1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler uzun yıllardır çalışılan bir konudur. Diferensiyel denklemler günlük hayatta mühendislik, fizik, kimya, biyoloji gibi birçok temel bilim alanında kullanılmakta ve günlük hayatta birçok kolaylık sağlamaktadır.

Ayrıca diferensiyel denklemlerin vazgeçilmez bilimsel öneminde "doğada kopukluk yoktur" yanlış varsayımlarına yer veriliyordu. Bu eski hipoteze göre fiziksel olayların matematiksel modeli, sürekli değişim oranları arasındaki denklemler ile ifade ediliyordu. Bu nedenle diferensiyel denklemler, fizik bilimine özgü matematiksel ifade olarak kabul ediliyordu. Fakat 20. yüzyıl başlarında radyasyondaki quanta ile biyolojide görülen genetik olaylardaki gelişmeler, tüm doğa olaylarının, süreklilik terimleri ile ifade edilemeyeceğini göstermiştir. Eski yunanlılara göre, doğa olaylarında görülen süreklilik ile kesiklilik arasındaki zıtlaşma, doğadaki sürekliliğin bir aldatmacasıydı. Günümüzde görülen bu süreksizlik problemleri fark denklemlerden faydalanarak çözülür.

Bütün bu gelişmelerin yanında diferensiyel denklemlerin çözümünün salınımlılığı ile ilgili son yıllarda oldukça yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığıyla ilgili Myslus, Ladas, Sfikas, Hunt, Chanturia, York, Tramov, Kaplatadze, Györi, Zhang, Stavroulakis, Arino gibi yazarlar çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalarda yazarlar diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık şartlarını elde etmişlerdir.

1972 yılında Myslus $p, t \in R$ olmak üzere

$$x'(t) + px(t-\tau) = 0 \tag{1.1}$$

diferensiyel denkleminin çözümünün salınımlılığı için

$$p.\tau > \frac{1}{e}$$

yeterli şartını elde etmiştir. 1983 yılında ise Ladas,

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau}$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması durumunda (1.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olacağını ispatlamıştır.

1975 yılında Tramov, $p_i \in (0,\infty)$ ve $\tau_i \in R^+$, $i = 1,2,3,\ldots,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i) = 0 \tag{1.2}$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denkleminin reel köke sahip olmaması şartını elde etmiştir. Aynı sonuç 1983 yılında Ladas ve daha sonra 1984 de Hunt ve Yorke tarafından elde edilmiştir. 1989 yılında Györi tarafından (1.2) denklemimin çözümünün salınımlılık şartları biraz daha geliştirilmiştir. 1984 yılında Ladas ve Sficas ile Hunt ve Yorke, $p_i \in R$, $\tau_i \in R^+$ negatif olmayan reel sayılar ve $i = 1,2,3,\ldots,n$ olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x(t-\tau_i) = 0 \tag{1.3}$$

denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, \tau_i > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir. 1979 yılında Ladas ve Kaplatadze, 1982 yılında Chanturia çalışmalarında

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0, \qquad t \geq t_0 \tag{1.4}$$

denkleminin salınımlılığı için $p \in \left[[t_0,\infty), R^+\right]$, $\tau > 0$ olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e}$$

koşulunu elde etmişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1.

$$x'(\mathrm{t}) + \mathrm{f}\big(\mathrm{t}, x(\mathrm{t}), x(\mathrm{t}-\tau_1), x(\mathrm{t}-\tau_2), \dots, x(\mathrm{t}-\tau_\mathrm{n})\big) = 0 \qquad (2.1)$$

gecikmeli diferensiyel denklem sistemi göz önüne alınacak olursa burada bazı $\widetilde{t_0} \in R$ elemanı ve pozitif bir *m* tamsayısı için

$$f \in C[[\widetilde{t_0}, \infty) \times R^m \times R^m \dots \times R^m, R^m]$$

ve

$$\tau_i \in C\big[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^+\big]\ ,\ \ i = 1,2,3 \dots n \qquad (2.2)$$

ile

$$\lim_{t\to\infty}[t - \tau_\mathrm{i}(\mathrm{t})] = \ \infty\ , \quad i = 1,2,3 \dots n \qquad (2.3)$$

olmak üzere her $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ başlangıç noktası için $t_{-1} = t_{-1}(t_0)$ şeklinde tanımlanırsa

$$t_{-1} = \min_{1\leq i\leq n}\left\{\inf_{t\geq t_0}\{t - \tau_\mathrm{i}(\mathrm{t})\}\right\} \qquad (2.4)$$

dır. Görülür ki t_{-1} , t_0 noktasında olduğu gibi diferensiyel denklemin τ_i gecikmelerine bağlıdır. $[t_{-1}, t_0]$ aralığı (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve t_0 başlangıç noktası ile ilişkilendirilmiş başlangıç noktası olarak adlandırılmıştır. (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemi ve verilen $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ başlangıç noktası ile ilgili başlangıç koşulu; $t_{-1} \leq t \leq t_0$ için

$$x(\mathrm{t}) = \varphi(\mathrm{t}) \qquad (2.5)$$

dir. Burada

$$\varphi(\mathrm{t}) \colon [t_{-1}, t_0] \to R^m$$

başlangıç fonksiyonudur(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.2. **a)** $\widetilde{t_0} \leq t_0 \leq T$ olmak üzere *I* aralığı $[t_0, T)$, $[t_0, T]$ veya $[t_0, \infty)$ formunda ise eğer $x \colon [t_{-1}, t_0] \to R^m$ sürekli, $t \in I$ için sürekli diferensiyellenebilir ve her $t \in I$

için $x(t)$, (2.1) gecikmeli diferensiyel denklemini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna (2.1) denkleminin bir çözümü denir.

b) I aralığı $[t_0, T)$, $[t_0, T]$ veya $[t_0, \infty)$ formunda olmak üzere eğer I aralığı üzerinde x, (2.1) denkleminin bir çözümü ve x, (2.5) eşitliğini sağlıyor ise $x(t)$ fonksiyonuna I aralığı üzerinde (2.1) başlangıç-değer probleminin bir çözümü denir.

c) x, eğer bazı $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için (2.1) denkleminin bir çözümünü sağlayan fonksiyonu ise x, $[t_0, \infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümüdür.

d) x, $[t_0, \infty)$ aralığında (2.1) denkleminin bir çözümü ve (2.5) başlangıç fonksiyonunu sağlıyor ise x fonksiyonu (2.5) ve (2.1) başlangıç değer probleminin çözümünü sağlayan fonksiyondur(Györi, Ladas 1991).

Teorem 2.1. (2.2) ve (2.3) koşullarına ek olarak tüm $t \geq \widetilde{t_0}$ için $p \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^+\right]$ bir fonksiyon olmak üzere, f global Lipschitz şartını sağlayan bir fonksiyon, $x_i, y_i \in R^m$, $i = 1,2,3 \dots n$ için

$$\|f(t, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) - f(t, y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)\| \leq p(t) \sum_{i=0}^{n} \|x_i - y_i\| \qquad (2.6)$$

olsun. O halde $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için $\varphi(t): [[t_{-1}, t_0] \to R^m]$ olmak üzere, (2.1) başlangıç değer problemi ve (2.5) denkleminin $[t_0, \infty)$ aralığındaki çözümü kesin tektir(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.3. Lineer otonom olmayan gecikmeli sistemi

$$x'(t) + p_0(t)x(t) + \sum_{i=0}^{n} p_i(t)\, x\big(t - \tau_i(t)\big) = 0 \qquad (2.7)$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada bazı $\widetilde{t_0} \in R$ için ve pozitif m tamsayısı için

$$p_i \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^{m\times m}\right], \quad i = 1,2,3 \dots, n$$

için,

$$\tau_i \in C\left[[\ \widetilde{t_0}, \infty], R^{m\times m}\right], \quad i = 1,2,3 \dots, n$$

ve

$$\lim_{t\to\infty}[t-\tau_i(t)]=\infty\ , \qquad i=1,2,3\ldots,n$$

olmak üzere $t_0 \geq \widetilde{t_0}$ için $\varphi(t){:}\,[t_{-1},t_0] \to R^m$ verilmiş olsun. O halde (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0,\infty)$ aralığın da kesin tek çözümü vardır.

Tanım 2.4. Lineer otonom gecikmeli sistemi

$$x'(t)+p_0x(t)+\sum_{i=0}^{n} p_i\, x\big(t-\tau_i(t)\big)=0 \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanmak üzere burada $i=1,2,3,\ldots,n$ için p_i ifadeleri $m\times m$ tipinde matrisler ve τ_i gecikmeleri negatif olmayan reel katsayılardır. O zaman her $t_0\in R$ ve her $\varphi(t){:}\,\big[[t_{-1},t_0]\to R^m\big]$ için (2.8) ve (2.5) başlangıç değer probleminin $[t_0,\infty)$ aralığın da bir tek çözümü vardır(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.5. (Gronwalls eşitsizliği**)** $I=[t_0,T)$ şeklinde reel sayıların bir aralığı ve $c\in[0,\infty)$ ve $u,v\in C[I,R^+]$ olmak üzere $t\in I$ için

$$u(t)\leq c+\int_{t_0}^{t} v(s)\,u(s)ds$$

ise bu drurumda

$$u(t)\leq c\,exp\left(\int_{t_0}^{t} v(s)\,ds\right)$$

dır(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.6. (Laplace dönüşümü**)** Lineer diferensiyel denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerden biriside integral dönüşümüdür. Bu integral dönüşümü

$$F(s)=\int_{\alpha}^{\beta} K(s,t)f(t)\,dt \tag{2.9}$$

şeklindedir. Bu integral dönüşümü yardımıyla verilen bir $f(t)$ fonksiyonu bir diğer $F(s)$ fonksiyonuna dönüştürülmektedir. $F(s)$ fonksiyonuna $f(t)$ nin integral dönüşümü ve $K(s,t)$ ifadesine de integral dönüşümün çekirdeği denir. İntegral dönüşümün $K(s,t)$ çekirdeği değiştikçe integral dönüşümü değişik adlar alır. İntegral dönüşümünden $K(s,t) = \exp(-st)$ seçilirse ve integral sınırları $\alpha = 0 \ ve \ \beta = \infty$ alınırsa bu integral dönüşümüne Laplace dönüşümü denir.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty \exp(-st) f(t) dt = F(s)$$

denklemi ile tanınan $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ye $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü denir. Laplace dönüşümü tanımından da görüldüğü gibi, bu dönüşüm genelleştirilmiş integral görünümündedir. Eğer, (2.9) denklemiyle verilen genelleştirilmiş integral yakınsak ise Laplace dönüşümü tanımlanır(Györi, Ladas 1991).

Lemma 2.7. a) $x \in \mathrm{C}\big[[-\tau,\infty)\mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis $\sigma_0 < \infty$ olsun. $x(t-\tau)$ nin laplace dönüşümü aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekilde ki tüm s ler için

$$L[x(t-\tau)] = \int_0^\infty e^{-st} x(t-\tau) dt = e^{-st} X(s) + e^{-st} \int_{-\tau}^0 e^{-st} x(t) dt \qquad (2.10)$$

olur(Györi, Ladas 1991).

b) $x \in \mathrm{C}^1\big[[0,\infty)\mathrm{R}\big]$ ve $x(t)$ nin Laplace dönüşümü olan $X(s)$ nin yakınsadığı apsis $\sigma_0 < \infty$ olsun.$x'(t)$ nin Laplace dönüşümüde aynı yakınsanan apsise sahiptir ve Re $s > \sigma_0$ olacak şekilde ki tüm s ler için

$$L[x'(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x'(t) dt = sX(s) - x(0)$$

olur(Györi, Ladas 1991).

Tanım 2.8. $p, \tau \in R$ olmak üzere $x'(t) + px(t-\tau) = 0$ gecikmeli diferensiyel denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda\tau} = 0$$

karakteristik denklemi hiçbir reel köke sahip değildir(Ladas,Sficas, Stavroulakis 1983).

Tanım 2.9.(Lipschitz Şartı**)**

$$y' = f(x,y)\,,\;\; y(x_0) = \; y_0$$

bir başlangıç değer problemi ve D bölgeside merkezi (x_0, y_0) noktasında olan,

$$|x - x_0| \leq a\,, |y - y_0| \leq a$$

ile tanımlı dikdörtgensel bir bölge olmak üzere bu bölgede tanımlı başlangıç değer problemindeki f ile df/dy fonksiyonları sürekli olsun. df/dy ifadesinin sürekli olması kabulu df/dy değerinin D de sınırlı olmasını gerektirir. Öyleyse D deki her bir nokta için

$$\left|\frac{df}{dy}\right| < K$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. O halde (x, y_1)ve (x, y_2) noktaları D bölgesinde iki nokta olmak üzere ortalama değer teoreminden

$$f(x,y_1) - f(x,y_2) = \frac{df}{dy}(x,y^*)(y_1 - y_2)$$

olacak şekilde y_1 ve y_2 arasında bir y^* sayısının olduğu kabul edilmek üzere, $x, y^* \in D$ olduğundan D deki (x, y_1) ve (x, y_2) noktalarının her bir çifti için,

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{df}{dy}(x,y^*)\right| |y_1 - y_2| \qquad (2.11)$$

$$\leq K|y_1 - y_2|$$

bulunur. Bu eşitsizlik f fonksiyonu için Lipschitz şartı olarak adlandırılır. Buna göre varlık teoreminden df/dy değerinin D de sürekli olması kabulü yerine (2.11) şartının sağlanması kabulünün eşdeğer olduğu söylenebilir. O halde varlık teoreminin ispatında df/dy değerinin sürekliliği hipotezi yerine Lipschitz şartı kullanılabilir(Özer, Eser 2002).

Sonuç 2.1. Eğer $|x - x_0| \leq h$ ise $i = 1,2,3 \ldots, n$ için

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \leq K|y_n(x) - y_{n-1}(x)|$$

eşitsizliği doğrudur(Özer, Eser 2002).

Tanım 2.10. Bir diferensiyel denklemin herhangi bir çözümü x olmak üzere eğer bu x çözümleri keyfi sayıda sıfırlara sahipse bu çözüme salınımlıdır denir. Aksi taktirde bu çözümlere salınımlı olmayan çözümler denir. Yani x salınımlı değil ise bir $t_1 > t_0$ değeri vardır öyle ki $t > t_1$için $x(t) \neq 0$ dır. Diğer bir deyişle belli bir değerden sonra çözüm ya hep pozitiftir ya da hep negatiftir(I.Györı, G. Ladas 1991).

Tanım 2.11. Eğer $x(t)$,

$$x'(t) + x\big(t - \tau(t)\big) = 0$$

denkleminin $[t_0, \infty)$ ve $[T_0, \infty)$ aralığında t_0 başlangıç noktasına göre $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ise bu $x(t)$ çözümüne denklemin bir pozitif çözümü denir(Erbe, Kong, Zhang 1994).

Tanım 2.12.(Sup-norm**)** X, E(Öklid Uzayı) uzayında tanımlanmış sınırlı fonksiyonların bir uzayı olmak üzere

$$\|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanan norma sup-norm denir(Matemarik Terimleri Sözlüğü, 2000).

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

3.1. Otonom veya Otonom Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılık Şartları

Bu kısımda birinci mertebeden lineer homogen diferensiyel denklemlerin salınımlılığı için yeter şartlar incelenecektir.

$$x'(t) + px(t - \tau) = 0 \tag{3.1}$$

birinci mertebeden sabit katsayılı homogen diferensiyel denklemi için $p \in R$ ve τ negatif olmayan reel sayı olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t - \tau_i) = 0 \tag{3.2}$$

lineer otonom diferensiyel denklemi ve $t \geq t_0$ için

$$x'(t) + p(t)x(t - \tau) = 0 \tag{3.3}$$

lineer otonom olmayan diferensiyel denklemi ele alınacaktır.

Tanım 3.1.1. $p, \tau \in R$ olmak üzere (3.1) denklemi ele alınsın. (3.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır ancak ve ancak

$$F(\lambda) = \lambda + pe^{-\lambda t} = 0$$

karakteristik denklemi hiçbir reel köke sahip değildir(Ladas, Sficas, Stavroulakis 1983).

Teorem 3.1.1. $p, \tau \in R$ olmak üzere,

$$x'(t) + px\,(t - \tau) = 0$$

(3.1) lineer sabit katsayılı diferensiyel denklemi ele alınsın. (3.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olması için gerek ve yeter şart

$$pt > \frac{1}{e} \tag{3.4}$$

dir(Ladas, Sficas 1984).

İspat. (3.4) koşulundan p ve τ aynı işaretli olmalıdır.

Eğer $p > 0$ ve $\tau > 0$ ise $\lambda \to -\infty$ iken $pe^{-\lambda\tau}$ λ dan daha hızlı büyüyeceğinden

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = \infty$$

olur ve $\lambda \to \infty$ iken $e^{-\lambda\tau} \to 0$ olduğundan dolayı

$$\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = \infty$$

elde edilir. $\lambda > 0$ ifadesi için $F(\lambda) > 0$ olur. $F(\lambda)$ fonksiyonunun ekstremum değeri incelenecek olursa,

$$F'(\lambda) = 1 - p\tau e^{-\lambda\tau}$$

$$1 - p\tau e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$e^{-\lambda\tau} = \frac{1}{p\tau}$$

$$-\lambda\tau = \ln\,(p\tau)^{-1}$$

$$\lambda = \frac{\ln(p\tau)}{\tau}$$

elde edilir $\lambda = \frac{\ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada $F(\lambda)$ ekstremuma sahiptir.

$$F''(\lambda) = p\tau^2 e^{-\lambda\tau}$$

$p > 0$, $\tau^2 > 0$ ve $\forall \lambda \in R$ ifadesi için $e^{-\lambda\tau} > 0$ olduğundan $F''(\lambda) > 0$ elde edilir. O halde $\lambda_0 = \dfrac{\ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada F fonksiyonu minimuma sahiptir.

$$F(\lambda_0) = \frac{\ln\,(p\tau)}{\tau} + pe^{\frac{\ln\,(p\tau)}{\tau}\tau} = \frac{\ln\,(p\tau)}{\tau} + p\frac{1}{p\tau}$$

$$= \frac{\ln\,(p\tau)}{\tau} + \frac{1}{\tau} = \frac{\ln\,(p\tau e)}{\tau}$$

$$\min_{\lambda \in R} F(\lambda) = \frac{\ln(p\tau e)}{\tau}$$

elde edilir.

$$p\tau > \frac{1}{e}$$

olduğundan dolayı $p\tau e > 1$ elde edilir ve ayrıca,

$$\ln(p\tau e) > 0$$

olduğu görülür. Buradan da $\tau > 0$ olduğundan dolayı

$$\frac{\ln(p\tau e)}{\tau} > 0$$

ifadesi elde edilir.

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \infty$$

olmak üzere ve minimum noktasında fonksiyon sıfırdan büyük olduğundan $F(\lambda)$ reel köke sahip değildir.

$p < 0$ ve $\tau < 0$ ise $\lambda \to -\infty$ iken $e^{-\lambda\tau} \to 0$ olduğundan

$$\lim_{\lambda \to -\infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = -\infty$$

ifadesi elde edilir ve $\lambda \to \infty$ iken $e^{-\lambda\tau}, \lambda$ dan daha hızlı büyüyeceğinden

$$\lim_{\lambda \to \infty} F(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\lambda + pe^{-\lambda\tau}\right) = -\infty$$

elde edilir.

$$F'(\lambda) = 1 - p\tau e^{-\lambda\tau}$$

ifadesi için $\lambda_0 = \dfrac{\ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada $F(\lambda)$ ektremuma sahiptir. $p < 0$ olduğundan

$$F''(\lambda) = p\tau^2 e^{-\lambda\tau} < 0$$

dır. O halde $\lambda_0 = \dfrac{\ln(p\tau)}{\tau}$ apsisli noktada F fonksiyonu maksimuma sahiptir.

$$\max_{\lambda \in R} F(\lambda) = \frac{\ln(p\tau)}{\tau}$$

elde edilir. $p\tau > \dfrac{1}{e}$ ve $\tau < 0$ olduğundan dolayı

$$\frac{\ln(p\tau)}{\tau} < 0$$

dır. Maksimum noktasında fonksiyon sıfırdan küçük olduğundan $F(\lambda)$ reel köke sahip değildir. Teorem 3.1.1 gereği (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Tanım 3.1.2 $p \in R$ ve τ_i negatif olmayan reel sayı olmak üzere

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i x(t - \tau_i) = 0$$

(3.2) denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau}$$

biçimindedir(Ladas, Sficas, Stavroulakis 1983).

Teorem 3.1.2. Kabul edelim ki $i = 1,2,\ldots,n$ için $p_i, \tau_i \geq 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iki şart (3.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şarttır.

(a) $$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e} \tag{3.5}$$

(b) $$\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \tau_i\right) > \frac{1}{e} \tag{3.6}$$

(Ladas, Sficas 1984).

İspat. (a) (3.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i}$$

biçimindedir. $\lambda > 0$ için $p_i \geq 0$ ve $\forall \lambda \in R$ için $e^{-\lambda \tau_i} > 0$ olduğundan $F(\lambda) > 0$ olduğu görülmektedir. Yani karakteristik denklemin reel kökü yoktur. $\lambda < 0$ için,

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i}$$

$e^a > ae$ eşitsizliğnden

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i}$$

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda \tau_i} \geq \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i (-\lambda \tau_i) e$$

$$\geq \lambda - \lambda e \left[\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right] = -\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right)$$

$\lambda < 0$ olduğundan $-\lambda e > 0$ ve (3.5) koşulunda

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > \frac{1}{e}$$

olduğundan dolayı

$$-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i > 0$$

olur. O halde

$$-\lambda e \left(-\frac{1}{e} + \sum_{i=1}^{n} p_i \tau_i \right) > 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece $F(\lambda) > 0$ bulunur. (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

(b) Aritmetik ortalama ve geometrik ortalamayla ilgili eşitsizliği göz önüne alınacak olursa

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$\lambda < 0$ için

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-\lambda\tau_i} \geq \lambda + n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}} = \lambda + n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}} e^{-\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i}$$

$$\geq \lambda + n\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(-\mathrm{e}\frac{\lambda}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)$$

$$= -\lambda e\left[-\frac{1}{e} + \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right)\right]$$

(3.6) şartından $F(\lambda) > 0$ olur. O halde (3.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Tanım 3.1.3. $p \in R$ ve τ negatif olmayan reel sayı olmak üzere ve $t \geq t_0$ olmak üzere

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

ifadesine lineer otonom olmayan gecikmeli diferensiyel denklemi denir(Ladas, Sficas 1983).

Teorem 3.1.3. Kabul edelim ki $p \in C\,[[t_0, \infty), R^{+}], \tau > 0$

ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\tau}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e} \tag{3.7}$$

olsun. O halde (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır(Ladas 1979).

İspat. (3.3) denklemi pozitif bir $x(t)$ çözümüne sahip olsun. O halde $t \geq t^*$ için $t^* \geq t_0 + \tau$ olacak şekilde bir t^* sayısı vardır, öyle ki

$$x(t) > 0 \quad , \quad x(t-\tau) > 0$$

dır. (3.3) denkleminden

$$x'(t) = -p(t)x(t-\tau)$$

ifade edilir.

$$p(t) > 0$$

ve

$$x(t-\tau) > 0$$

olduğundan dolayı

$$x'(t) \leq 0$$

olur. Yani fonksiyon o aralıkta azalandır ve

$$x(t-\tau) \geq x(t)$$

dir. Ayrıca (3.7) koşulundan öyle bir $c > 0$ sabiti ve $t_l \geq t^*$ vardır. $t \geq t_l$ için

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)\,ds \geq c \geq \frac{1}{e}$$

dir.

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

denkleminden $t \geq t_l$ için

$$x(t-\tau) \geq x(t)$$

olduğundan

$$x'(t) + p(t)x(t) \leq 0$$

ifadesi elde edilir. Buradan, $t \geq t_l$ için

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t) \leq 0$$

olur. Her iki tarafın $t-\tau$ dan t ye integrali alınırsa,

$$\int_{t-\tau}^{t} \left[\frac{x'(s)}{x(s)} + p(s)\right] ds \leq \int_{t-\tau}^{t} 0\, ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \frac{x'(s)}{x(s)} ds + \int_{t-\tau}^{t} p(s) ds \leq 0$$

$$\ln(x(s))\Big|_{t-\tau}^{t} + c \leq 0$$

olur ve $t \geq t_1 + \tau$ için

$$\ln \frac{x(t)}{x(t-\tau)} + \ln e^c \leq 0$$

$$\ln\left(\frac{x(t)e^c}{x(t-\tau)}\right) \leq \ln 1$$

ve

$$\frac{x(t)e^c}{x(t-\tau)} \leq 1$$

elde edilir. Buradan $t \geq t_1 + \tau$ için

$$e^c x(t) \leq x(t-\tau)$$

dir. $\forall c \in$ R için $e^c \geq ec$ olduğundan $t \geq t_1 + \tau$ için

$$(ec)x(t) \leq x(t-\tau)$$

olur. Bu ifade elde edilen (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$$x'(t) + p(t)(ec)x(t-\tau) \leq 0$$

elde edilir. Eşitsizliğin her bir terimi $x(t)$ ye bölünürse

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t)(ec) \leq 0$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t-\tau$ dan t ye integre edilirse,

$$\int_{t-\tau}^{t} \left(\frac{x'(t)}{x(t)} ds + p(s)(ec) ds \right) \leq \int_{t-\tau}^{t} 0 ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t} \frac{x'(t)}{x(t)} ds + (ec) \int_{t-\tau}^{t} p(s) ds \leq 0$$

$$\ln\big(x(t)\big) - \ln\big(x(t-\tau)\big) + (ec^2) \leq 0$$

$$\ln\left(\frac{x(t)e^{ec^2}}{x(t-\tau)} \right) \leq \ln 1$$

$$x(t)e^{ec^2} \leq x(t-\tau)$$

elde edilir. $\forall c \in \mathrm{R}$ için $e^c \geq e.c$ olduğundan $t \geq t_1 + 2\tau$ için

$$ec^2 x(t) e \leq x(t-\tau)$$

$$(ec)^2 x(t) \leq x(t-\tau)$$

bulunur. Bu ifade de tümevarım metoduyla genişletilecek olursa

$t \geq t_l + m\tau$ için

$$(ec)^m x(t) \leq x(t-\tau)$$

olsun. $t \geq t_l + (m+l)\tau$ için

$$(ec)^m x(t) \leq x(t-\tau)$$

ifadesi (3.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$x'(t) + p(t)(ec)^m x(t) \leq 0$$

elde edilen eşitsizliğinin her bir terimi $x(t)$ ye bölünürse

$$\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t)(ec)^m \leq 0$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $t-\tau$ dan t ye integre edilirse

$$\int_{t-\tau}^{t}\left(\frac{x'(t)}{x(t)} + p(t)(ec)^m\right)ds \leq \int_{t-\tau}^{t} 0ds$$

$$\int_{t-\tau}^{t}\frac{x'(t)}{x(t)}ds + (ec)^m\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \leq 0$$

$$ln(x(t)) - ln(x(t-\tau)) + e^m c^{m+1} \leq 0$$

$$\ln\left(\frac{x(t)e^m c^{m+1}}{x(t-\tau)}\right) \leq \ln 1$$

$$x(t)e^{e^m c^{m+1}} \leq x(t-\tau)$$

elde edilir. $\forall c \in R$ için $e^c \geq e.c$ olduğundan $t \geq t_l + (m+l)\tau$ için

$$e^{e^m c^{m+1}}x(t)e \leq x(t-\tau)$$

$$(ec)^{m+1}x(t) \leq x(t-\tau)$$

dır. O halde $c > \frac{1}{e}$ olduğundan $t \geq t_l + k\tau$ için

$$(ec)^k x(t) \leq x(t-\tau) \tag{3.8}$$

olur. Aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde öyle bir k değeri seçilsin,

$$\left(\frac{2}{c}\right)^2 < (ec)^k \tag{3.9}$$

ve de bir $\tilde{t} \geq t_l + k\tau$ olsun. O halde öyle bir $\xi \in (\tilde{t}, \tilde{t}+\tau)$ vardır ki

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)ds \geq \frac{c}{2} \qquad , \qquad \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)ds \geq \frac{c}{2} \tag{3.10}$$

elde edilir. (3.3) denklemi $[\tilde{t}, \xi]$ ve $[\xi, \tilde{t}+\tau]$ aralıklarında integre edilecek olursa

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} [x'(s) + p(s)x(s-\tau)]ds \ = 0$$

$$x(\xi) - x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)ds = 0 \tag{3.11}$$

ve

$$x(\tilde{t}+\tau) - x(\xi) + \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)x(s-\tau)ds = 0 \tag{3.12}$$

olarak elde edilir. (3.11) de ki $\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)ds$ integralin de $\tilde{t} \leq s \leq \xi$ ve $x(t)$ azalan olduğundan

$$x(\xi - \tau) \leq x(s-\tau)$$

elde edilir. Buradan,

$$\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(s-\tau)ds \geq \int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)x(\xi-\tau)ds = x(\xi-\tau)\int_{\tilde{t}}^{\xi} p(s)ds$$

ifadesi bulunur. Böylece (3.9) dan

$$-x(\tilde{t}) + x(\xi-\tau)\frac{c}{2} < 0 \tag{3.13}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.12) ifadesinde

$$\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)x(s-\tau)ds$$

integrali için de $\xi \leq s \leq \tilde{t} + \tau$ olduğundan ve $x(t)$ azalan olduğundan

$$x\big((\tilde{t}+\tau)-\tau\big) \leq x(s-\tau)$$

$$x(\tilde{t}) \leq x(s-\tau)$$

olur. Buradan da

$$\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)x(s-\tau)ds \geq \int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)x(\tilde{t})ds = x(\tilde{t})\int_{\xi}^{\tilde{t}+\tau} p(s)ds$$

elde edilir. Böylece (3.10) dan

$$-x(\xi) + x(\tilde{t})\frac{c}{2} < 0 \tag{3.14}$$

dır. (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden

$$x(\xi) > x(\tilde{t})\frac{c}{2} > \left(\frac{c}{2}\right)^2 x(\xi-\tau)$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{x(\xi-\tau)}{x(\xi)} > \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

elde edilir. (3.8) de

$$\frac{x(t-\tau)}{x(t)} > (ec)^k$$

şeklinde idi. Böylece

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 > \frac{x(\xi-\tau)}{x(\xi)} > (ec)^k$$

bulunur. Bu da (3.9) ile çelişir.O halde (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

3.2. Birinci Mertebeden Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı için Bazı Salınımlılık Şartları

Bu kısımda $p_i(t)$ sürekli ve negatif olmayan fonksiyonlar ve τ_i lerde pozitif sabitler olmak üzere,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(t - \tau_i) = 0 \tag{3.15}$$

diferensiyel denkleminin salınımlılığı için yeter şartlar verilecektir. 1982 de Ladas ve Stavroulakis, 1984 de Arino, Györi ve Jawhari (3.15) denkleminin çözümünün salınımlılığı için yeter şartlar elde etmişlerdir. Çeşitli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık özelliklerini çalışmakta olan bir çok yazar (3.7) integral şartını kullanmışlardır. Örneğin 1986 da Grammatikopoulos, Grove ve Ladas'ın, 1990 da Ladas ve Qian'in, 1998 de Zhang ve Gopalsamy'nin çalışmalarında görülür. Bu denklemin salınımlılık şatlarıyla ilgili başka sonuçlar 1984 de Hunt ve York'un, 1986 da Györi'nin, 1990 da Cheng'in, 1991 da Kwong'un, 1975 deki Tramov'un çalışmalarında görülmektedir.

1995 de Li göstermiştir ki, eğer,

$$\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds \geq \frac{1}{e}\,, \quad t_0 > 0 \tag{3.16}$$

ve

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t)\left[\int_{t-\tau}^{t} p(s)ds - \frac{1}{e}\right]dt = \infty \tag{3.17}$$

ise (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Bu sonuç (3.7) deki salınımlılık şartının bir genişlemesidir.

Teorem 3.2.1. Eğer bazı i ler için

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t}^{t+\tau_i} p_i(s)ds > 0$$

ve $x(t)$, (3.15) denkleminin pozitif bir çözümü ise bu durumda aynı i ler için,

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t-\tau_i)}{x(t)} < \infty \tag{3.18}$$

dur(Li, 1996).

İspat. $d>0$ olacak şekilde bir sabit ve bir $\{t_k\}$ dizisi vardır öyle ki $k\to\infty$ iken $t_k\to\infty$ ve

$$\int_{t_k}^{t_k+\tau_i} p_i(s)ds \geq d, \quad k=1,2,\dots n$$

olsun. Bu durumda her k için $\varphi_k \epsilon (t_k, t_k+\tau_i)$ vardır öyle ki;

$$\int_{t_k}^{\varphi_k} p_i(s)ds \geq \frac{d}{2} \quad \text{ve} \quad \int_{\varphi_k}^{t_k+\tau_i} p_i(s)ds \geq \frac{d}{2} \tag{3.19}$$

dir. Diğer yandan (3.15) denkleminden yeterince büyük t ler için,

$$x'(t)+p_i(t)x(t-\tau_i) \leq 0 \tag{3.20}$$

dır. (3.20) denkleminin $[t_k,\varphi_k]$ ve $[\varphi_k, t_k+\tau_i]$ aralıkları üzerinde integrali alınırsa,

$$x(\varphi_k)-x(t_k)+\int_{t_k}^{\varphi_k} p_i(s)x(s-\tau_i)ds \leq 0 \tag{3.21}$$

ve

$$x(t_k+\tau_i)-x(\varphi_k)+\int_{\varphi_k}^{t_k+\tau_i} p_i(s)x(s-\tau_i)ds \leq 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.21) ve (3.22) deki birinci terimler atılır, (3.19) dan ve $x(t)$ azalan olduğundan,

$$-x(t_k)+\tfrac{d}{2}x(\varphi_k-\tau_i) \leq 0 \quad \text{ve} \quad -x(\varphi_k)+\tfrac{d}{2}x(t_k) \leq 0$$

veya

$$\frac{x(\varphi_k-\tau_i)}{x(\varphi_k)} \leq \left(\frac{2}{d}\right)^2$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.2. Eğer (3.15) denklemi pozitif bir çözüme sahipse bu durumda,

$$\int_t^{t+\tau_i} p_i\,(s)ds \geq 1 \;,\;\; i = 1,2,3,\dots,n \qquad (3.23)$$

dır(Li 1996).

İspat.

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)x(t-\tau_i) = 0$$

denkleminin her iki tarafının $[t, t+\tau_i]$ aralığında integrali alınırsa

$$x(t)\left(\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds - 1\right) \leq 0$$

olarak elde edilir.

Teorem 3.2.3. $t_0 > 0$ olmak üzere $\forall t \geq t_0$ için

$$\int_t^{t+\tau} p(s)ds > 0$$

ve

$$\int_{t_o}^{\infty} p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau} p(s)ds\right)dt = \infty \qquad (3.24)$$

ise (3.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır(Li 1996).

İspat. Aksi kabul edilecek olursa, yani (3.3) denkleminin pozitif bir çözümü $x(t)$ olsun. $x(t)$ nin monoton azalan olduğu açıktır. $\lambda(t) = -x'(t)/x(t)$ olmak üzere yeterince büyük t ler için açıktır ki $\lambda(t)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $t_1 \geq t_0$ için $x(t_1) > 0$ olmak üzere $x(t) = x(t_1)\exp\left(-\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right)$ dir. Dahası $\lambda(t)$ ifadesi

$$\lambda(t) = p(t)\exp\left(-\int_{t-\tau}^{t}\lambda(s)\,ds\right) \qquad (3.25).$$

dır ve genelleştirilmiş karakteristik denklemini sağlar.

$$e^{rx} \geq x + \frac{\ln(er)}{r} \quad , \qquad r > 0 \tag{3.26}$$

ve

$$f(x) = e^{rx} - \left(x + \frac{\ln(er)}{r}\right) \geq 0$$

olmak üzere (3.26) eşitsizliği kullanılarak ve $A(t) = \int_t^{t+\tau} p(s)ds$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$\lambda(t) = p(t)\exp\left(A(t)\frac{1}{A(t)}\int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)\, ds\right)$$

$$\geq p(t)\left[\frac{1}{A(t)}\int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)\, ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)}\right]$$

elde edilir. Buradan,

$$\lambda(t)\int_t^{t+\tau} p(s)ds - p(t)\int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)\, ds \geq p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau} p(s)ds\right) \tag{3.27}$$

bulunur. O halde $N > T$ için elde edilen denklemin integrali alınırsa,

$$\int_T^N \lambda(t)\int_t^{t+\tau} p(s)ds\, dt - \int_T^N p(t)\int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)\, dsdt$$

$$\geq \int_T^N p(t)\ln\left(e\int_t^{t+\tau} p(s)ds\right)dt \tag{3.28}$$

ifadesi elde edilir. Bu integralde değişken değiştirilecek olursa

$$\int_T^N p(t)\int_{t-\tau}^{t} \lambda(s)\, dsdt \geq \int_T^{N-\tau}\left(\int_s^{s-\tau} p(t)\lambda(s)\, dt\right)ds$$

$$= \int_T^{N-\tau} \lambda(s)\left(\int_s^{s+\tau} p(t)\, dt\right)ds$$

$$= \int_T^{N-\tau} \lambda(t)\left(\int_t^{t+\tau} p(s)\, ds\right)ds\, dt \tag{3.29}$$

bulunur. (3.28) ve (3.29) dan,

$$\int_{N-\tau}^{N} \lambda(t)\left(\int_{t}^{t+\tau} p(s)\, ds\right) dt \geq \int_{T}^{N} p(t) \ln\left(e \int_{t}^{t+\tau} p(s) ds\right) dt \tag{3.30}$$

olur. Teorem 3.2.2 den

$$\int_{t}^{t+\tau} p(s)\, ds \leq 1 \tag{3.31}$$

dir. (3.30) ve (3.31) den,

$$\int_{N-\tau}^{N} \lambda(t) dt \geq \int_{T}^{N} p(t) \ln\left(e \int_{t}^{t+\tau} p(s) ds\right) dt$$

veya

$$\ln \frac{x(N-\tau)}{x(N)} \geq \int_{T}^{N} p(t) \ln\left(e \int_{t}^{t+\tau} p(s) ds\right) dt \tag{3.32}$$

ifadesi elde edilir. (3.24) ifadesinden

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t-\tau)}{x(t)} = \infty \tag{3.33}$$

bulunur. Diğer yandan (3.24) den $n \to \infty$ için $t_n \to \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizi vardır öyler ki tüm n ler için

$$\int_{t_n}^{t_n+\tau} p(s) ds \geq \frac{1}{e}$$

dır. Böylece Teorem 3.2.1 den

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{x(t-\tau)}{x(t)} < \infty$$

elde edilir. Buda (3.33) ile çelişir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.3 de elde edilen sonuç (3.7) şartının daha da geliştirilmişidir. Eğer (3.7) sağlanırsa,

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt = \infty \tag{3.34}$$

olup bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki; yeterince büyük t ler için

$$\ln\left(e\int_{t}^{t+\tau} p(s)ds\right) \geq \mathrm{c} \tag{3.35}$$

dir. (3.34) ve (3.35) ifadeleri, (3.24) ü ima eder. (3.24) şartı sonsuz bir aralıkta $p(t)$ ve $\int_t^{t+\tau} p(s)ds$ nin bir değerlendirmesidir. Açıktır ki $\int_t^{t+\tau} p(s)ds > 0$ şartı (3.24) için gereklidir.

Örnek 3.2.1. $p(t) = \exp(k \sin t - 1)$ ve k bir pozitif sabit olmak üzere,

$$x'(t) + \exp(k \sin t - 1)\, x(t-1) = 0 \tag{3.36}$$

birinci mertebeden gecikmeli diferensiyel denklemi göz önüne alınırsa açıktır ki;

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-1}^{t} p(s)ds < \frac{1}{e}$$

dır. Böylece (3.7) şartı sağlanmaz. Yani Ladas'ın 1979 yapmış olduğu çalışmasındaki salınımlılık şartlarından bu denklemin çözümlerinin salınımlı olup olmadığı hakkında bir şey söylenemez. Jensen eşitsizliğinden

$$\int_{0}^{\infty} p(t)\ln\left(e\int_{t}^{t+\tau} p(s)ds\right)dt \geq \int_{t_0}^{\infty} p(t)\int_{t}^{t+1} k \sin s\, ds\, dt$$

$$= \frac{2k \sin\frac{1}{2}}{e}\int_{0}^{\infty} \exp(k \sin t)\sin\left(t + \frac{1}{2}\right)dt$$

dır. Diğer yandan kolayca görülür ki;

$$\int_{0}^{t} \exp(k \sin t) \cos t\, dt$$

ifadesi sınırlıdır ve

$$\int_0^{2\pi} \exp(k \sin t) \mathrm{sint}\, dt > 0$$

dır. Buradan

$$\int_0^{\infty} p(t) \ln\left(e \int_t^{t+1} p(s) ds\right) dt = \infty$$

dır. Teorem 3.2.3 den (3.36) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır(Li, 1996).

Örnek 3.2.2.

$$x'(\mathrm{t}) + \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{t}\right) x(t-1) = 0 \qquad (3.37)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini göz önüne alınsın. $p(t) = \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ olmak üzere açıkça görülür ki;

$$\int_1^{\infty} p(t) \ln\left(e \int_t^{t+1} p(s) ds\right) ds\, dt \geq \frac{1}{e} \int_1^{\infty} \ln\left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) dt = \infty$$

dır. Teorem 3.2.3 den (3.37) nin bütün çözümleri salınımlıdır. Diğer taraftan

$$x'(\mathrm{t}) + \frac{1}{e} x(t-1) = 0 \qquad (3.38)$$

gecikmeli denklemi e^{-t} gibi pozitif çözüme sahiptir. Sonuç itibariyle

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{e}} = 1$$

olmasına rağmen (3.37) ve (3.38) denklemleri farklı salınım davranışlarına sahiptir(Li 1996).

Teorem 3.2.4. $\tau_n = \max\{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n\}$ olsun. $t_0 > 0$ ve $t \geq t_0$ için,

$$\sum_{i=1}^{n} \int_t^{t+\tau_i} p_i(s) ds > 0$$

olmak üzere,

$$\limsup_{t\to\infty}\int_t^{t+\tau_n} p_n(s)ds > 0 \tag{3.39}$$

olsun. Eğer buna ek olarak,

$$\int_{t_0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds\right)dt = \infty \tag{3.40}$$

ise (3.15) in tüm çözümleri salınımlıdır(Li 1996).

İspat. Aksine (3.15) denkleminin pozitif ve azalan bir çözümü $x(t)$ olsun. Ayrıca $\lambda(t) = x'(t)/x(t)$ olsun. $\lambda(t)$ negatif olmayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere $t_1 \geq t_0$ için $x(t_1) > 0$ vardır öyle ki;

$$x(t) = x(t_1)\exp\left(-\int_{t_1}^{t}\lambda(s)\,ds\right)$$

dir. Dahası $\lambda(t)$ ifadesi,

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(-\int_{t-\tau_i}^{t}\lambda(s)\,ds\right)$$

genelleştirilmiş karakteristik denklemini sağlar. $B(t) = \sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds$ olsun. (3.26) ifadesi kullanarak,

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left(B(t)\frac{1}{B(t)}\int_{t-\tau_i}^{t}\lambda(s)\,ds\right)\\ &\geq \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left[\frac{1}{B(t)}\int_{t-\tau_i}^{t}\lambda(s)\,ds + \frac{\ln\big(eB(t)\big)}{B(t)}\right]\end{aligned}$$

ya da

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds\right)\lambda(t)dt - \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t}\lambda(s)\,ds$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right) \ln\left(e\sum_{i=1}^{n}\int_{t}^{t+\tau_i} p_i(s)ds\right) \qquad (3.41)$$

elde edilir. Öyleyse $N > T$ için (3.41) ifadesinin integrali alınırsa,

$$\int_T^N \left(\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds\right)\lambda(t)dt - \int_T^N \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t} \lambda(s)\, ds$$

$$\geq \int_T^N \left(\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds\right)dt \qquad (3.42)$$

bulunur. (3.42) ifadesinin integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\int_T^N \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\int_{t-\tau_i}^{t} \lambda(s)\, ds\, dt \geq \sum_{i=1}^{n}\int_T^{N-\tau_i}\left(\int_s^{s+\tau_i} p_i(t)\lambda(s)\, dt\right)ds$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_T^{N-\tau_i}\lambda(t)\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)ds\, dt \qquad (3.43)$$

elde edilir. (3.43) ve (3.42) den,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{N-\tau}^{N}\lambda(t)\int_{t-\tau_i}^{t} p_i(s)\, dsdt \geq \int_T^N\left(\sum_{i=0}^{N} p_i(t)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)\, ds\right)dt \quad (3.44)$$

elde edilir. Diğer taraftan Teorem 3.2.2 den

$$\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)\, ds \leq 1 \quad , \quad i = 1,2,3 \ldots n \qquad (3.45)$$

bulunur. Buradan (3.44) ve (3.45) den,

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{N-\tau_i}^{N}\lambda(t) \geq \int_T^N\left(\sum_{i=0}^{N} p_i(t)\right)\ln\left(e\sum_{i=1}^{n}\int_t^{t+\tau_i} p_i(s)\, ds\right)dt$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{x(N-\tau_i)}{x(N)} \geq \int_T^N \left(\sum_{i=0}^{N} p_i(t)\right) \ln\left(e \sum_{i=1}^{n} \int_t^{t+\tau_i} p_i(s)\, ds\right) dt \qquad (3.46)$$

ifadeleri elde edilir. (3.40) dan,

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{x(t-\tau_i)}{x(t)} = \infty \qquad (3.47)$$

dur. Buda,

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{x(t-\tau_n)}{x(t)} = \infty \qquad (3.48)$$

sonucunu verir. Bununla birlikte, Teorem 3.2.1 den

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{x(t-\tau_n)}{x(t)} < \infty$$

dur. Elde edilen bu ifade (3.48) ile çelişir ve ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.2.1. Eğer

$$\lim_{t\to\infty} \inf \sum_{i=1}^{n} \int_t^{t+\tau_i} p_i(s) ds > \frac{1}{e} \qquad (3.49)$$

ise (3.15) denkleminin her çözümü salınımlıdır(Li 1996).

İspat. $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n$ olsun. (3.49) dan, $1 \leq m \leq n$ olacak şekilde bir m sayısı vardır öyle ki;

$$\lim_{t\to\infty} \sup \int_t^{t+\tau_m} p_m(s) ds > 0 \qquad (3.50)$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} \inf \sum_{i=1}^{m} \int_t^{t+\tau_i} p_i(s) ds > \frac{1}{e} \qquad (3.51)$$

dır. (3.15) denklemi bir $x(t)$ pozitif çözümüne sahip olsun. Bu durumda $x(t)$ pozitif çözümü aynı zamanda,

$$x'(t) + \sum_{i=1}^{m} p_i(t)\, x(t - \tau_i) \leq 0 \tag{3.52}$$

eşitsizliğinin de pozitif çözümüdür. Diğer taraftan (3.51) de görülür ki bazı $t_0 > 0$ için

$$\int_{t_0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} p_i(t) \right) \ln \left(e \sum_{i=1}^{m} p_i(s) \right) dt = \infty \tag{3.53}$$

dur. O zaman Teorem 3.2.3 den (3.52) nin bütün çözümleri salınımlıdır. Bu bir çelişkidir ve buda ispatı tamamlar.

4. BİRİNCİ MERTEBEDEN NEUTRAL GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

4.1. Birinci Mertebeden Homogen Neutral Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı

Birinci mertebeden lineer olmayan neutral gecikmeli diferensiyel denklemi

$$\big(x(t) + px(t-\tau)\big)' + Q(t)f(x(t-\sigma) = 0 \tag{4.1}$$

şeklinde olmak üzere bu denklemin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki şartlara ihtiyaç vardır.

(C_1) $Q \in R$, τ ve σ pozitif sabitler;

(C_2) $Q\colon [t_0, \infty) \rightarrow R,\ q(t) > 0$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon;

(C_3) $f\colon R \rightarrow R,\ u \neq 0$ için $uf(u) > 0$ olmak üzere sürekli bir fonksiyon ve bir M sabiti vardır öyle ki $f\,(u)/u^{a} \geq M > 0$ dır. Burada α tek tamsayıların oranıdır. Eğer ρ=max{τ,σ} ve $T > t_0$ olduğunu kabul edilecek olursa (4.1) denkleminin çözümü olan bir $x\colon [T-\rho, \infty) \rightarrow R$ fonksiyonu vardır öyle ki, $t \geq T$ için $x(t) + px(t-\tau)$ diferensiyellenebilirdir, ve x her $t \geq T$ için (4.1) denklemini sağlar. Eğer (4.1) denkleminin çözümü keyfi sayıda sıfırlara sahipse çözüm salınımlıdır aksi halde çözüm salnımlı değildir.

Birçok yazar birinci mertebeden neutral diferensiyel denklemlerin salınımlılığı ile ilgili birçok çalışma yapmışlardır. Bunlardan Gopalsamy, Lalli ve Zhang gibi yazarlar aşağıdaki neutral lineer diferensiyel denklemini incelemişlerdir.

$$\big(x(t) + px(t-\tau)\big)' + Q(t)x(t-\tau) = 0 \tag{4.2}$$

burada $-1 < p \leq 0$ dır. Eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma}^{t} Q(s)ds > 1 + p$$

ise (4.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Graef ve arkadaşları lineer olmayan (4.1) nolu denkleminde f azalmayan, sublineer ve $-1 < p \leq 0$ olmak üzere eğer,

$$\int_{to}^{\infty} Q(t)dt = \infty$$

ise (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Hatta f nin süperlineer ve $p < -1$ olması durumunda da (4.1) denklemi için benzer bir sonuç elde etmişlerdir. Mishra, (4.1) denklemini $-1 < p \leq 0$, $\alpha = 1$ ve $M = 1$ olması durumunda incelemiş ve eğer,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma}^{t} Q(s)ds > \frac{1+p}{e}$$

ise (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, sonucunu elde etmiştir. Tanaka ise $0 < \gamma < 1$ ve $h(t) < 0$ olmak üzere,

$$\big(x(t) + hx(t-\tau)\big)' + Q(t)|x(t-\sigma)|^{\gamma} sgnx(t-\sigma) = 0 \qquad (4.3)$$

tipindeki neutral diferensiyel denklemini incelemiştir. Eğer,

$$\int^{\infty} \min\left\{\frac{q(s)}{1 + (h(s-\sigma+t))^{\gamma})}, \frac{q(s-\tau)}{1 + \big(h(s-\sigma)\big)^{\gamma}}\right\} ds = \infty$$

ise (4.3) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu göstermiştir.

Li ve Saker (4.1) denkleminin $-1 < p \leq 0$ ve $\lim_{u\to 0}[u/f(u)] = \beta > 0$ olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma}^{t} Q(s)ds > \frac{\beta}{e(1+p)}.$$

ise (4.1) denkleminin her çözümünün salınımlı olduğunu göstermişlerdir.

Bir çok çalışmada genelde (4.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı $-1 < p \leq 0$ ve $p < -1$ şarları altında incelenmiştir. p nin pozitif olduğu durumda çok az çözüm bilinmektedir. Bu bölümde, 2004 yılında Graef, Savithri ve Thandapani tarafından $p > 1$ olması durumunda (4.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için elde edilen yeter şartlar incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. $\sigma > \tau\ , p \in (1, \infty),\ \alpha = 1$ ve

$$\limsup_{t\to\infty} \int_t^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds > 0 \tag{4.4}$$

olsun. $z(t) = x(t) + px(t-\tau)$ olmak üzere

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{z(t-\sigma+\tau)}{z(t)} < \infty \tag{4.5}$$

iser $x(t)$, (4.1) denkleminin bir pozitif çözümüdür(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

İspat. Hipotezlerden görülür ki $z(t) > 0$ ve (4.1) denkleminden $z(t)$ azalandır. Bu durumda,

$$px(t-\tau) = z(t) - x(t) \tag{4.6}$$

ve

$$z(t+\tau) = x(t+\tau) + px(t)$$

dir. $z(t)$ azalan olduğundan,

$$z(t) > z(t+\tau) \geq px(t)$$

dır ve (4.6) dan,

$$p^2x(t-\tau) \geq pz(t) - z(t)$$

elde edilir. Böylece,

$$x(t-\tau) \geq \frac{p-1}{p^2} z(t)$$

veya

$$x(t-\sigma) \geq \frac{p-1}{p^2} z(t+\tau-\sigma) \tag{4.7}$$

dır. (4.1) ve (4.7) den,

$$z'(t) + \frac{M(P-1)}{P^2} Q(t) z(t+\tau-\sigma) \leq 0 \tag{4.8}$$

elde edilir. Teorem 3.2.1. den istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.2. $\sigma > \tau$, $p \in (1, \infty)$ ve $\alpha = 1$ olsun. Eğer (4.1) denklemi bir pozitif çözüme sahip ise yeterince büyük *t* ler için,

$$\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)\,ds \leq \frac{p^2}{M(p-1)} \tag{4.9}$$

dır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

İspat. Teorem 4.1.1 in ispatındaki gibi işleme devam edilirse, tekrar (4.8) ifadesi elde edilir ve (4.8) ifadesinide t den $t + \sigma - \tau$ e kadar integre eder ve $z(t)$ nin azalan olduğu kullanılırsa,

$$z(t+\sigma-\tau) + \left(\frac{M(p-1)}{p^2} \int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds - 1 \right) z(t) \leq 0 \tag{4.10}$$

elde edilir. $z(t) > 0$ olduğundan yeterince büyük *t* ler için,

$$\frac{M(p-1)}{p^2} \int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds - 1 \leq 0 \tag{4.11}$$

bulunur. (4.11) den (4.9) elde edilir.

Teorem 4.1.3. $\sigma > \tau, p \in (1, \infty)$ ve $\alpha = 1$ olsun ve (4.3) sağlansın. Eğer,

$$\int_{to}^{\infty} Q(t) \ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2} \int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds \right) dt = \infty \tag{4.12}$$

ise (4.1) denleminin her çözümü salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

İspat. $x(t)$, (4.1) denkleminin bir pozitif çözümü olsun. O halde $z(t)$ pozitif, azalan ve

$$z'(t) + \frac{M\,(p-1)}{p^2} Q\,(t)\, z(t+\tau-\sigma) \leq 0 \tag{4.13}$$

eşitsizliğini sağlamaktadır. $\lambda(t) = -z'(t) \backslash z(t)$ olsun. O halde $\lambda(t)$ sürekli ve nonnegatiftir. $z(t_1) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_o$vardır öyle ki;

$$z(t) = z(t_1)e^{\left(-\int_{t_1}^{t} \lambda(S)ds\right)}$$

dır. Ayrıca,

$$\lambda(t) \geq \frac{M\,(p-1)}{p^2}\,Q\,(t)\exp\left(\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)ds\right) \tag{4.14}$$

dır. $x > 0$ ve $r > 0$ için

$$e^{rx} \geq x + \frac{\ln(er)}{r}$$

eşitsizliği (4.14) için uygulanırsa,

$$\lambda(t) \geq \frac{M\,(p-1)}{p^2} Q(t)\exp\left(A(t)\frac{1}{A(t)}\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)ds\right)$$

$$\geq \frac{M\,(p-1)}{p^2} Q(t)\left[\frac{1}{A(t)}\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)ds + \frac{\ln(eA(t))}{A(t)}\right]$$

elde edilir ki burada,

$$A(t) = \frac{M\,(p-1)}{p^2}\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds$$

alınmıştır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\lambda(t)\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds - Q(t)\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)ds \geq Q(t)\ln\left(\frac{eM\,(p-1)}{p^2}\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)$$

ifadesi elde edilir. O halde $u > T + \sigma - \tau$ için,

$$\int_{T}^{u} \lambda(t)\left(\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)dt - \int_{T}^{u} Q(t)\left(\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)ds\right)dt$$

$$\geq \int_{T}^{u} Q(t)\ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2}\int_{t}^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)dt \tag{4.15}$$

dır. İntegrasyonun sırası değiştirilirse,

$$\int_T^u Q(t)\int_{t+\tau-\sigma}^{t} \lambda(s)dsdt \geq \int_T^{u+\tau-\sigma} \lambda(s)\left(\int_t^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)dt \qquad (4.16)$$

bulunur. (4.15) ve (4.16) dan,

$$\int_{u+\tau-\sigma}^{u} \lambda(t)\left(\int_t^{t+\sigma-\tau} q(s)ds\right)dt \geq \int_T^u q(t)\ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2}\int_t^{t+\sigma-\tau} q(s)ds\right)dt \quad (4.17)$$

ifadesi elde edilir. (4.9) ve (4.17) ifadeleri kullanılarak,

$$\int_{u+\tau-\sigma}^{u} \lambda(t) \geq \frac{M(p-1)}{p^2}\int_T^u Q(t)\ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2}\int_t^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)dt$$

veya

$$\ln\frac{z(u+\tau-\sigma)}{z(u)} \geq \frac{M(p-1)}{p^2}\int_T^u Q(t)\ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2}\int_t^{t+\sigma-\tau} Q(s)ds\right)dt$$

bulunur. (4.12) den dolayı

$$\lim_{t\to\infty}\frac{z(u+\tau-\sigma)}{z(t)} = \infty \qquad (4.18)$$

elde edilir ki buda (4.5) ile çelişir ve teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 4.1.1 $p = 2, \tau = 1, \sigma = 2, q(t) = \frac{4}{e}\left(1+\frac{1}{t}\right)$ ve $M = 1$ olmak üzere,

$$\big(x(t)+2x(t-1)\big)' + \frac{4}{e}\left(1+\frac{1}{t}\right)x(t-2)\big(1+x^2(t-2)\big) = 0, \qquad t \geq 2 \quad (4.19)$$

diferensiyel denklemi ele alınırsa açıktır ki,

$$\int_2^\infty q(t)\ln\left(\frac{eM(p-1)}{p^2}\int_t^{t+1} q(s)ds\right)dt \geq \frac{4}{e}\int_2^\infty \ln\left(1+ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right)dt = \infty$$

dır. Teorem 4.1.3 den (4.19) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

Teorem 4.1.4. $\sigma \geq \tau,\ p \in (1,\infty),$ ve $\alpha = 1$ olsun. $k > 0$ olacak şekilde bir k sabiti vardır öyle ki;

$$\frac{1}{e} \leq \int_{t-\sigma+\tau}^{t} Q(s)ds < k \tag{4.20}$$

dır. Bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

İspat. Teorem 4.1.3 ün ispatında olduğu gibi işleme devam edilirse, görülür ki $z(t)$ pozitiftir, azalandır ve (4.13) ü sağlar. Ayrıca (4.13) için genelleştirilmiş karakteristik eşitsizliği,

$$\lambda\,(t) \geq \frac{M\,(p-1)}{p^2}\;Q\,(t)\exp\left(\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} \lambda(s)ds\right) \tag{4.21}$$

olur. Eğer $B(t) = \exp\left(e\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} Q(s)ds\right)$ olduğu kabul edilirse yukarıdaki eşitsizlik

$$B(t)\lambda\,(t) \geq \frac{M\,(p-1)}{p^2} B(t)Q(t)\exp\left(\frac{B(t)}{B(t)}\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} \lambda(s)ds\right)$$

şeklinde yazılabilir.

$$e^{\frac{x}{r}} \geq 1+\frac{x}{r^2} \quad , \quad x \geq 0 \ \ , r > 1$$

eşitsizliğinden;

$$B(t)\,\lambda\,(t) - Q(t)\frac{M\,(p-1)}{p^2}\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} \lambda(s)ds \geq Q(t)A(t)$$

elde edilir ki burada $A(t) = \frac{M\,(p-1)}{p^2} B(t)$ dır. Bu durumda $u > T+\sigma-\tau$ için,

$$\int_{T}^{u} \lambda(t)\;B(t)dt - \int_{T}^{u} Q(t)\frac{M\,(p-1)}{p^2}\left(\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} \lambda(s)ds\right)dt \geq \int_{T}^{u} Q(t)\;A(t)dt \tag{4.22}$$

dır. İntegrasyon sırası değiştirilirse,

$$\int_{T}^{u} Q(t)\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} \lambda(s)ds\,dt = \int_{T}^{u+t-\sigma} \lambda(t)\left(\int_{t_{+\tau-\sigma}}^{t} Q(s)ds\right)dt \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.22) ve (4.23) den,

$$\int_T^u \lambda(t)\, B(t)dt - \frac{M\,(p-1)}{p^2}\int_T^{u+\tau-\sigma} \lambda(t)\left(\int_{t+\tau-\sigma}^t Q(s)ds\right)dt \geq \int_T^u Q(t)\, A(t)dt$$

bulunur ve böylece,

$$B(t) = \exp\left(e\int_{t+\tau-\sigma}^t Q(s)ds\right) \geq \int_{t+\tau-\sigma}^t Q(s)ds$$

olduğundan,

$$\int_T^u \lambda(t)\, B(t)dt + \int_{t+\tau-\sigma}^T \lambda(t)B(t)dt \geq \int_T^u Q(t)\, A(t)dt \qquad (4.24)$$

olur. Diğer yandan $k_1 > 0$ için $e \leq B(t) < k_1$ olduğundan (4.24) den,

$$\int_{u+\tau-\sigma}^u \lambda(t)dt \geq \frac{1}{k_1}\int_T^u Q(t)\, A(t)dt$$

elde edilir. (4.20) eşitsizliğinden yukardaki eşitsizliğin sağ tarafında ki integral $u \to \infty$ iken ıraksak olur. Bunun anlamı Teoremin ispatı Teorem 4.1.3 e benzerdir.

Örnek 4.1.2

$$\big(x(t) + 5x(t-1)\big)^{\cdot} + \frac{1}{4}x(t-3)\big(1 + x^2(t-3)\big) = 0 \quad , t \geq 3 \qquad (4.25)$$

neutral diferansiyel denkleminde $\tau = 1\,, \sigma = 3\,,\ q(t) = \frac{1}{4}$ ve $M = 1$ olmak üzere görülüyor ki

$$\frac{1}{e} \leq \int_{t-2}^t \frac{1}{4}ds = \frac{1}{2} < k = 1$$

ve hatta;

$$\int_{t_0}^\infty Q(s)\exp\left(e\int_{t+\sigma-\tau}^t Q(s)ds\right)dt = \int_{t_0}^\infty \frac{1}{4}e^{\frac{e}{2}}dt = \infty$$

olur. Bu durumda Teorem 4.1.4 ün hipotezleri sağlanmıştır. O halde (4.25) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

Teorem 4.1.5. $\alpha > 1$, $\sigma > \tau$ ve $p \in (1, \infty)$ olsun. Ek olarak bir sürekli diferensiyellenebilir $\varphi(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki;

$$\varphi'(t) > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty \tag{4.26}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi'(t+\tau-\sigma)}{\varphi'(t)} < \frac{1}{\alpha} \tag{4.27}$$

$$\liminf_{t\to\infty} \left[M\left(\frac{p-1}{p^2}\right)^{\alpha} Q(t) \frac{e^{-\varphi(t)}}{\varphi'(t)} \right] > 0 \tag{4.28}$$

olsun. Bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

İspat. Teorem 4.1.3 ün ispatındaki gibi işlem yaparak $z(t)$ nin pozitif olduğu ve aşağıdaki eşitsizliği sağladığı görülür,

$$z'(t) + M\left(\frac{p-1}{p^2}\right)^{\alpha} Q(t) z^{\alpha}(t+\tau-\sigma) \le 0 \tag{4.29}$$

(4.26) ve (4.27) den görülür ki,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\alpha\varphi(t+\tau-\sigma)}{\varphi(t)} < 1 \tag{4.30}$$

dir. Şimdi (4.27) ve (4.30) dan, $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon > 0$ ve $T \ge t_0$ vardır öyle ki; $t \ge T$ için,

$$\frac{(1+\varepsilon)\alpha\varphi'(t+\tau-\sigma)}{\varphi'(t)} < \gamma \ \text{ ve } \ (1+\varepsilon)\frac{\alpha\varphi(t+\tau-\sigma)}{\varphi(t)} \le \gamma \tag{4.31}$$

olur. (4.28) den $T_0 > T$ seçilebilir öyle ki; $t \ge T_0$ için,

$$M\left(\frac{p-1}{p^2}\right)^{\alpha} Q(t) \ge \varphi'(t) e^{\frac{\alpha\varphi(t)}{1-\alpha}} \tag{4.32}$$

dır. Şimdi $p(t) = \varphi'(t)\exp\left(\frac{\alpha\varphi(t)}{1-\alpha}\right)$ olsun. Tang'ın 2002 yılında yaptığı çalışmasındaki Teorem 2 den (4.29) eşitsizliği yerine aşağıdaki eşitliği ele almak yeterlidir.

$$z'(t) + p(t) z^{\alpha}(t+\tau-\sigma) \le 0 \tag{4.33}$$

$t \to \infty$ iken $z(t) \to 0$ olduğunu görebilmek için ilk olarak $z(t+\tau-\sigma) \geq z(t\,)$ olduğu gösterilmelidir. Böylece,

$$z'(t) + p(t)z^{\alpha}(t) \leq z'(t) + p(t)z^{\alpha}(t+\tau-\sigma) \leq 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{z'(t)}{z^{\alpha}(t)} \leq -p(t)$$

olduğu görülür. Bu ifadenin integrali alınırsa $t \to \infty$ iken,

$$[z^{1-\alpha}(t) - z^{1-\alpha}(T)]/(1-\alpha) \to -\infty$$

olur. Buda gösterir ki $z^{1-\alpha}(t) \to +\infty$ olur ve $z(t) \to 0$ dır. Böylece, bir $T_1 > T_0$ vardır öyle ki; $t \geq T_1$ için,

$$0 < z(t) < 1 \quad \text{ve} \quad z'(t) \leq 0$$

dır. $t \geq T_2 = T_1 + \sigma - \tau$ için $y(t) = -ln\, z(t)$ olmak üzere $t \geq T_2$ için $y(t) > 0$ olduğu görülür ki; (4.33) den $t \geq T_2$ için,

$$y'(t) \geq p(t)e^{\,y(t)-\alpha y(t-\sigma+\tau)}$$

olur. Teorimin ispatının bundan sonraki kısmı Tang'ın 2002 yılında yaptığı çalışmasındaki Teorem 1 in ispatına benzerdir. Buda ispatı tamamlar.

Örnek 4.1.3

$$\big(x(t) + 2x(t-1)\big)' + e^{3t+e^{2t}}x^3(t-3) = 0 \quad ,t \geq 2 \qquad (4.34)$$

neutral diferensiyel denkleminde $p = 2 \;\; \tau = 1\,, \sigma = 2\,,\; Q(t) = e^{3t+e^{2t}}$ ve $M = 1$ olmak üzere $\varphi(t) = e^{2t}$ ise Teorem 4.1.5. in bütün hipotezleri sağlanır ve (4.34) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır(Graef, Savithri, Thandapani 2004).

4.2. Birinci Mertebeden Homogen Olmayan Neutral Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Salınımlılığı için Gerek ve Yeter Şart

Bu kısımda,

$$\frac{d}{dx}\big(x(t) - px(t-\tau)\big) + Q(t)G\big(x(t-\tau)\big) = f(t) \tag{4.35}$$

homojen olmayan neutral gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlılığı için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Bu eşitlikte $f, Q \in C\big([T,\infty),(0,\infty)\big)$, $\sigma,\tau \in (0,\infty), 0 \le p < 1$ ve $G: R \to R$ öyle ki; $x \neq 0$ için $xG(x) > 0$ olmak üzere G azalmayan, Lipschitz şartını sağlayan ve her $K > 0$ için $\int_0^K \frac{dx}{G(x)} < \infty$ olacak şekilde bir fonksiyon olmak üzere eğer $0 \le p < 1$ ise (4.35) denkleminin her çözümü salınımlıdır ya da asimtotik olarak sıfırdır ancak ve ancak

$$\int_T^\infty Q(s)ds = \infty$$

dur.

Eğer $G(x) = x^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$ durumunda her $K > 0$ için G fonksiyonu,

$$\int_0^{\pm K} \frac{dx}{G(x)} < \infty$$

eşitsizliğini sağlarsa, (4.35) denklemine genelleştirilmiş-sublineer denklem denir. Benzer olarak $G(x) = x^\alpha,\ \alpha > 1$ durumunda her $K > 0$ için G fonksiyonu,

$$\int_{\pm K}^{\pm\infty} \frac{dx}{G(x)} < \infty$$

eşitsizliğini sağlarsa, (4.35) denklemine genelleştirilmiş-superlineer denklem denir.

Teorem 4.2.1. $Q \in C\big([0,\infty),\ (0,\infty)\big)$, $G: R \to R$ ve $xG(x) > 0,\ x \neq 0$, G azalmayan ve her $K > 0$ için,

$$\int_0^{\pm K} \frac{dx}{G(x)} < \infty \tag{4.36}$$

olsun. Eğer $0 \leq p < 1$, $\tau \in (0, \infty)$ ve

$$\int_0^{\infty} f(x) < \infty \tag{4.37}$$

ise

$$(x(t) - px(t-\tau))' + Q(t)G\big(x(t-\tau)\big) = f(t) \tag{4.38}$$

denkleminin çözümünün salınımlı ya da asimtotik olarak sıfıra yaklaşması için gerek ve yeter şart,

$$\int_0^{\infty} Q(s)ds = \infty \tag{4.39}$$

olmasıdır(Das, Misra 1997).

İspat. (4.39) sağlansın ve $x(t)$, (4.38) ün bir çözümü olsun. Eğer $x(t)$ salınımlı ise ispatlanacak bir şey yoktur. $x(t)$ salınımlı olmasın. Yani $t_0 \geq 0$ olmak üzere $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ya da $x(t) < 0$ olacaktır. Burada amaç $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğunu göstermektir. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t) < 0$ ise (4.38) den $z(t) = x(t) - px(t-\tau)$ olmak üzere $t \geq t_0 + \sigma$ için $z'(t) > 0$ olur. Sonuç olarak $t \geq t_1 \geq t_0$ için $z(t) > 0$ veya $z(t) < 0$ dır. Eğer $z(t) > 0$ ise $t \geq t_1$ için,

$$x(t) > px(t-\tau) \tag{4.40}$$

olur.

$$-\beta = max\, x(t), \qquad t_1 < t < t_1 + \tau$$

olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için bir $N > 0$ tam sayısı vardır öyle ki;

$$\beta p^n < \varepsilon, \quad n \geq N$$

olduğu görülür. $T = t_1 + N\tau$ olarak düzenlenecek olursa o halde $t \geq T$ için,

$$x(t) > px(t-\tau) > p^2 x(t-2\tau) > \cdots > p^N x(t-N\tau) > -\varepsilon$$

olur. Böylece $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ dır. Eğer $t \geq t_1$ için $z(t) < 0$ ise $z'(t) > 0$ dır. Sonuç olarak

$$z(t) > z(t-\sigma) = x(t-\sigma) - px(t-\tau-\sigma) > x(t-\sigma)$$

eşitsizliğinden ve G nin azalmayan oluşundan görülür ki,

$$z'(t) + Q(t)G\big(z(t)\big) \geq z'(t) + Q(t)G\big(z(t-\sigma)\big) = f(t) \geq 0$$

dır. Bu eşitsizlik $G\big(z(t)\big)$ ile bölünür ve $G\big(z(t)\big) < 0$ olduğundan,

$$\frac{z'(t)}{G\big(z(t)\big)} + Q(t) \leq 0$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin *T* den t ye kadar integrali alınırsa elde edilen sonuç üzerinde (4.36) ve (4.39) kullanırsa bir çelişkiyle karşılaşılır.

$x(t) > 0$, $t \geq t_1$ olsun. Bu durumda $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ olduğu gösterilecektir.

$$Y(t) = x(t) - px(t-\tau) - \int_0^t f(s)ds$$

olmak üzere (4.38) den $Y(t)$ nin,

$$Y'(t) + Q(t)G\big(z(t-\sigma)\big) = 0 \qquad (4.41)$$

eşitliğini sağladığı görülür. Böylece $Y'(t) < 0$ dır. Sonuçta $t \geq t_1$ olmak üzere yeterince büyük *t* ler için $Y(t) < 0$ veya $Y(t) > 0$ olur. Eğer $Y(t) > 0$ ise $Y'(t) < 0$ olması $Y(t)$ nin sınırlılığını gösterir. (4.41) nin *T* den *t* ye kadar integrali alnır ve $Y(t)$ sınırlı olduğundan,

$$\int_T^\infty Q(t)G\big(x(t-\sigma)\big)dt < 0 \qquad (4.42)$$

elde edilir. Tekrar $Y(t-\sigma) > 0$, $t \geq t_1 + \sigma$ olduğundan,

$$x(t-\sigma) \geq \int_0^{t-\sigma} f(s)ds \ , \qquad t \geq t_1 + \sigma$$

olur ve sonuç olarak,

$$G\big(x(t-\sigma)\big) \geq G\left(\int_0^{t-\sigma} f(s)ds\right)$$

bulunur. Buradan,

$$\int_T^\infty Q(t)G\big(x(t-\sigma)\big)dt = 0$$

dır. Bu da (4.42) ile çelişir. Diğer bir yandan eğer $Y(t) > 0\ ,\ t \geq t_1$ ise,

$$x(t) < px(t-\tau) + \int_0^t f(s)ds < px(t-\tau) + \int_0^\infty f(s)ds = px(t-\tau) + M \quad (4.43)$$

olur. Burada,

$$M = \int_0^\infty f(s)ds$$

dır. (4.43) da *t* sırasıyla $t-\tau\,, t-2\tau\,, \dots\,, t-n\tau$ ile yer değiştirilirse son eşitsizlik kullanılarak,

$$\begin{aligned} x(t) &< px(t-\tau) + M \\ &< p(px(t-2\tau) + M) + M = p^2x(t-2\tau) + pM + M \\ &< p^2[px(t-3\tau) + M] + pM + M \\ &< p^3x(t-3\tau) + p^2M + pM + M \\ &\qquad \cdots \\ &< p^nx(t-n\tau) + p^{n-1}M + p^{n-2}M + \cdots + pM + M \end{aligned}$$

elde edilir. Yani,

$$x(t) < p^nx(t-n\tau) + M\sum_{i=0}^{n-1} p^i$$

olur.

$\sum_{i=0}^{\infty} p^i$ geometrik serisinin yakınsak olması x(t) nin sınırlılığını gerektirir. Görülür ki $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır. Aksi takdirde bir $T_0 > t_1$ vardır buda $\liminf_{t\to\infty} x(t) = \delta > 0$

olmasını gerektirir öyle ki, $t > T_0$ için $x(t-\sigma) > \frac{\delta}{2}$ dir. (4.40) nın T_0 dan t ye kadar integrali alınırsa,

$$\int_{T_0}^{t} Y'(s)ds + \int_{T_0}^{t} Q(s)G\big(x(s-\sigma)\big)ds = 0$$

elde edilir ki buda $t \to \infty$ iken $Y(t) \to -\infty$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $x(t)$ sınırsızdır. Bu bir çelişkidir. Böylece $\liminf_{t\to\infty} x(t) = 0$ dır.

$$\limsup_{t\to\infty} x(t) = \mu \geq 0$$

olsun. Eğer $\mu \geq 0$ ise aşağıdaki sonuçlara ulaşılır. Tanımdan, $\langle t_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ şeklinde bir reel değerli ıraksak dizi vardır öyle ki, $t \to \infty$ iken $x(t_n) \to \mu$ olur. x(t) sınırlı olduğundan reel sayıların sınırlı bir dizisi olan $\langle x(t_n - 1)\rangle_{n-1}^{\infty}$ dizisinin $\mu_1 \in [0, \mu]$ olmak üzere bir yakınsak $\langle x(t_{n_k} - 1)\rangle$ alt dizisi vardır. Şimdi $z'(t) = x(t) - px(t-\tau)$ olmak üzere,

$$\lim_{k\to\infty} z\big(t_{n_k}\big) = \lim_{k\to\infty} (x\big(t_{n_k}\big) - px\big(t_{n_k} - \tau\big)$$

$$= \lim_{k\to\infty} (x\big(t_{n_k}\big) - p \lim_{k\to\infty} (x\big(t_{n_k} - \tau\big)$$

$$= \mu - p\mu_1 \geq \mu(1-p) > 0 \qquad (4.44)$$

olduğu görülür. Bu da gösterir ki $\limsup_{t\to\infty} z(t) = \mu(1-p) > 0$ dır. Kolaylık olması açısından,

$$\limsup_{t\to\infty} z(t) = \alpha$$

alınacaktır. $\lim_{t\to\infty} inf\, x(t) = 0$ ise reel sayıların bir $\langle t'_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ ıraksak dizisi vardır öyle ki; $n \to \infty$ iken $s(t'_n) \to 0$ dır. Sonuç olarak, reel sayıların $\langle x(t'_n - 1)\rangle$ sınırlı dizisi $0 \leq \lambda \leq$ µ olmak üzere λ reel sayısına yakınsayan reel sayıların yakınsak bir $\langle x(t'_n - 1)\rangle_{k=1}^{\infty}$ alt dizisine sahiptir. Böylece,

$$\lim_{k\to\infty} z\big(t'_{n_k}\big) = \lim_{k\to\infty} z\left(x\big(t'_{n_k}\big) - px\big(t'_{n_k} - \tau\big)\right)$$

$$= -p\lambda \leq 0$$

dır. Buda $\lim_{t\to\infty} inf\, x(t) = 0$ olduğunu gösterir. β pozitif olmayan bir reel sayı olmak üzere,

$$\liminf_{t\to\infty} z(t) \le \beta$$

olsun. Limit supremumun tanımından reel sayıların iki tane $\langle s_n\rangle_{n=1}^{\infty}$ ve $\langle s_n'\rangle_{n=1}^{\infty}$ gibi ıraksak dizisi vardır öyle ki $n \to \infty$ iken $z\langle s'\rangle_{n-1}^{\infty} \to \alpha$ ve $z(s_n) \to \beta$ dır. Genellikten bir şey kaybetmeksizin, her n için $s_n < s_n'$ olsun. *N* yeterince büyük alınırsa, öyle ki,

$$z(s_n') - z(s_n) \ge \frac{\alpha-\beta}{2}, \;\; n \ge N, \tag{4.45}$$

olur. $x(t)$ sınırlı olduğundan *z*(t) de sınırlıdır. (4.38) ün T_0 dan *t* ye kadar integrali alınır ve(4.37) kullanılarak,

$$\int_{T_0}^{\infty} Q(s)G(x(s-\sigma)ds) < \infty \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.37) ve (4.46) dan bir $T \ge T_0$ vardır öyle ki;

$$\int_{T_0}^{\infty} Q(s)G(x(s-\sigma)ds) < \frac{\alpha-\beta}{8}$$

ve

$$\int_{T_0}^{\infty} f(s)\, ds < \frac{\alpha-\beta}{8}$$

dır. $n \ge N_0 \ge N$ için s_n' , $s_n > T$ olsun. (4.38) ün $n \ge N_0$ için s_n den s_n' ye kadar integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\alpha-\beta}{2} &\le |z(s_n') - z(s_n)| \\ &\le \left|\int_{s_n}^{s_n'} Q(s)G(x(s-\sigma)ds)\right| + \left|\int_{s_n}^{s_n'} f(s)(ds)\right| \\ &\le \frac{\alpha-\beta}{8} + \frac{\alpha-\beta}{8} = \frac{\alpha-\beta}{4}\end{aligned}$$

olduğu görülür ki buda bir çelişkidir. O halde,

$$\limsup_{t\to\infty} z(t) = 0$$

dır. Burada $t \to \infty$ iken $x(t) \to 0$ dır. Buda ispatı tamamlar.

Gerek Şart: Aksine,

$$\int_0^\infty Q(s)\, ds = \infty$$

olsun ve yeterince büyük bir T için;

$$\int_T^\infty f(s)\, ds < \frac{1-p}{10} \qquad \text{ve} \qquad K\int_0^\infty \theta(s)\, ds < \frac{1-p}{5}$$

burada K, $\left[\frac{1-p}{10}\ ,\ 1\right]$ de G bir Liptschitz sabitidir.

$[T,\infty)$da süpernorm ile birleşmiş olan $f \in C\big([T,\infty),(-\infty,\infty)\big)$ fonksiyonlarının Banach uzayı $C_b[T,\infty)$ şeklinde tanımlansın. O halde

$$R\big(y(t)\big) = py(1-\tau) + \frac{1-p}{5} + \int_0^\infty \theta(s)G\big(y(s-\sigma)\big)\, ds - \int_t^\infty f(s)\, ds, \quad t > T$$

olmak üzere $R: S \to S$ operatörü tanımlansın. Burada S tüm $g \in C_b[T,\infty)$ fonksiyonlarının bir kümesi öyle ki;

$$\frac{1-p}{10} \le g(t) \le 1$$

dir. Herhangi bir $g \in S$ için

$$R\big(g(t)\big) \le p + \frac{1-p}{5} + \frac{1-p}{5} = 1$$

ve

$$R\big(g(t)\big) \ge \frac{1-p}{10}p + \frac{1-p}{5} - \frac{1-p}{10} > \frac{1-p}{10}$$

olduğunu görmek kolaydır.

Bu $R(g(t)) \in S$ olduğunu gösterir ve böylece R, S den S ye bir dönüşümdür. Şimdi her $g, h \in S$ için,

$$\|R_g - R_h\| = \sup_{t \geq T} |R(g(t)) - R(h(t))|$$

$$\leq p \sup_{t \geq T} |g(1-\tau) - h(1-\tau)|$$

$$+ \sup_{t \geq T} \int_0^\infty Q(s) \left|G(g(s-\sigma)) - G(g(s-\sigma))\right| ds$$

$$\leq p \sup_{t \geq T} |g(t) - h(t)|$$

$$+K \sup_{t \geq T} (|g(t) - h(t)|) \int_t^\infty Q(s)\, ds$$

$$\leq p\|g-h\| + \left(K \int_0^\infty Q(s)\, ds\right) \|g-h\|$$

$$= \left(p + \tfrac{1-p}{5}\right) \|g-h\|$$

bulunur. Bu gösterir ki R bir toplam dönüşümüdür ve böylece S de bir sabit nokta olan $w(t)$ yi içerir, yani,

$$w(t) = pw(t-\tau) + \frac{1-p}{5} + \int_t^\infty Q(s) G\left(w(s-\sigma)\right) ds - \int_t^\infty f(s) ds$$

denklemi

$$\left(w(t) - pw(t-\tau)\right)' + Q(t) G\left(w(s-\sigma)\right) = f(t)$$

ifadesine denktir. Böylece $\frac{1-p}{10} \leq w(t) \leq 1$ özelliğini sağlayan $w(t)$ çözümü ne salınımlıdır ne de asimtotik olarak sıfıra yaklaşır. Buda teoremin ispatını tamamlar.

Örnek 4.2.1. $\left(1 - \frac{e^\tau}{2}\right) > 0$ olmak üzere,

$$\left(x(t) - \frac{1}{2} x(t-\tau)\right)' + x^{\frac{1}{3}}(t-\tau) = e^{-1}\left(1 - \frac{e^\tau}{2}\right) + e^{\left(\frac{1}{3}\right)((t-\tau))}$$

olsun. Bu denklem Teorem 4.2.1 in hipotezlerini sağlar. Açıktır ki $x(t) = e^{-t}$ ifadesi bu denklemin bir çözümüdür.

Bu örnekte $p \geq 1$ için Teorem 4.2.1 bir sonuç vermez. Aşağıdaki örnek bu amca uygundur(Das, Misra 1997).

Örnek 4.2.2. $\tau, \sigma \in (0, \infty)$ olsun. $p \geq e^{\tau}$ olmak üzere,

$$\big(x(t) - px(t-\tau)\big)' + e^{\sigma}(e^{-2t} + \mathrm{p}e^{\tau} - 1)x(t-\tau) = e^{\sigma-1}$$

denkleminin bir çözümü $\mathrm{x(t)} = e^{\tau}$ dir. Bu çözüm ne salınımlıdır ne de asimtotik olarak sıfıra gider(Das, Misra 1997).

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. and Saker, S.H., 2001, "Oscillation of solution to neutral delay differential equations with positive and negative coefficients", Int. J. Differ. Equ. Apl., 2, 449-465.

Arino, O.I., and Jawhari, A.,.1984 "Oscillation critera in delay equations", Journal of Differential Equations 53, 115-12.

Bainov, D. and Mishev, D.P., 1991, "Oscilations Theory for Neutal Differential Equations with Delay", Adam Hilger, New York.

Cheng, Y., 1990, "Oscillation in nonautomous scalar differential equations with deviating arguments", Proc. Amer. Math. Soc., 110, 710-719.

Erbe, L.H., Kong, Q. and Zhang, B.G., 1995, "Oscilletion Theory of Differential Equations", Marcel Dekker, New York.

Das, P., 1993, "A note a paper of Shreve", J. Math. Phys. Sci., 27, 219-224

Das, P., 1993, "Oscillation of order delay differential equations", Proc. IndianAcad. Sci., 103, 342-347.

Das, P., and Misra, N., 1997, "A necessary and sufficent condition for the solutions of a functional differential equation to be oscillatory or tend to zero", J. Math. Anal. Appl., 204, 78-87.

Gopalsamy, K., Lalli, B.S., and Zhang, B.G., 1992, "Oscillations of odd order neotral differential equations", Czech. Math. J., 42, 313-323.

Grammatikopoulas, M.K., Grove, E.A., and Ladas, G., 1986, "Oscilations of first order neutral delay diferential equations", J. Math. Anal. Appl., 120, 510-520.

Greaf, J.R., Grammatikopoulos, M.K., and Spikes, P.W., 1991, **"**Asymptotic and oscillatory behavior of solutions of first order nonlinear neutral delay diferential equations", J. Math. Anal. Appl., 155, 562-571.

Greaf, J.R., Grammatikopoulos, M.K., and Spikes, P.W., 1993, "Asymptotic and nonoscillatory behavior of solutions of first order nonlinear neutral delay diferential equations of arbitrary order", Nonlinear Anal, 21, 3-42.

Greaf, J.R., Savithri, R., Thandapani E., 2004, "Oscillation of first order neutral delay differantial equations", 12, 1-11.

Györi, I., 1986, "Oscillations condition in scalar linear delay differential equations", Bull.Austral Math.Soc., 34, 1-9.

Györi, I. and Ladas, G, 1991, “Oscillation Theory of Delay Differential Equations”, Clarendon Press, Oxford.

Hunt, B.R., and Yorke, J.A., 1984, “When all solutions of $x' = \sum_{j=1}^{n} q_j(t)\, x(t - T_j(t))$ oscillate”, J. Diferential Equations, 53, 139-145.

Jaros, J., and Stavroulakis, I.P., 1994, “Necessary and sufficient conditions for oscillation of differential equations with several delays”, Utilitas Mathematica 45, 187-195.

Koplatadze, R.G., and Chanturia, T.A., 1982, “On the oscilatory and monotone solutions of the first order diferential equations with deviating argument”, Diferencial’nye Uravnenija 18, 1463-1465.

Kwong, M.G., 1991, “Oscillations of first order delay equations”, J.Math. Anal. Appl. 156, 274-286.

Ladas, G., 1979,”Sharp condition for the oscillations caused by delays”, Aplplicable Analysis, 9, 93-98.

Ladas, G., and Stavroulakis, I.P., 1982, “Oscillations caused by several retarded and advanced arguments”, Diferential equations 44, 134-152.

Ladas, G., Sficas, Y.G., and Stavroulakis, I.P., 1983, “Necessary and sufficient for oscillations”, American Mathematical Monthly, 90, 247-53.

Ladas, G., Philos, Ch.G. and Sficas, Y.G.,.1989, “Sharp condition for the oscillations of delay difference Equations”, Journal of Applied Mathematics and Simulations, 2; 101-112.

Ladas, G. and Sficas, T.G., 1984, “Oscillations of neutral differential equations with positive and negative coefficients”, Procceding of the İnternational Conference on Qualitative Theory of Differential Equations, University of Alberta, pp. 232-240.

Ladas, G., and Stavroulakis, I.P., 1982, “Oscillations caused by several retarded and advanced arguments”, Diferential equations 44, 134-152.

Ladde, G.S., Laksmikantam, V., and Zhang, B.G., 1987, “Oscillations Theory of Delay Differential Equations with deviating arguments”, Mark Dekker, New York.

Ladas, G., and Qian, C., 1990, “Oscillation in differential equations with positive and negative coefficient”,Canad. Math. Bull. 33, 442-451.

Li, B., 1996, “Oscillation of first order delay differential equations”, Proc. Amer. Math. Soc., 124, 3729-3737.

Li, B., 1995, “Oscillations of delay differential equations with variable coefficients”, J. Math. Anal. Appl., 192, 312-321.

Li, W.T. and Saker, S.H., 2001, “Oscillations of neutral delay differential equations with applications”, Ann. Poln. Math. 77, 39-51.

Özer, M.N. ve Eser, D., 2002, “Diferensiyel denklemler teori ve uygulamaları”, Birlik Ofset, Eskişehir.

Tanaka, S., 2000, “Oscillatory and nonoscillatory solutions of neutral differential equations”, Ann. Poln. Math. 73, 169-184.

Tanaka, S., 2002 “Oscillation of first order neutral delay differential equations”, Hiroshima, Math J. 32, 79-85.

Tang, X.H., 2002, “Oscillation for first order superlinear delay differential equations”, J. London Math. Soc., (2) 65, 115-122.

Tang, X.H. and Yu, J.S., 2000, “Oscillation for first order delay differential equations”, J. Math. Anal. Appl., 248, 247-259.

Tramov, M.I., 1975, “Condition for the oscillatory solitions of first order differential equations with a delayed argument”, Izvestiye Vysshikh Uchebnyk Zavedenii Seriya Mathematika, 19, 92-96**.**

Yu, J.S., Zhang, B.G. and Qion.X.Z., 1993, “Oscillations of delay differential equations with oscillating coefficients”, J. Math. Anal. Appl., 177; 432-444.

Yu, J.S., Zhang, B.G. and Qion.X.Z., 1994, “Oscillations of delay differential equations”, Applicable Analysis , 53; 117-124.

Yu, J.S. and Tang, X.H., “Sufficient conditions for oscillations oflinear delay difference equations with oscilliating coefficients”, J. Math. Anal. Appl., 250, 735-742

Zhang, B.G., and Gopalsmy, K., 1988, “Oscillation and nonoscillation in a nonautomous delay logistic equations”, Quart. Appl Math, 46, 267-273.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gürkan CUNDA

Doğum Yeri : Fethiye/MUĞLA

Doğum Tarihi : 20.11.1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

İlköğretim : Fethiye Merkez Atatürk İlköğretim Okulu 1996-1999

Lise : Fethiye Lisesi 1999-2002

Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi 2003-2007

Yüksek lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi 2008-

Çalıştığı Kurum/kurumlar ve Yıl

1. Sınav Dershanesi 2007-2008
2. Gölcük Dershanesi 2008-

Yayınlar (SCI ve diğer)

Diğer Konular