki $g(x) \neq g(y)$ olsun. Bu durumda, $x < y$ olduğunu kabul edersek Cauchy Teoremi gereğince,

$$\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{g\left(x\right)-g\left(y\right)}=\frac{f'\left(\xi\right)}{g'\left(\xi\right)}\in\left[l,L\right]$$

olacak şekilde en az bir $\xi \in (x, y)$ vardır. Böylece,

$$l\leq\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{g\left(x\right)-g\left(y\right)}\leq L$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizlik $\left(g(x)-g(y)\right)^{2} > 0$ ile çarpılırsa,

$$l\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}\leq\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)\leq L\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizliğin $[a, b]^2$ üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} l\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}dxdy &\leq \int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)dxdy \\ &\leq L\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}dxdy \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikteki integraller,

$$\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)^{2}dxdy=\left(b-a\right)\int_{a}^{b}g^{2}\left(x\right)dx-\left(\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx\right)^{2}$$

ve

$$\frac{1}{2}\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}\left(f\left(x\right)-f\left(y\right)\right)\left(g\left(x\right)-g\left(y\right)\right)dxdy=\left(b-a\right)\int_{a}^{b}f\left(x\right)g\left(x\right)dx-\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx\int_{a}^{b}g\left(x\right)dx$$

şeklindedir. Bu eşitsizlikler yardımıyla istenilen eşitsizlik ispatlanmış olur.

Şimdi,

$$k\cdot\frac{(b-a)^2}{12}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le K\cdot\frac{(b-a)^2}{12}$$

şeklinde verilen (3.28) eşitsizliğinin yukarıdaki lemma ile ispatlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
&k\left[(b-a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx-\left[\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right]^2\right]\\
&\qquad\le(b-a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\int_a^b f'(x)\,dx\\
&\qquad\le K\left[(b-a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx-\left[\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx\right]^2\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikteki integraller,

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx=0,$$

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2dx=\frac{(b-a)^3}{12}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu eşitlikler yardımıyla,

$$k\cdot\frac{(b-a)^4}{12}\le(b-a)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx\le K\cdot\frac{(b-a)^4}{12}$$

elde edilir. Son olarak,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\,dx$$

tanımınıda kullanılırsa istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 3.5.5 : $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $[a,b]\subset\overset{\circ}{I}$ aralığında $k\le f''(x)\le K$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$k\cdot\frac{(b-a)^4}{48}\le\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\le K\cdot\frac{(b-a)^4}{48}\quad(3.33)$$

İspat : Lemma 3.4.3 de ispatlanan

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,f'(x)\,dx+\frac{1}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,f'(x)\,dx \tag{3.34}$$

özdeşliği hatırlayalım. Şimdi Lemma 3.5.2 yardımıyla,

$$\begin{aligned}k&\left[\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx-\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,dx\right)^2\right]\\&\le\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,f'(x)\,dx-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,dx\int_a^{\frac{a+b}{2}}f'(x)\,dx\\&\le K\left[\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx-\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,dx\right)^2\right]\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2\,dx=\frac{(b-a)^3}{24},$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,dx=\frac{(b-a)^2}{8}$$

ve

$$I_1:=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{(b-a)^3}{24}-\frac{(b-a)^4}{64}=\frac{(b-a)^4}{192}$$

değerleri bulunur ve bu değerler kullanılırsa,

$$k\cdot\frac{(b-a)^4}{192}\le\frac{b-a}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,f'(x)\,dx-\frac{(b-a)^2}{8}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]\le K\cdot\frac{(b-a)^4}{192}$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler de yapılırsa,

$$k\cdot\frac{(b-a)^2}{96}\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\,f'(x)\,dx-\frac{1}{4}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]\leq K\cdot\frac{(b-a)^2}{96}\quad(3.35)$$

eşitsizliği yazılır. Benzer şekilde yukarıdaki Lemma yardımıyla,

$$\begin{aligned}
&k\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\,dx-\left(\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,dx\right)^2\right]\\
&\leq\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,f'(x)\,dx-\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,dx\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}f'(x)\,dx\\
&\leq K\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\,dx-\left(\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,dx\right)^2\right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$$\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2\,dx=\frac{(b-a)^3}{24},$$

$$\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,dx=-\frac{(b-a)^2}{8}$$

değerleri bulunur ve bu değerler kullanılarak,

$$k\cdot\frac{(b-a)^4}{192}\leq\frac{b-a}{2}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,f'(x)\,dx-\frac{(b-a)^2}{8}\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\leq K\cdot\frac{(b-a)^2}{192}$$

eşitsizliği elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler de yapılarak,

$$k\cdot\frac{(b-a)^2}{96}\leq\frac{1}{b-a}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)\,f'(x)\,dx-\frac{1}{4}\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\leq K\cdot\frac{(b-a)^2}{96}\quad(3.36)$$

elde edilir.Şimdi (3.35) ve (3.36) eşitsizlikleri toplanır ve (3.4) eşitliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} k\cdot\frac{(b-a)^2}{48} &\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\quad -\frac{1}{4}\left[2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-(f(a)+f(b))\right]\leq K\cdot\frac{(b-a)^2}{48} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve (3.33) eşitsizliği ispatlanır.

$f : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $[a,b]\subset\overset{\circ}{I}$ aralığında $k\leq f''(x)\leq K$ olsun. $\|f''\|_\infty<\infty$ olmak üzere,

$$\left|\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\|f''\|_\infty\cdot\frac{(b-a)^2}{48}$$

eşitsizliği vardır.

f, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir ve bu aralık üzerinde konveks ise, $[a,b]\subset\overset{\circ}{I}$ olmak üzere Bullen eşitsizliğinin tersi vardır:

$$0\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\|f''\|_\infty\cdot\frac{(b-a)^2}{48}$$

dır.

Teorem 3.5.6 : $f : I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir bir dönüşüm ve $\forall x\in[a,b]\subset\overset{\circ}{I}$ için $k\leq f''(x)\leq K$ olsun. Bu durumda,

$$B+K\cdot\frac{(b-a)^2}{12}\leq(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}-\int_a^b f(x)\,dx\leq A+k\cdot\frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.37}$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$\begin{aligned} A &:= \frac{1}{2}\left\{(b-a)\left[f'(b)-k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]-(f(b)-f(a))\right\} \\ &\quad\times\frac{\left\{f(b)-f(a)-(b-a)\left[f'(a)-k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]\right\}}{f'(b)-f'(a)-k(b-a)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &:= \frac{1}{2}\left\{(b-a)\left[K\left(\frac{b-a}{2}\right)-f'(b)\right]+(f(b)-f(a))\right\} \\ &\quad\times\frac{\left\{f(b)-f(a)-(b-a)\left[K\left(\frac{b-a}{2}\right)-f'(a)\right]\right\}}{K(b-a)-f'(b)+f'(a)} \end{aligned}$$

dir ve bu eşitlikler,

$$f'(b) - f'(a) \neq k(b-a)$$

ve

$$f'(b) - f'(a) \neq K(b-a)$$

durumlarında sağlanır.

İspat : Lemma 3.5.1 de kullanılan eşitliği,

$$I := \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x) f''(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) - \int_a^b f(x)\,dx$$

şeklinde ifade edelim. Bu eşitlik yardımıyla,

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)(f''(x)-k)\,dx = I - k\cdot\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\,dx = I - k\cdot\frac{(b-a)^2}{12}$$

ve

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)(K-f''(x))\,dx = K\cdot\frac{(b-a)^2}{12} - I$$

olduğu görülür. Sekronize olmayan dönüşümler için klasik Chebychev integral eşitsizliği yardımı ile,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)(f''(x)-k)\,dx \\
&\qquad\leq \frac{1}{2}\frac{\int_a^b (x-a)(f''(x)-k)\,dx\int_a^b (b-x)(f''(x)-k)\,dx}{\int_a^b (f''(x)-k)\,dx}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

ve

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)(K-f''(x))\,dx$$
$$\leq \frac{1}{2}\frac{\int_a^b (x-a)(K-f''(x))\,dx\int_a^b (b-x)(K-f''(x))\,dx}{\int_a^b (K-f''(x))\,dx} \tag{3.39}$$

eşitsizlikleri yazılır. Matematiksel hesaplarla,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(f''(x)-k)\,dx &= (f'(x)-kx)(x-a)\big|_a^b - \int_a^b (f'(x)-k)\,dx \\
&= (f'(b)-kb)(b-a) - \left(f(b)-f(a)-k\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b\right) \\
&= (f'(b)-kb)(b-a) - \left(f(b)-f(a)-k\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)\right) \\
&= (b-a)\left(f'(b)-kb+k\frac{a+b}{2}\right)-f(b)+f(a) \\
&= (b-a)\left(f'(b)-k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right)-(f(b)-f(a))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_a^b (b-x)(f''(x)-k)\,dx &= (f'(x)-kx)(b-x)\big|_a^b - \int_a^b (f'(x)-k)\,dx \\
&= -(f'(a)-ka)(b-a)+f(b)-f(a)-k\frac{b^2-a^2}{2} \\
&= (b-a)\left[-f'(a)+ka-k\frac{a+b}{2}\right]+f(b)-f(a) \\
&= (b-a)\left[-f'(a)-k\frac{b-a}{2}\right]+f(b)-f(a) \\
&= f(b)-f(a)-(b-a)\left[f'(a)+k\frac{b-a}{2}\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.38) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
I-\frac{k(b-a)^2}{12} \leq{}& \frac{1}{2}\left\{(b-a)\left[f'(b)-k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]-(f(b)-f(a))\right\} \\
&\times\frac{\left\{f(b)-f(a)-(b-a)\left[f'(a)+k\left(\frac{b-a}{2}\right)\right]\right\}}{f'(b)-f'(a)-k(b-a)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Yani,

$$I \le \frac{k\,(b-a)^2}{12} + A$$

dır ve bu eşitsizlik (3.37) nin sağ eşitsizliğinin ispatıdır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)\,(K - f''(x))\,dx &= (Kb - f'(b))\,(b-a) - K\frac{(b^2-a^2)}{2} + f(b) - f(a) \\
&= (b-a)\left(Kb - f'(b) + K\frac{a+b}{2}\right) + f(b) - f(a) \\
&= (b-a)\left(K\frac{b-a}{2} - f'(b)\right) + f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_a^b (b-x)\,(K - f''(x))\,dx &= -(b-a)\,(Ka - f'(a)) + K\frac{(b^2-a^2)}{2} - f(b) + f(a) \\
&= (b-a)\left[K\left(\frac{b-a}{2}\right) + f'(a)\right] - f(b) + f(a)
\end{aligned}$$

hesaplanır ve (3.39) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{K\,(b-a)^2}{12} - I &\le \frac{1}{2}\left\{(b-a)\left[K\left(\frac{b-a}{2}\right) - f'(b)\right] + f(b) - f(a)\right\} \\
&\quad\times \frac{\left\{(b-a)\left[K\left(\frac{b-a}{2}\right) - f'(a)\right] - f(b) + f(a)\right\}}{K\,(b-a) - f'(b) + f'(a)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yani,

$$I \ge \frac{K\,(b-a)^2}{12} + B$$

dır ve bu eşitsizlikde teoremin ifadesinin sol tarafının ispatıdır.

Eğer f, $\overset{\circ}{I}$ üzerinde iki kez diferensiyellenebilir konveks bir fonksiyon ve $[a,b] \subset \overset{\circ}{I}$ ise $f'(b) \neq f'(a)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
0 &\le \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\frac{[(b-a)\,f'(b) - (f(b) - f(a))]\,[f(b) - f(a) - (b-a)\,f'(a)]}{(b-a)\,(f'(b) - f'(a))}
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

3.5.2. Özel Ortalamalar için Uygulamalar :

Önerme 3.5.1 : $p > 1$ ve $0 \leq a < b$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 0 &\leq A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^2 p(p-1)\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}} L_{\frac{p(p-2)}{p-1}}^{p-2}(a,b) \end{aligned} \tag{3.40}$$

eşitsizliği vardır.Bu eşitsizlikte B, Euler Beta fonksiyonudur.

İspat : $[a,b]$ aralığında $f(x) := x^p$ fonksiyonu için Teorem 3.5.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}}\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \left[p(p-1)x^{p-2}\right]^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{3.41}$$

eşitsizliği yazılır. Burada,

$$\int_a^b x^{pq-2q} dx = \frac{b^{pq-2q+1} - a^{pq-2q+1}}{pq-2q+1} = \frac{b^{p-q+1} - a^{p-q+1}}{p-q+1},$$

$$\frac{b^{p-q+1} - a^{p-q+1}}{p-q+1} = L_{p-2}^{p-2}(a,b)(b-a)$$

hesaplamaları ve

$$\frac{p-q}{q} = p-2,$$

$$p-q = \frac{p(p-2)}{p-1}$$

eşitlikleri için (3.41) eşitsizliği,

$$\begin{aligned} 0 &\leq A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}}\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}} p(p-1) L_{p-q}^{\frac{p-q}{q}}(a,b)(b-a)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 p(p-1)\left[B(p+1,p+1)\right]^{\frac{1}{p}} L_{\frac{p(p-2)}{p-1}}^{p-2}(a,b) \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece önerme ispatlanır.

Önerme 3.5.2 : $p > 1$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu durumda,

$$0 \leq L(a,b) - H(a,b) \leq (b-a)^2 \frac{L(a,b)\, H(a,b)\, [B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}}}{L^3_{-\frac{3p}{p+1}}(a,b)}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu için Teorem 3.5.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}} [B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \frac{2^q}{x^{3q}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^{3q}} = \left. \frac{x^{-3q+1}}{-3q+1} \right|_a^b = \frac{b^{-3q+1} - a^{-3q+1}}{-3q+1} = L^{-3q}_{-3q}(a,b)\,(b-a)$$

olarak bulunur ve elde edilen denklemde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq H^{-1}(a,b) - L^{-1}(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}} (b-a)^{\frac{1}{q}} [B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}} L^{-3}_{-3q}(a,b) \\ &= (b-a)^2 \frac{[B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}}}{L^3_{-\frac{3p}{p+1}}(a,b)} \end{aligned}$$

eşitsziliği bulunur. Böylece önerme ispatlanır.

Önerme 3.5.3 : $p > 1$ ve $0 < a < b$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$1 \leq \frac{I(a,b)}{G(a,b)} \leq \exp\left[\frac{1}{2}(b-a)^2 \frac{[B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}}}{L^2_{-\frac{2p}{p+1}}(a,b)} \right]$$

İspat : $f(x) = -\ln x$ konveks dönüşümü için Teorem 3.5.3 uygulanırsa,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln I(a,b) - \ln G(a,b) \\ &\leq \frac{1}{2}(b-a)^{\frac{p+1}{p}} [B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \frac{dx}{x^{2q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2 \frac{[B(p+1,p+1)]^{\frac{1}{p}}}{L^2_{-\frac{2p}{p+1}}(a,b)} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ve önerme ispatlanır.

Önerme 3.5.4 : $p \geq 2$ ve $0 \leq a < b$ olsun. O zaman,

$$\left| A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p(a,b) - \frac{p(p-1)}{12}(b-a)^2 L_{p-2}^{p-2}(a,b) \right| \leq \frac{p(p-1)(b-a)^3}{32} L_{p-3}^{p-3}(a,b)$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.5.4 de $f(x) = x^p$, $p \geq 2$ seçilirse,

$$k = p(p-1)\, a^{p-2} \leq f(x) \leq p(p-1)\, b^{p-2} = K, \; x \in [a,b]$$

olur. (3.32) eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left| A\left(a^p, b^p\right) - L_p^p(a,b) - \frac{p(b-a)}{12}\left(b^{p-1} - a^{p-1}\right) \right| \leq \frac{p(p-1)}{32}(b-a)^2\left(b^{p-2} - a^{p-2}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte,

$$b^{p-1} - a^{p-1} = (p-1)\, L_{p-2}^{p-2}(a,b)\,(b-a)$$

ve

$$b^{p-2} - a^{p-2} = (p-2)\, L_{p-3}^{p-3}(a,b)\,(b-a)$$

değerleri yerine yazılırsa önerme ispatlanır.

Önerme 3.5.5 : $0 < a < b$ olsun. Bu durumda,

$$\left| L(a,b) - H(a,b) - \frac{(b-a)^2}{6} \cdot \frac{A(a,b)\, L(a,b)\, H(a,b)}{G^4(a,b)} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{16} \cdot \frac{L(a,b)\, H(a,b)\left[4A^2(a,b) - G^2(a,b)\right]}{G^6(a,b)}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 3.5.4 de, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ seçelim. $f''(x) \in \left[\dfrac{2}{b^3}, \dfrac{2}{a^3}\right]$ olduğu açıktır. Yani $k = \dfrac{2}{b^3}$ ve $K = \dfrac{2}{a^3}$ seçebiliriz. Böylece,

$$\left| L^{-1}(a,b) - H^{-1}(a,b) - \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{32}\left(\frac{2}{a^3} - \frac{2}{b^3}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Yani,

$$\left| L^{-1}(a,b) - H^{-1}(a,b) - \frac{(b-a)^2}{6}\frac{a+b}{2}\frac{1}{a^2b^2} \right| \leq \frac{(b-a)^2}{16}\left(\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{a^3b^3}\right)$$
$$= \frac{(b-a)^3}{16}\frac{(a^2+ab+b^2)}{a^3b^3}$$

eşitsizliği yazılır. Bununla birlikte,

$$a^2+ab+b^2 = (a+b)^2 - ab = 4A^2(a,b) - G^2(a,b)$$

eşitliği kullanılarak,

$$\left| L^{-1}(a,b) - H^{-1}(a,b) - \frac{(b-a)^2}{6}\frac{A(a,b)}{G^4(a,b)} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{16}\frac{(4A^2(a,b) - G^2(a,b))}{G^6(a,b)}$$

ve buna denk olarak,

$$L(a,b) - H(a,b) - \frac{(b-a)^2}{6}\cdot\frac{A(a,b)\,L(a,b)\,H(a,b)}{G^4(a,b)}$$
$$\leq \frac{(b-a)^3}{16}\cdot\frac{(4A^2(a,b) - G^2(a,b))\,L(a,b)\,H(a,b)}{G^6(a,b)}$$

eşitsizliği elde edilir ve bu da önermenin ispatıdır.

4. HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİNİ GELİŞTİREN BELİRLİ EŞİTSİZLİKLER

Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonun ortalama değerinin alt ve üst kestirimleri için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durum, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ve $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ aralıklarının her biri için, Hermite-Hadamard eşitsizliği için kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \end{aligned}$$

Bu eşitsizlikler için detaylı çalışmalar [1], [15] kaynaklarında verilmiştir.

Teorem 4.1 : f, Lebesgue integrallenebilir ve (a,b) üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x \in (a,b)$ için,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy + \varphi(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) - f(x) \\ &\qquad \geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(y)-f(x)|\,dy + |\varphi(x)|\,\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right| \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada tüm $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in (a,b)$ için $\varphi(x) \in \left[f'_-(x),\ f'_+(x)\right]$ olacak şekilde herhangi bir fonksiyondur.

İspat : Gerçekten, $\forall x, y \in (a,b)$ için,

$$f(y) \geq f(x) + (y-x)\,\varphi(x)$$

eşitsizliği,

$$\begin{aligned} f(y)-f(x)-(y-x)\,\varphi(x) &= |f(y)-f(x)-(y-x)\,\varphi(x)| \\ &\geq ||f(y)-f(x)|-|y-x|\,|\varphi(x)|| \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Her iki tarafın (a,b) aralığı üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(y)\,dy-(b-a)f(x)+(b-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\varphi(x)\\
&\qquad\geq\int_a^b \left|\left|f(y)-f(x)\right|-\left|y-x\right|\left|\varphi(x)\right|\right|dy\\
&\qquad\geq\left|\int_a^b \left|f(y)-f(x)\right|dy-\left|\varphi(x)\right|\int_a^b\left|y-x\right|dy\right|\\
&\qquad=\left|\int_a^b \left|f(y)-f(x)\right|dy-\left|\varphi(x)\right|\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2}\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki yanı $(b-a)$ ile sadeleştirilerek teorem ispatlanır.

Teorem 4.2 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{f(b)(b-x)+f(a)(x-a)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\\
&\qquad\geq\frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(x)-f(y)\right|dy-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|x-y\right|\left|f'(y)\right|dy\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Genellemeyi bozmaksızın f fonksiyonun sürekli olduğunu kabul edelim. Burada f fonksiyonunun aralığın uç noktalarında sonlu limite sahip olması gerekir. Bu durumda f mutlak süreklidir ve dolayısıyla bu durumu fonsiyonun türevi için de genişletebiliriz. Bu f fonksiyonu sayılabilir noktalar hariç diferensiyellenebilir olduğundan diferensiyellenemeyen noktaların kümesini ε ile tanımlayalım. Bu durumda, tüm $x\in[a,b]$ ve tüm $y\in[a,b]\setminus\varepsilon$ için,

$$f(x)\geq f(y)+(x-y)f'(y)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlik,

$$\begin{aligned}
f(x)-f(y)+(x-y)f'(y) &= \left|f(x)-f(y)-(x-y)f'(y)\right|\\
&\geq \left|\left|f(x)-f(y)\right|-\left|(x-y)\right|\left|f'(y)\right|\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliğine genişletilebilir. Elde edilen bu eşitsizliğin her iki tarafının y ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}(b-a)\,f(x)-2\int_a^b f(y)\,dy+f(b)\,(b-x)+f(a)\,(x-a)\\ \geq \left|\int_a^b |f(x)-f(y)|\,dy-\int_a^b |x-y|\,|f'(y)|\,dy\right|\end{aligned}$$

veya,

$$\begin{aligned}f(x)+\frac{f(b)\,(b-x)+f(a)\,(x-a)}{b-a}-\frac{2}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\\ \geq \frac{1}{b-a}\left|\int_a^b |f(x)-f(y)|\,dy-\int_a^b |x-y|\,|f'(y)|\,dy\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafı 2 ile sadeleştirildiğinde teorem ispatlanır.

Teorem 4.2 nin diğer bir durumu şu şekilde verilebilir.

Teorem 4.3 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $[a,b]$ üzerinde monoton ve (a,b) üzerinde konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{f(b)\,(b-x)+f(a)\,(x-a)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\\ \geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b sgn\,(x-y)\,f(y)\,dy+\frac{1}{2\,(b-a)}\right.\\ \left.\times\left[f(x)\,(a+b-2x)+(x-a)\,f(a)+(b-x)\,f(b)\right]\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : f fonksiyonunun $[a,b]$ üzerinde azalmayan olduğu durumu dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)-f(y)|\,dy &= \int_a^x |f(x)-f(y)|\,dy + \int_x^b |f(x)-f(y)|\,dy \\ &= (x-a)\,f(x) - \int_a^x f(y)\,dy + \int_x^b f(y)\,dy - (b-x)\,f(x) \\ &= (2x-a-b)\,f(x) - \int_a^x f(y)\,dy + \int_x^b f(y)\,dy\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Teorem 4.2 nin ispatındaki gibi f fonksiyonunun mutlak sürekli olduğu durumu dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}\int_a^b |x-y|\,|f'(y)|\,dy &= \int_a^x (x-y)\,f'(y)\,dy + \int_x^b (y-x)\,f'(y)\,dy \\ &= (a-x)\,f(a) + (b-x)\,f(b) + \int_a^x f(y)\,dy - \int_x^b f(y)\,dy\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f(y) + \frac{f(b)(b-y)+f(a)(y-a)}{b-a}\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &\quad\geq \frac{1}{2}\left|\frac{2}{b-a}\left[\int_x^b f(y)\,dy - \int_a^x f(y)\,dy\right]\right. \\ &\qquad\left. + \frac{f(x)(2x-a-b)}{b-a} - \frac{(x-a)\,f(a)+(b-x)\,f(b)}{b-a}\right|\end{aligned}$$

şeklinde sonuçlandırılır.

f fonksiyonunun artmayan olması durumunda da benzer bir yol kullanılır.

$x = \dfrac{a+b}{2}$ için Teorem 4.3 aşağıdaki eşitsizlikleri verir:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy \\ &\quad\geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b sgn\left(\frac{a+b}{2}-y\right) f(y)\,dy + \frac{f(a)+f(b)}{4}\right|\end{aligned}$$

Bu durum, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ olmak üzere üstel fonksiyonlar için,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left[e^{\frac{a+b}{2}} + \frac{e^a + e^b}{2}\right] - \frac{e^b - e^a}{b-a} \\ &\quad \geq \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b sgn\left(\frac{a+b}{2} - y\right) e^y dy + \frac{e^a + e^b}{4} \right| \end{aligned}$$

$\forall\ 0 < a < b$ için,

$$\frac{1}{2}\left[\sqrt{ab} + \frac{a+b}{2}\right] - \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \geq \left| \frac{a+b}{4} - \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\ln b - \ln a} \right|$$

şeklinde yazılır.

Bu ifadeler Polya eşitsizliğini genişleten yapılardır. Polya eşitsizliği,

$$\frac{2}{3}\sqrt{ab} + \frac{1}{3}\frac{a+b}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{ab} + \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\ln b - \ln a}$$

için,

$$\frac{2}{3}\sqrt{ab} + \frac{1}{3}\frac{a+b}{2} > \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$$

şeklindedir. Gerçekten, son eşitsizlik $\forall x > 1$ için,

$$(x+1)^2 \ln x > 3(x-1)^2$$

olarak yeniden ifade edilebilir.

Burada elde edilen eşitsizlikler aynı anda gözönüne alınırsa, $\forall 0 < a < b$ için,

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &< \left(\sqrt{ab}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{a+b}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &< \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}} \\ &< \frac{2}{3}\sqrt{ab} + \frac{1}{3}\frac{a+b}{2} \\ &< \sqrt{\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}} \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}\right) < \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

yazılır.

5. HERMİTE-HADAMARD EŞİTSİZLİĞİNİN BİR GENİŞLEMESİ

Dördüncü bölümde olduğu gibi; Klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği, bir $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ konveks fonksiyonun ortalama değerinin alt ve üst kestirimleri için,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

şekinde ifade edilir.

Aşağıda ispatsız olarak vereceğimiz ve iyi bilinen iki teorem [18] kaynağında verilmiştir.

Teorem 5.1: f, Lebesgue integrallenebilir ve (a,b) üzerinde konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda bütün $x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy+f'_+(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-f(x)\\&\qquad\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(y)-f(x)|\,dy-\left|f'_+(x)\right|\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Teorem 5.2 : $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, $[a,b]$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{f(b)(b-x)+f(a)(x-a)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\\&\qquad\geq\frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)-f(y)|\,dy-\frac{1}{b-a}\int_a^b|x-y|\,|f'(y)|\,dy\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

Şimdi Teorem 5.1 ve Teorem 5.2 nin birer genişlemelerini ifade ve ispat edelim.

Teorem 5.3 : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (2n-1)-kez diferensiyellenebilir ve (2n)-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy-(b-a)\,f(x)-\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}}{(k+1)!\,(b-a)}f^{(k)}(x)\\
&\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)-\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right|dy\right.\\
&\left.-\left|f^{(2n-1)}(x)\,\frac{(b-x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{(2n)!\,(b-a)}\right|\right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Sürekli (2n)-konveks fonksiyonunun, (2n)-konveks polinomu ile ifade edilebilmesinden, f fonksiyonunun (2n) türevinin de (2n)-konveks polinomu ile ifade edilebileceğini varsayabiliriz. Taylor formülü ile, $x,y\in[a,b]$, $\xi\in(a,b)$ için,

$$\begin{aligned}
f(y)&=f(x)+(y-x)\,f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots\\
&+\frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(x)+\frac{(y-x)^{2n}}{2n!}f^{(2n)}(\xi)
\end{aligned}$$

yazılır. f, (2n)-konveks için, $f^{(2n)}(x)\geq 0$ olur. Böylece,

$$\begin{aligned}
f(y)&\geq f(x)+(y-x)\,f'(x)+\frac{(y-x)^2}{2!}f''(x)\\
&+\cdots+\frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır ve

$$\begin{aligned}
f(y)-f(x)-(y-x)\,f'(x)-\frac{(y-x)^2}{2!}f''(x)\\
-\cdots-\frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(x)\geq 0
\end{aligned}$$

dır. Yani,

$$\begin{aligned}
&f(y)-f(x)-(y-x)\,f'(x)-\frac{(y-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots-\frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(x)\\
&=\left|f(y)-f(x)-(y-x)\,f'(x)-\frac{(y-x)^2}{2!}f''(x)\right.\\
&\left.-\cdots-\frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(x)\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir. Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
f(y) - f(x) - (y-x) f'(x) - \frac{(y-x)^2}{2!} f''(x) - \cdots - \frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(x) \\
\geq \Bigg| \Bigg| f(y) - f(x) - (y-x) f'(x) - \frac{(y-x)^2}{2!} f''(x) - \cdots \\
- \frac{(y-x)^{2n-2}}{(2n-2)!} f^{(2n-2)}(x) \Bigg| - \left| \frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(x) \right| \Bigg|
\end{aligned} \tag{5.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğin y ye göre integrali alınır ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(y)\,dy - (b-a) f(x) - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(b-x)^{k+1} - (a-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k)}(x) \\
\geq \Bigg| \int_a^b \left| f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| dy \\
- \left| f^{(2n-1)}(x) \frac{(b-x)^{2n} - (a-x)^{2n}}{(2n)!} \right| \Bigg|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5.4 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (2n-1)-kez diferensiyellenebilir ve (2n)-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{2n}{b-a} \int_a^b f(y)\,dy - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2n-k}{k!(b-a)} \left[(x-b)^k f^{(k-1)}(b) - (x-a)^k f^{(k-1)}(a) \right] \\
\geq \Bigg| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) \right| dy \\
- \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \frac{(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(y) \right| dy \Bigg|
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : (5.1) eşitsizliğinin x e göre integrali alınarak integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&(b-a) f(y) - \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x)\,dx \\
&\geq \left| \int_a^b \left| f(y) - f(x) - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) \right| dx \right. \\
&\qquad \left. - \int_a^b \left| \frac{(y-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(x) \right| dx \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada x ve y yerine koyulduğunda istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (2n-1)-kez diferensiyellenebilir ve (2n)-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b-a} \int_a^b f(y)\,dy - (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!\,(b-a)} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\geq \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| f(y) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{\left(y - \frac{a+b}{2}\right)^k}{k!} f^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| dy \right. \\
&\qquad \left. - \left| f^{(2n-1)}\left(\frac{a+b}{2}\right) \frac{(b-a)^{2n} - (a-b)^{2n}}{(2n)!\,(b-a)\,2^{2n}} \right| \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 5.3 de $x = \dfrac{a+b}{2}$ koyularak ispatlanır.

Sonuç 5.2 : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, (2n-1)-kez diferensiyellenebilir ve (2n)-konveks fonksiyon olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} f(a) - \frac{2n}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2n-k}{k!\,(b-a)} \left[(a-b)^k f^{(k-1)}(b)\right] \\ \geq \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b \left| f(a) - f(y) - \sum_{k=1}^{2n-2} \frac{(a-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) \right| dy \right. \\ \left. - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left| \frac{(a-y)^{2n-1}}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(y) \right| dy \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : Teorem 5.4 de $x = a$ koyularak ispatlanır.

Kaynaklar

[1] **C.P. Niculescu and L.-E. Persson**, Convex Functions and Their Applications. A Contemporary Approach, CMS Books in Mathematics, Vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[2] **D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric and A.M. Fink**, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London.

[3] **J. Sandor**, Some integral inequalities, El. Math., 43 (1988), 177-180.

[4] **J.E. Pecaric, F. Proschan and Y.C. Tong**, Convex functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, New York, 1992.

[5] **P.S. Bullen, D.S. Mitrinovic and P.M. Vasic,** Means and their Inequalities, Reidel, Dordrecht, 1988.

[6] **P. Cerone and S.S. Dragomir**, Trapezoid type rules from an inequalities point of view, Handbook of Analytic Computational Methods in Applied Mathematics, Editor: G. Anastassiou,, CRC Press, N.Y., 2000, 65-134. Res. Rep. Coll, 2 (1999), No. 6, Article 8, http://rgmia.vu.edu.au/v2n6.html

[7] **P. Cerone and S.S. Dragomir**, Midpoint type rules from an inequlaties point of view, Handbook of Analytic Computational Methods in Applied Mathematics, Editor: G. ANASTASSIOU, crc Press, N.Y., 2000, 135-200. RGMIA Res. Rep. Coll, 2 (1999), No. 7, Article 1, http://rgmia.vu.edu.au/v2n7.htm1

[8] **S.S. Dragomir and J.E. Pecaric**, Refinements of some inequalities for isotonic functionals, Anal. Num. Their Approx., 18 (1989), 61-65. MR 91g: 26038. ZBL No. 681:26009.

[9] **S.S. Dragomir**, On some inequalities for differentiable convex function and applications, (submitted).

[10] **S.S. Dragomir and N.M. Ionescu**, Some integral inequalities for differentiable convex functions, Coll. Pap. of the Fac. of Sci. Kragujevac (Yugoslavia), 13 (1992), 11-16, ZBL No. 770.

[11] **S.S. Dragomir**, On Hadamard' s inequalities for convex function, Mat. Balkanica, 6 (1992), 215-222. MR: 934: 26033.

[12] **S.S. Dragomir and E. Pearce**, A refinement of the second part of the Hadamard inequality, The 6th Symp. of Math. and Its Appl., Tech. Univ. of Timisoara, Nov. 1995.

[13] **S.S. Dragomir**, Some remarks on Hadamard' s inequalities for convex functions, Extracta Math., 9(2) (1994), 88-94.

[14] **S.S. Dragomir**, Refinement of Hermite-Hadamard' s inequality for convex functions, (submitted).

[15] **S.S. Dragomir and A. Mcandrew**, Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 6(5) (2005), Arty. 140. [ONLINE: http://jipam.vu.edu.au/article.php?sid=614].

[16] **S.S. Dragomir, P. Cerone and A. Sofo**, Some remarks on the trapezoid rule in numerical integration, RGMIA Res. Rep. Coll., 2 (5) (1999), Article 1. http://rgmia.vu.edu.au/v2n5.htm1, Indian J. of Pure and Appl. Math., 31(5) (2000), 475-494.

[17] **S.S. Dragomir**, Some inequalities for twice differentiable functions and applications, (submitted).

[18] **S. Hussain and M. Anwar**, On generalization of the Hermite-Hadamard inequality, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 8(2) (2007), Art. 60. [ONLİNE: http://jipam.vu.edu.au/article.php?sid=873].

[19] **S.S. Dragomir and Charles E.M. Pearce**, Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications, School of communications and informatics, Victoria University of Technology, Po Box 14428, Melbourne City Mc, Victoria 8001, (2000), Australia.

[20] **Y. Mizuta,** Potential theory in Euclidean spaces, Gakkōtosyo, Tokyo (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Nagihan KARACALI

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Lise : Doktor Sadık Ahmet Süper Lisesi

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Sarıyer-İstanbul 31.01.1986

Cinsiyeti : Bayan

Yabancı Dili : İngilizce