KESİRLİ TÜREVLER VE
KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yadigâr Leyla YURT

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KESİRLİ TÜREVLER VE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

Yadigâr Leyla YURT

DANIŞMAN
Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2010

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM danışmanlığında Yadigar Leyla YURT tarafından hazırlanan "Kesirli Türev ve Kesirli İntegral Operatörler" başlıklı bu çalışma, lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca ...06.2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Linans Tezi olarak oy birliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Yrd.Doç.Dr. Murat PEKER	
Danışman	Doç.Dr. Hüseyin YILDIRIM	
Üye	Doç.Dr. Özkan ÖCALAN	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../...... tarih ve
....../...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan ÜNAL
Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ TÜREVLER VE KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRLER

Yadigâr Leyla YURT

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde bu çalışma için kısa bir giriş, ikinci bölümde çalışmamız için gerekli olan tanım ve temel teoremler, üçüncü bölümde Kesirli Türevler ve Kesirli İntegraller ele alındı. Dördüncü bölümde Kesirli İntegral Operatörler verildi.

2010, 54 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Maksimal Fonksiyon, Riesz Potansiyeli, Kesirli Türevler, Kesirli İntegraller, İntegral Operatör

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FRACTIONAL DERIVATIVES AND FRACTIONAL INTEGRAL OPERATORS

Yadigâr Leyla YURT

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Hüseyin YILDIRIM

This thesis consists of four chapters. In the first chapter an introduction for this study have given, in the second chapter, all the necessary definitions and basic theorems for this study have given. In the third chapter, Fractional Derivates and Fractional Integrals have given, in the fourth chapter, Fractional Integral Operators have given.

2010, 54 Page

KEY WORDS : Maximal Functions, Riesz Potential, Fractional Derivative, Fractional Integral, Integral Oparators

TEŞEKKÜR

Master eğitimim süresince engin bilgisi ve titiz çalışma prensibiyle bana örnek olan ve yol gösteren, çalışmamın her aşamasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyerek bana destek olan ve ufkumu genişleten danışman hocam Sayın Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, eğitim-öğretim hayatım boyunca büyük bir sabır gösterip maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen babam Recep YURT ve annem Emine YURT'a, tezimin her safhasında yanımda olup manevi desteği ile hep yanımda olan Vahid POURGOLZARİ 'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yadigâr Leyla YURT

AFYONKARAHİSAR, Haziran 2010

Simgeler

S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre yüzeyi
$\Im$	Schwarz Uzayı
Γ	Gamma Fonksiyonu
$f * g$	f ile g fonksiyonlarının konvolüsyonu
τ	Genişleme Operatörü
Mf	f nin Maksimal Fonksiyonu
M	Maksimal Operatör
$K(x)$	Riesz Potansiyelinin Çekirdeği
$Ff, \widehat{f}$	f fonksiyonunun Fourier Dönüşümü
Δ	Laplace Operatörü
$B(z,w)$	Beta Fonksiyonu
I_α	Riesz Potansiyel Operatörü
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu Öklid Uzayı
k_α	Riesz Çekirdeği
$L^p(\mathbb{R}^n)$	Mutlak değeri p inci mertebeden integrallenebilen fonksiyonların cümlesi

1. GİRİŞ

Keyfi mertebeli diferensiyel ve integrasyon kavramları, tamsayı mertebeli türev ve n-katlı integralleri birleştiren ve genelleştiren kavramlardır. Bu kavramlar, 17. yüzyıldan itibaren Leibniz, Euler, Lagrange, Abel, Liouville ve diğer bir çok matematikçinin, kesirli mertebe için diferensiyel ve integrasyonun genelleştirilmesine dayanan öncü çalışmalarıyla gelişmeye başlamıştır.

Kesirli diferensiyel teorisi çeşitli madde ve işlemlerin kalıtsal özelliklerinin tanımlanmasında kullanılabilecek çok iyi bir araçtır. Bu ise, tamsayı mertebeli türevlerle karşılaştırıldığı zaman, kesirli türevler için önemli bir avantajdır. Kesirli türevlerin bu avantajı nesnelerin mekanik ve elektriksel özelliklerinin matematiksel modellemelerinde, akışkanlar teorisinde, elektrik devrelerinde, elektro-analitik kimyada olduğu gibi diğer bir çok alanda kullanılmaktadır.

Burada ele alacağımız kesirli integraller, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > 0$$

şeklinde ifade edilen Abel integral denklemine dayanmaktadır [Samko 1993].

Kesirli integraller,

$$\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (x-t)^{n-1} \varphi(t)\, dt$$

şeklindeki $n-$katlı integraller yardımıyla ifade edilmektedir. Bu eşitlik yardımıyla elde edilecek olan,

$$(I_{a+}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \qquad x > a \tag{1.1}$$

$$(I_{b-}\varphi)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \qquad x < b \tag{1.2}$$

ifadelerine α. mertebeden kesirli integraller denir. Bu integraller bazen sırasıyla sağ ve sol taraflı kesirli integraller olarak da adlandırılırlar. Bu integraller için bir adlandırma da Riemann-Liouville kesirli integraller şeklindedir [Samko 1993].

Buradaki (1.1) ifadesi $0 < \alpha < 1$ için bir Abel integral denklemidir. Bu integral denklemi yardımıyla, $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}, \tag{1.3}$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{x}^{b} \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}}, \tag{1.4}$$

şeklinde ifade edilen eşitliklere, f fonksiyonunun α. mertebeden sırasıyla sağ ve sol kesirli türevleri denir [Samko 1993].

Diğer yandan, Riesz potansiyeli adı altında tanımlanmış olan

$$\begin{aligned} I_{\alpha}(f) &= \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{R^n} \frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}} dy, \qquad 0 < \alpha < n \\ \sigma(\alpha) &= \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})} \end{aligned} \tag{1.5}$$

integral, ilk olarak 1949 yılında Riesz tarafından incelenmiştir [Riesz 1949]. (1.5) integrali,

$$I_{\alpha}(f) = \frac{1}{\sigma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \qquad 0 < \alpha < n \tag{1.6}$$

şeklinde de yazılabilir. Riesz potansiyelinin bu yazılışının, f fonksiyonu ile $|x|^{\alpha-n}$ çekirdeğinin konvolüsyonu olduğunu görmek kolaydır. Bir f fonksiyonunun bir K çekirdeği ile konvolüsyonu $f * K$ şeklinde gösterilir ve konvolüsyon tanımına göre (1.6) ifadesi daha genel olarak,

$$(f * K)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x-y) dy \tag{1.7}$$

dir [Stein 1970]. Yani Riesz potansiyeli (1.7) ile gösterilen operatörler sınıfının bir özel halidir. Bu operatörler sınıfına singüler integraller de dahildir. Görüldüğü gibi Riesz potansiyelinin çekirdeği olan $K(x) = |x|^{\alpha-n}$ fonksiyonunun koordinat başlangıcında zayıf tekilliği mevcuttur. $K(x) = |x|^{-n}$ çekirdekli konvolüsyonlara singüler integraller denir. Yani singüler integraller potansiyellerden farklı olarak tekillik noktalarında integrallenemezler. Tüm bunlar (1.7) konvolüsyon operatörünün çekirdeğinin integrallenemeyen tekilliği olunca buna singüler integral, zayıf (integrallenebilen) tekilliği olunca da potansiyel denilebileceğini gösteriyor [Landkoff 1972, Stein 1970]. Bu tanımdan, çekirdeği $\log|x|$ olan konvolüsyonların da potansiyel sınıfına dahil olacağı açıkca görülmektedir [Mizuta 1987].

Singüler integraller ve potansiyeller teorisinde en çok kullanılanlardan biri Fourier dönüşümüdür. $L_1(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir f fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ veya Ff şeklinde gösterilir ve

$$Ff(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x.y)} f(y)dy$$

olarak tanımlanır [Strein 1970]. Burada $(x.y)$ n-boyutlu $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ vektörlerinin iç çarpımıdır. f fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü $F^{-1}f$ ile gösterilir ve

$$F^{-1}f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x.y)} \hat{f}(y)dy$$

şeklinde tanımlanır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar (Distribution=Dağılım) teorisi yardımıyla Fourier dönüşümü ve onun tersi daha geniş fonksiyon sınıfları için de kullanılabilir. (1.7) tipinde verilen konvolüsyon operatörüne Fourier dönüşümü uygulanırsa

$$F(f * K)(x) = Ff.FK$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan Fourier dönüşümünün özelliğine göre keyfi bir P polinomu için,

$$P(D)(Ff)(x) = (FP(-2\pi iy)f(y))(x) \tag{1.8}$$

vardır [Stein 1970]. Buradaki P polinomu $(x_1, .., x_n)$ değişkenlerine bağlı bir polinomdur. Yani, $P(x) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha x^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ katlı (multi) indis, burada c_α lar negatif olmayan tam sayılar, $x^\alpha = x_1^\alpha,,,x_n^\alpha$ şeklindedir. D diferensiyel operatörü için , $P(D)$ ifadesi, P polinomunda x^α nın yerine $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ yazılarak elde edilir. Bu durumda $P(D)$ operatörüne, $P(x)$ polinomu ile oluşturulmuş diferensiyel polinom (operatörler polinomu) denir. Özel halde $P(D)$ Laplace operatörü,

$$P(D)(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

olduğundan, (1.8) eşitliği gereğince,

$$F\Delta f(x) = -4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

elde edilir. Buradan,

$$F(-\Delta f)(x) = 4\pi^2 |x|^2 Ff(x)$$

yazabiliriz. Bu eşitliğin, Laplace operatörünün keyfi kuvvetleri (fractional kuvvetleri) için de var olduğu gösterilmiştir [Stein 1970]. Yani,

$$F(-\Delta)^{\frac{\beta}{2}} f(x) = (2\pi |x|)^\beta Ff(x) \tag{1.9}$$

dir. Aynı çalışmada, $-n < \beta < 0$ durumunda Laplace operatörünün kesirli kuvvetleri (1.9) formülü ile tanımlanmış Riesz çekirdeğinin kuvvetleri ile aynıdır. ((1.9) formülü $\alpha = -\dot{\beta}$ için yazılmıştır).

Riesz potansiyellerinin Fourier dönüşümü ile Laplace operatörü arasındaki ilişkileri, bu potansiyellerin matematiğin bir çok dalında kullanılan önemli bir operatör olduğunu gösterir.

Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise, $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayına ait olamaz [Stein 1970]. Eğer $\forall p > 1$ için,

$$\|T(f)\|_q \leq C_{p,q} \|f\|_p$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T operatörüne kuvvetli (p,q)-tipli operatör denir. $\forall \lambda > 0$ için,

$$m\{x : |T(f)| > \lambda\} \leq \left(\frac{C_{p,q} \|f\|_p}{\lambda}\right)^q$$

ise T operatörüne (p,q)-tipli operatör denir. Hardly-Littlewood-Sobolev teoremine göre $1 < p < q < \infty$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ iken bu potansiyeller için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir;

$$\|I_\alpha f\|_q \leq A_{p,q} \|f\|_p .$$

Burada $A_{p,q}$ yalnız p ve q ya bağlı olan bir sabittir. $p=1$ durumunda ise teoreme göre I_α operatörü $(1,q)$-tipli operatördür (Burada $\frac{1}{q}=1-\frac{\alpha}{n}$ dır). Yani $\lambda>0$ için,

$$m\left\{x:|I_\alpha f|>\lambda\right\}\leq\left(\frac{A\,\|f\|_1}{\lambda}\right)^q$$

dir [Stein 1970]. Yukardaki açıklamalardan, konvolüsyon operatörleri sınıfında Riesz potansiyelinin iyi incelenmiş operatörler olduğu görülmektedir. Bu operatörler yardımıyla fonksiyonlar teorisinde potansiyel uzayları tanımlanmıştır [Stein 1970].

Örneğin, Riesz potansiyel uzayının elemanları, $(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}}f\in L_p(\mathbb{R}^n)$ şeklindeki f fonksiyonlarından oluşur. Bu uzaylarda norm aşağıdaki gibi tanımlanır [Stein 1970],

$$\|f\|_{p,\alpha}=\left\|(-\Delta)^{\frac{-\alpha}{2}}f\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Bu tür uzaylar düzgün manifoldlar üzerinde de tanımlanabilir. Örneğin $\mathbb{R}^n$ de küresel koordinatlara geçersek, o zaman Laplace operatörü iki kısımdan oluşur. Birincisi Radial (yani yarıçapa bağlı) kısım, ikincisi küresel kısım (yani yalnızca açılara bağlı kısım). Laplace operatörünün bu ikinci küresel kısmına küre üzerinde tanımlanmış Laplace-Beltrami operatörü denir [Mihlin 1962]. Bu operatör δ ile gösterilir. Yukarıdaki gösterimle Riesz potansiyel uzayı, δ operatörü yardımıyla küre üzerinde de tanımlanabilir. Küre üzerinde tanımlanmış bu uzay, singüler integral teorisinde çok önemli bir yer tutar. Singüler integrali bir operatör gibi karakterize eden sembolün (yani singüler integralin çekirdeğinin genelleştirilmiş fonksiyon anlamında Fourier dönüşümü) özellikleri genellikle bu uzayda incelenir. Bundan dolayı sembolün küre üzerinde tanımlanmış bu uzaydaki özellikleri, çok boyutlu singüler integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği teoremlerinde kullanılır [Mihlin 1962]. Singüler integralin sembolü, aslında küre üzerinde tanımlanmış logaritmik çekirdekli potansiyeldir [Mihlin 1962]. Sembolün türevlerini araştırmak için, bu logaritmik çekirdeğin türevlerini araştırmak zorundayız. Yani singüler integral teorisi ve singüler integral denklemler teorisinin problemleri bizi zayıf tekillikleri olan integrallerin araştırılmasına götürür [Mihlin 1962]. Bu tür integrallerin türevlerinin alınması, problemindeki zorluklar, zayıf tekillikli çekirdeğin türevini aldıkça onun tekillik mertebesinin artmasından ibarettir. Bu nedenle zayıf tekilliği olan çekirdekli integral, türevlerini aldıktan sonra singüler integral haline dönüşür. Bu konuda, yani zayıf çekirdeklerin diferensiyellenebilmesi konusunda bazı sonuçlar vardır. Bunlardan birini hatırlatalım [Mihlin 1962].

$$r = |x-y|\,, \quad x, y \in \mathbb{R}^n \text{ ve } L(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}dy\ , \quad \theta = \frac{x-y}{r}$$

olsun. Burada $\varphi(x,\theta)$ fonksiyonu ve onun x ve θ noktalarının kartezyen bileşenlerine göre türevleri, sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olsun. $f(y)$ fonksiyonu Lipschitz sınıfından ve sonsuzda $f(y) = O(|x|^{-1})$, $\ell > 1$ şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu şartlar altında $L(x)$ integralinin x e göre birinci türevleri mevcuttur ve bu türevler $k = 1, 2, ..., n$ için

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x,\theta)}{r^{n-1}}\right]dy - f(x)\int\limits_{S^{n-1}} \varphi(x,\theta)\cos(r, x_k)ds$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir. Burada S^{n-1}, $\mathbb{R}^n$ uzayında başlangıcı orjin olan bir yarıçaplı küre yüzeyi, ds yüzey elemanı $\cos(r, x_k)$ ise r vektörünün x_k ekseni ile yaptığı açının kosinüsüdür. Riesz potansiyellerinin araştırılması da aynı konunun bir dalıdır. Bu potansiyeller 1949 yılında tanımlanmış olmasına rağmen bunların diferensiyellenebilme özellikleri 1983 yılında Y. Mizuta tarafından incelenmeye başlanmış ve bu araştırmalar halen devam etmektedir [Mizuta 1987, 1993]. Yukarıda yazılan $L(x)$ integral operatörünün çekirdeğinin tekilliği $n-1$ inci mertebedendir. Bundan farklı olarak Riesz potansiyelinin çekirdeğinin tekilliği $n-\alpha$ inci mertebedendir ve burada α, n den küçük olmak üzere keyfi pozitif bir sayıdır. $\alpha = 1$ ve $\varphi(x,\theta) \equiv 1$ seçersek, Riesz potansiyeli $L(x)$ potansiyelinden bulunur. Yani bu özel halde söylediğimiz sonuç Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilmesi hakkında bir önermedir. Doğal olarak $\alpha \neq 1$ olursa, yukardaki sonuçtan Riesz potansiyelinin diferensiyellenebilmesi hakkında hiç bir bilgi elde edilemez. Riesz potansiyelinin tanımından α nın kesir ve tamsayı olabileceği gürülmektedir. $L(x)$ operatöründe $\alpha = 1$ olduğundan bu operatörün çekirdeğinin birinci türevi tekilliği singülerliğe getirir (yani tekilliğin derecesi n olur ve türevi alınmış çekirdek $\dfrac{1}{|x|^n}$ şeklinde olur. Bu ise n-boyutlu uzayda singüler çekirdektir). Riesz potansiyelinde ise tekilliğin mertebesi $n-\alpha$ olduğundan bu tekilliği türevleme yöntemi ile singülerliğe getirmek için bir çok adım gerekir. Örneğin, α tam ise α tane adım gerekir. Bundan dolayı Riesz potansiyelinin ardışık türevlerini araştırma imkanı buluruz. Yukarıda bahsettiğimiz zayıf tipli singüleriteye sahip çekirdekli,

$$U_\alpha f(x) = U_\alpha * f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy$$

α potansiyellerinin sınırlılığı ve Sobolev eşitsizliği ile birlikte bu potansiyelin L^q daki

$$S_q(U,r) = \left(\frac{1}{|S(0,r)|} \int\limits_{S(0,r)} |U(x)|^q \, dS(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

tipindeki küresel ortalamaları Y. Mizuta tarafından incelenmiştir [Y. Mizuta 1996].
Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, (1.1) ve (1.2) ile ifade edilen kesirli integralleri elde ederek, bunlar için uygulamalar verilecek, daha sonra (1.3) ve (1.4) ile ifade edilen kesirli türevler ve çeşitleri verilerek, bazı uygulamalar yapılacaktır.
Dördüncü bölümde (1.6) veya daha genel olarak ifade edilen

$$(f * K)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy$$

şeklindeki operatörler sınıfına ait olan, Riesz potansiyelinin elde edilişi, sınırlılığı, ağırlıklı sınırlılığı ve genel formu olan kesirli integraller incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 (Dağılım-Distribution): Kompakt desteğe sahip ve C^{∞} sınıfına ait fonksiyonların sınıfı D olsun. Bu durumda, $T : D \to \mathbb{R}$ yada $T : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonelleri lineer ve sürekli ise, T fonskiyoneli bir dağılım adını alır. $f \in D$ ve ϕ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\langle \phi, f \rangle = \langle T_{\phi}, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\phi(x)\,dx$$

şeklinde tanımlanır [Schwarz 1966].

Tanım 2.2 (Konvolüsyon): f ve g, $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{C}$ ye birebir fonksiyon olsunlar. Bu durumda $f * g$ fonksiyonu,

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y)\,g(x-y)\,dy$$

şeklinde tanımlanır ve f ile g nin konvolüsyonu diye adlandırılır. Konvolüsyon çarpımı değişmeli ve birleşmelidir.

Tanım 2.3 (Fourier Dönüşümü): $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $xy = \langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ olmak üzere $f \in L(\mathbb{R}^n)$ için, f fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$Ff(x) = \widehat{f}(x) = \int_{R^n} e^{-2\pi ixy} f(y)\,dy$$

ile verilir [Schwarz 1966] .

Tanım 2.4 (Maksimal Fonksiyon): $B(x,r)$ merkezi, $x \in \mathbb{R}^n$ noktasında olan r yarıçaplı yuvar; $mB(x,r)$, $B(x,r)$ yuvarının ölçümü olmak üzere, bir f fonksiyonu için Mf ile gösterilen ve

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{mB(x,r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona, maksimal fonskiyon denir [Stein, E.M. 1970].

Tanım 2.5 (Hölder Eşitsizliği): $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(\Omega)$ ve $g \in L^q(\Omega)$ olsun. $1 \leq p < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere,

$$\int_{\Omega} |f(x)\, g(x)|\, d(x) \leq \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p\, d(x)\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |g(x)|^q\, d(x)\right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Burada q, p nin konjıgesidir [Neri 1971].

Tanım 2.6 (Zayıf L^p Uzayı): $1 \leq p < \infty$ ve f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de tanımlı olsun. Eğer $C > 0$ için

$$\sup_{\lambda>0} \lambda \left|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}\right|^{1/p} \leq C < \infty$$

varsa f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de zayıf L^p uzayına aittir.

Tanım 2.7 (Zayıf Tip): T, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere, $L^p(\mathbb{R}^n)$ den $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ye birebir dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$M\{x : |Tf(x)| > \alpha\} \leq \left(\frac{A\,\|f\|_p}{\alpha}\right)^q, \quad \alpha > 0$$

ise T, $(p,q)-$uzay tiplidir denir [Stein, E.M. 1970] .

Tanım 2.8 (Operatör): Fonksiyonlar cümlesini fonksiyonlar cümlesine dönüştüren dönüşümlere operatör denir.

Tanım 2.9 (The Riesz-Thörin Teoremi): T, L^{p_1} den L^{p_2} ye ve L^{q_1} den L^{q_2} ye sınırlı lineer operatör olsun. O halde $t \in (0,1)$ şeklinde herhangi bir sayı vardır ve

$$\frac{1}{r_1} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{q_1} \quad , \quad \frac{1}{r_2} = \frac{t}{p_2} + \frac{1-t}{q_2}$$

olmak üzere, T operatörü L^{r_1} den L^{r_2} ye sınırlıdır [Stein, E.M. 1970].

Tanım 2.10 (Ölçülebilir Fonksiyon): $f : X \to \mathbb{R}^n$ tanımlı bir fonksiyon ve A bir ölçülebilir uzay olsun. Bu durumda $\alpha > 0$ için,

$$f^{-1}(]-\infty, \infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.11 (Altlineer(Sublinear) Operatör): V bir vektör uzayı ve $f : V \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$f(\gamma x) = \gamma f(x), \qquad \text{her } \gamma \in \mathbb{R}_+ \text{ ve her } x \in V \text{ için}$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \qquad \text{her } x, y \in V \text{ için}$$

ifadelerini sağlayan f fonksiyonuna altlineer (sublinear) operatör denir.

Tanım 2.12 (Schwarz Uzayı): Kendisi ve türevleri bir polinom ile çarpıldığında sınırlı kalan fonksiyonların uzayıdır. Yani;

$$\Im_* = \Im_*(E^n) = \left\{ f \in C^\infty(E^n) : \sup_x \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty \right\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$$

dir [Schwarz, L. 1966].

Tanım 2.13 (A_p Sınıfı $(1 \leq p < \infty)$): $w(x) \geq 0$ ve $w(x) \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Eğer $1 < p < \infty$ için,

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{1-p'} dx \right)^{p-1} \leq C$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti var ise $w \in A_p$ dir. Burada $1/p + 1/p' = 1$ dir. Şayet $w \in A_1$ ise

$$Mw(x) \leq Cw(x)$$

olcak şekilde $C > 0$ sabiti vardır [Ding 2007].

Tanım 2.14 ($\mathbb{R}^n$ de Küresel Koordinatlar): $\sum = \sum_n$, $\mathbb{R}^n$ de birim küre olarak tanımlansın. $y \in \mathbb{R}^n$, yani $n > 1$ için $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ noktasını alalım. Bu durumda aşağıdaki dönüşüme küresel koordinatlar denir.

$$\begin{aligned}
y_1(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) &= t \cos \varphi_1 \\
y_2(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) &= t \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
... &= .... \\
y_k(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) &= t \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 ... \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k \\
... &= .... \\
y_n(t, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) &= t \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 ... \sin \varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

Buradaki φ_k açıları $0 \leq \varphi_k \leq \pi$, $k = 1, 2, 3, ..., n-2$ ve $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$ dir. $t = |y|$ ve $y' = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}) \in \sum$ olmak üzere $t = |y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2}$ şeklindedir. Bu şekildeki bir dönüşümün Jakobiyeni ise

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial t} & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial t} & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial \varphi_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial t} & \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_1} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial \varphi_{n-1}} \end{vmatrix} \\ &= t^{n-1} (\sin \varphi_1)^{n-2} (\sin \varphi_2)^{n-3} \ldots \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

dir.

Tanım 2.15 (Calderon-Zymund Singüler İntegral Operatörü):
$K(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ olsun ve aşağıdaki durumlar sağlansın,

$$|K(x)| \leq B |x|^{-n}, \quad \forall x \neq 0$$

$$\int\limits_{r \leq |x| \leq R} K(x)\, dx = 0, \quad \forall 0 < r < R < \infty$$

$$\int\limits_{|x| \geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)|\, dx \leq B, \quad \forall y \neq 0.$$

K Calderon-Zymund çekirdeğidir. Burada B, x ve y den bağımsız bir sabittir [Ding 2007].

Tanım 2.16 (L^p Uzayı): $\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_n)\}$ olsun. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere L^p uzayı,

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f(x)\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

dir [Neri 1971].

Tanım 2.17 (Marcinkiewicz Interpolation Teoremi): T operatörü, $j = 0$ ve $j = 1$ için (p_j, q_j) $-$zayıf tipli olsun. Yani $f \in L^{p_j}(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda > 0$, $j = 0, 1$ için,

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leqq \left(\frac{A_j \|f\|_{p_j}}{\lambda} \right)^{q_j}$$

dir. Eğer $0 < \theta < 1$ için

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

ise T operatörü $(p,q)-$zayıf tiplidir. Yani,

$$\|Tf\|_q \leqq A\,\|f\|_p \ , \quad A = A(p_0, p_1, q_0, q_1, \theta) \text{ için}$$

dir [Stein, E.M. 1970] .

Tanım 2.18 (Genişleme Operatörü):

$$\tau_p\left(f\left(x\right)\right) = f\left(px\right)$$

ile tanımlanan τ_p operatörüne genişleme operatörü denir.

Tanım 2.19 (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi): $f\left(x,h\right)$ toplanabilir majoranta sahip olsun. $\left|f\left(x,h\right)\right| \leq F\left(x\right)$, burada $F\left(x\right)$, h parametesinden bağımsız ve $F\left(x\right) \in L_1\left(\Omega\right)$ dır. Eğer, $h \to 0$ iken $f\left(x,h\right)$ fonksiyonunun hemen hemen her x için limiti varsa,

$$\lim_{h\to 0}\int_{\Omega} f\left(x,h\right)dx = \int_{\Omega}\lim_{h\to 0} f\left(x,h\right)dx$$

dir [Samko 1993] .

Tanım 2.20 (Riesz Çekirdeği):

$$k_\alpha\left(x\right) = \frac{1}{\gamma_n\left(\alpha\right)}\begin{cases} |x|^{\alpha-n} & , \quad \alpha - n \neq 0, 2, 4, 6... \\ |x|^{\alpha-n}\ln\dfrac{1}{|x|} & , \quad \alpha - n = 0, 2, 4, 6... \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $k_\alpha\left(x\right)$ fonksiyonuna Riesz çekirdeği denir [Samko 1993].

Tanım 2.21 (Homogen Çekirdek): Her $\lambda > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için eğer $K(\lambda x) = \lambda^\alpha K(x)$ ise $K(x)$ çekirdeğine α. mertebeden homogendir denir.

Tanım 2.22 (Singüler İntegral): $K\left(x\right)$ çekirdeği α. mertebeden homogen olsun. Eğer $x \neq 0$ ise $S = \{x : |x| = 1\}$ birim küre üzerinde x in izdüşümünü $x' = \dfrac{x}{|x|}$ olarak gösterelim. Bu durumda eğer, $K\left(x\right)$, α. mertebeden homogen ise,

$$K(x) = |x|^\alpha\,, \quad K\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^\alpha\,K(x')$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $\Omega(x) = K\left(\frac{x}{|x|}\right)$ fonksiyonu sıfırıncı mertebeden homogendir. Böylece $\Omega(x) = K(x')$, S de bir fonksiyon olarak alınabilir. Bu fonksiyona K çekirdeğinin karakteristiği denir. $K(x)$, $-\alpha$. mertebeden homogen ve $f * K$ konvolüsyonu,

$$f * K = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K(x-y)dy \tag{2.0.1}$$

olmak üzere $f \to f * K$ şeklinde bir dönüşümü göz önüne alalım. O halde aşağıdaki üç durum mevcuttur.

i. Eğer $0 < \alpha < n$ ise, (2.0.1) integraline zayıf singüler integral denir.

ii. Eğer $\alpha = n$ ise, (2.0.1) integraline singüler integral denir.

iii. Eğer $\alpha > n$ ise, (2.0.1) integraline hipersingüler integral denir.

$$u_\alpha f(x) = c\int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy, \qquad 0 < \alpha < n$$

şeklinde tanımlanan Riesz potansiyeline zayıf singüleritiye sahip bir integral denir [Neri 1971].

Tanım 2.23 (Gamma Fonksiyonu): $\Gamma(n)$ notasyonu ile gösterilen ve

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Gamma Fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonunun şu özellikleri vardır;

a. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

b. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

c. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$

d. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$.

Tanım 2.24 (Beta Fonksiyonu): $B(z,w)$ notasyonu ile gösterilen ve

$$B(z,w) = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{m-1}dx, \qquad \operatorname{Re} z > 0, \ \operatorname{Re} w > 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Beta fonksiyonu denir. Beta fonskiyonunun Gamma fonksiyonu ile ilişkisi,

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\,\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

eşitliği ile verilir.

Eğer yukarıdaki Beta fonksiyonunda $z \neq 0$, $w \neq 0$ ise, $\operatorname{Re} z = 0$ veya $\operatorname{Re} w = 0$ olduğu düşünülürse, bu şartların yakınsaklık şartları olacağı anlaşılır. Özel olarak,

$$B(z, i\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} x^{z-1}(1-x)^{i\theta-1}dx, \qquad \operatorname{Re} z > 0,\ \theta \neq 0$$

limiti vardır. Bu durum ise, $w \neq 0$, $\operatorname{Re} w = 0$ olmak üzere, w ye göre $B(z,w)$ nin analitikliği ile çakışır. Diğer yandan,

$$\int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1}\,(t-y)^{p-1}dt = (x-y)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, 1-\alpha-\beta)$$

integrali, $t = y + (x-y) + (x-y)\xi^{-1}$ değişken değiştirmesiyle Beta fonksiyonuna indirgenir.

Tanım 2.25 (Dirichlet Formülü): $\Omega_1 = [a,b]$, $\Omega_2 = [c,d]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $-\infty \leq c < d \leq \infty$, ve $f(x,y)$, $\Omega_1 \times \Omega_2$ de ölçülebilir fonksiyon olsun. O zaman

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_a^b dy \int_c^d f(x,y)dx$$

eşitliğine Dirichlet formülü denir [Samko 1993].

Tanım 2.26 (Abel İntegral Denklemi): $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > 0$$

şeklinde tanımlanan integral denklemine Abel integral denklemi denir.

Tanım 2.27 (Kesirli (Fractional) İntegral): $n-$katlı integraller için aşağıdaki eşitlik tümevarım metodu kullanılarak kolayca gösterilebilir.

$$\int_a^x dx \int_a^x dx ... \int_a^x \varphi(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (x-t)^{n-1} \varphi(t)\,dt$$

Burada $(n-1)! = \Gamma(n)$ olduğu için, n nin tamsayı olmayan değerleri için, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı daha anlamlı bir şekilde ifade edilebilir. Buna göre, $\varphi(x) \in L_1(a,b)$ ve $\alpha > 0$ için,

$$\left(I_{a+}\varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a$$

$$\left(I_{b-}\varphi\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^b \frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b$$

ifadelerine α. mertebeden kesirli (fractional) integraller denir. Bu integraller bazen sırasıyla sağ ve sol taraflı kesirli integraller olarak da adlandırılırlar. Bu integraller için bir adlandırma da Riemann-Liouville kesirli integraller şeklindedir.

Tanım 2.28 (Kesirli (Fractional) Türev): $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\left(D_{a+}^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$\left(D_{b-}^{\alpha} f\right)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_x^b \frac{f(t)dt}{(t-x)^{\alpha}},$$

ifadelerine f fonksiyonunun α. mertebeden $(0 < \alpha < 1)$ sırasıyla sağ ve sol kesirli türevleri denir [Samko 1993].

3. KESİRLİ İNTEGRALLER VE KESİRLİ TÜREVLER

Bu bölümde, öncelikle n-katlı bir integral yardımıyla kesirli integralleri elde ederek bunun Abel integraliyle ilişkisini vereceğiz. Daha sonra Abel integrali yardımıyla Riemann-Liouville kesirli türevini vererek bu türevin Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevleri ile ilişkilerini vereceğiz.

Şimdi şöyle bir soru yöneltelim. Acaba $\frac{3}{2}$. mertebeden veya $\frac{1}{2}$. mertebeden türev veya diferensiyel var mıdır? Eğer varsa $\frac{3}{2}$ kez uygulanan veya $\frac{1}{2}$ kez uygulanan integral var mıdır? Bu tür bir sorunun cevabını arayalım. Eğer türev varsa integral de olmalıdır, düşüncesiyle hareket edelim. Bunun için öncelikle kesirli integrallere bakalım.

3.1. Kesirli (Fractional) İntegral

Şimdi n-katlı

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \ldots d\sigma_2 d\sigma_1 \tag{3.1.1}$$

integralini ele alalım. Bu integralde integrasyon sırasını ve buna bağlı sınırları değiştirelim. Bunun için;

$$\begin{array}{ll} a < \sigma_1 < x & \sigma_2 < \sigma_1 < x \\ a < \sigma_2 < \sigma_1 & \sigma_3 < \sigma_2 < x \\ ,\ldots, & ,\ldots, \\ a < \sigma_{n-1} < \sigma_{n-2} & \sigma_n < \sigma_{n-1} < x \\ a < \sigma_n < \sigma_{n-1} & a < \sigma_n < x \end{array} \tag{3.1.2}$$

sınır değişimleri altında (3.1.1) ifadesi,

$$\begin{aligned} &\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \ldots d\sigma_2 d\sigma_1 \\ &= \int_a^x f(\sigma_n) \left(\int_{\sigma_n}^x \left(\int_{\sigma_{n-1}}^x \cdots \int_{\sigma_3}^x \left(\int_{\sigma_2}^x d\sigma_1 \right) d\sigma_2 \ldots \right) d\sigma_{n-1} \right) d\sigma_n \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

şeklinde yazılır. (3.1.3) ifadesinin sağ tarafı terim terime hesaplanırsa

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} \cdots \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \ldots d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \tag{3.1.4}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ oluşu kullanılırsa,

$$\int_a^x \int_a^{\sigma_1} \int_a^{\sigma_2} ... \int_a^{\sigma_{n-1}} f(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} ... d\sigma_2 d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x f(\sigma_n)(x-\sigma_n)^{n-1} d\sigma_n \qquad (3.1.5)$$

yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafındaki n pozitif bir tamsayıdır. Γ gamma fonksiyonu tamsayılar dışında da ifade edilebildiğinden, n nin tamsayı olmaması durumunda (3.1.5) eşitliğinin sağ yanı için şu tanım verilebilir.

Tanım 3.1.1: $f(x) \in L_1(a,b)$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (I^{\alpha}_{a+} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > a \\ (I^{\alpha}_{b-} f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x < b \end{aligned} \qquad (3.1.6)$$

integrallerine $\alpha > 0$ için α. mertebeden kesirli integral denir. Bu integral Riemann-Liouville kesirli integrali olarak bilinir.

Şimdi $f(t) = (t-a)^{\frac{1}{2}}$ ve $\alpha = \dfrac{1}{2}$ olmak üzere aşağıdaki Riemann-Liouville kesirli integralini gözönüne alalım.

$$(I^{\alpha}_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \quad x > a$$

Kabuller altında bu integral

$$(I^{\frac{1}{2}}_{a+} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}} (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad x > a$$

olarak yazılır. Şayet burada $t = a + (x-a)\tau$ şeklinde bir değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1} d\tau = B(p,q)$$

eşitliği ile ifade edilen Beta fonksiyonu yardımıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir,

$$\begin{aligned}
(I_{a+}^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int\limits_a^x (t-a)^{\frac{1}{2}}(x-t))^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>a \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 (x-a)^{\frac{1}{2}}(x-a)^{-\frac{1}{2}+1}\tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\int\limits_0^1 \tau^{\frac{1}{2}}(1-\tau)^{-\frac{1}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)B(\frac{3}{2},\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(x-a)\frac{\Gamma(\frac{3}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(x-a).
\end{aligned}$$

3.2 Kesirli (Fractional) Türevler

n. mertebeden türevlerin

$$f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \ \frac{d^2f(x)}{dx^2},\ \ \frac{d^3f(x)}{dx^3},...,\frac{d^nf(x)}{dx^n},...$$

sonsuz dizisini gözönüne alalım. Bu dizi, keyfi mertebeden diferensiyel düşüncesi altında tekrarlanan diferensiyelin bir genelleştirilmesidir. Burada temel amaç $\dfrac{d^n}{dx^n}$ semboli ile gösterilen operatörün n tamsayı değerli parametresini, tamsayı olmayan bir α parametresiyle yer değiştirmektir.

Genel kesirli türevleri vermeden önce yarım türev de denen bir türev formülü elde ederek bir uygulama yapalım ve daha sonra daha genel kesirli türev formülleri verelim.

Bunun için $f(x) = x^k$ şeklindeki fonksiyonu ele alalım. Burada k pozitif bir tamsayıdır. Ele aldığımız fonksiyonun a. mertebeden türevini alırsak,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^k \\ f'(x) &= kx^{k-1} \\ f''(x) &= k(k-1)x^{k-2} \\ f'''(x) &= k(k-1)(k-2)x^{k-3} \\ &\ \ ... \\ f^{(a)}(x) &= k(k-1)(k-2)...(k-a+1)x^{k-a} \\ &= \frac{k!}{(k-a)!}x^{k-a} \end{aligned}$$

yazılır. Yine burada $\Gamma(n) = (n-1)!$ olduğundan

$$f^{(a)}(x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)}x^{k-a}$$

eşitliğini yazarız. Buradaki a sayısını herhangi bir pozitif sayı olarak seçerek fonksiyonun kesirli türevlerini hesaplayabiliriz.

Bir an için kabul edelim ki, $a = \dfrac{1}{2}$ ve $k = 2$ olsun. Bu durumda, fonksiyonun $\dfrac{1}{2}$.

mertebeden türevini (yarım türevini) hesaplayalım.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \quad \text{ve} \quad a = \frac{1}{2} \quad \text{ise,} \\
f^{(a)}(x) &= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-a+1)} x^{k-a} \quad \text{eşitliğinden} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2-\frac{1}{2}+1)} x^{2-\frac{1}{2}} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}}, \ \Gamma(\frac{5}{2}) = \Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(1+\frac{3}{2}) = \frac{3}{4}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi} \\
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 &= \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Elde edilen yarım türevin tekrar yarım türevi alınırsa

$$
\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x^2 \right) = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}} \right) = 2x
$$

olduğu kolayca görülür.

Yukarıda yaptığımız uygulamaya benzer olarak $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ alalım ve bu fonksiyonun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin $f(x) = x^2$ olduğunu gösterelim. $a = 0$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli integrali

$$
(I^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt, \qquad x > 0
$$

olarak yazılır. Kabuller altında $f(x) = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{\frac{3}{2}}$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ mertebeden kesirli integralinin,

$$
\begin{aligned}
(I^{\frac{1}{2}}f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\dfrac{1}{2})}\int\limits_a^x \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt, \qquad x>0 \\
&= \frac{8}{3\pi}\int\limits_0^1 (ux)^{\frac{3}{2}}(x-ux)^{-\frac{1}{2}}xdu, \quad t=ux \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2\int\limits_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2B(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2\frac{\Gamma(\frac{5}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{8}{3\pi}x^2\frac{\frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}).\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} \\
&= x^2
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Şimdi kesirli türev için $0<\alpha<1$ olmak üzere,

$$
f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_a^x \varphi(t)(x-t)^{\alpha-1}dt, \quad x>a \tag{3.2.1}
$$

Abel integral denklemini ele alalım.

(3.2.1) ifadesinin her iki yanında x yerine t, t yerine s yazalım. Daha sonra elde edilen ifadenin her iki yanını $(x-t)^{-\alpha}$ ile çarparak a dan x e kadar integralini alırsak;

$$
\int\limits_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}}\int\limits_a^x \frac{\varphi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds = \Gamma(\alpha)\int\limits_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt
$$

olur. Burada Dirichlet formülü olarak bilinen

$$
\int\limits_a^b\left(\int\limits_a^x f(x,y)dy\right)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_y^b f(x,y)dx\right)dy
$$

şeklindeki sınır değişimi formülünü gözönüne alırsak,

$$\int_a^x \varphi(s)ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{3.2.2}$$

olduğunu görürüz. (3.2.2) ifadesindeki iç integralde $t = s+\tau(x-s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^\alpha (t-s)^{1-\alpha}} = \int_0^1 \tau^{\alpha-1}(1-\tau)^{-\alpha}d\tau = B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\alpha+1-\alpha)}$$

olduğu görülür. Elde edilen bu eşitlik (3.2.2) de kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\int_a^x \varphi(s)ds &= \Gamma(\alpha)\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \\ \int_a^x \varphi(s)ds &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt\end{aligned}$$

olur. Buradaki son eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}dt \tag{3.2.3}$$

elde edilir. Elde edilen (3.2.3) ifadesine α. mertebeden kesirli türev denir. Bu türeve Riemann-Liouville kesirli (fractional) türevi de denmektedir.

Bu türev formülü daha genel olarak şu şekilde ifade edilir.

Tanım 3.2.1: f fonksiyonu her sonlu (a, x) aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. $m \in IN$, $m-1 \leq \alpha < m$ olmak üzere $x > a$ için reel bir f fonksiyonunun α. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

$$D_{RL}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\frac{d^m}{dx^m}\int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \tag{3.2.4}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.2: m, $m < \alpha < m+1$ şartını sağlayan bir tamsayı, f sürekli bir fonksiyon, $f^{(k)}(x)(k = 1, 2, ..., m+1)$ türevleri de $[a, x]$ aralığında sürekli olsun. Bu takdirde f

fonksiyonunun α. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevi

$$D^{\alpha}_{GL}f(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_{a}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^{m-\alpha}dt \quad (3.2.5)$$

dir.

Tanım 3.2.3: $m,\ m-1 < \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı, α herhangi bir pozitif sayı ve f fonksiyonu da m defa sürekli diferensiyellenebilir olsun. Bu takdirde f fonksiyonunun α. mertebeden Caputo kesirsel türevi

$$D^{\alpha}_{C}f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{a}^{x} f^{(m)}(t)(x-t)^{m-\alpha-1}dt \quad (3.2.6)$$

ile tanımlanır.

$x \geq 0$ için $(m+1)$. mertebeden sürekli türeve sahip $f(x)$ fonksiyonlarının bir sınıfı ele alındığında (3.2.5) ile verilen Grünwald-Letnikov kesirli türevi, (3.2.4) ile verilen Riemann-Liouville kesirli türevine eşit olacaktır. Bununla birlikte aynı şartlar altında Caputo kesirli türevi ile diğer iki kesirli türev arasında böyle bir eşitlik söz konusu değildir. Şimdi Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville kesirli türevlerinin hangi şartlar altında eşit olduklarını gösteren bir teoremi ifade edelim.

Teorem 3.2.1: $f(x)$ fonksiyonu $[a,x]$ aralığında $(n-1)$ defa sürekli diferensiyellenebilir ve $f^{(n)}(x)$ türevleri de $[a,x]$ aralığında integrallenebilir olsun. Bu takdirde her α, $(0 < \alpha < n)$ için $D^{\alpha}_{RL}f(x)$ Riemann-Liouville türevi mevcuttur ve $D^{\alpha}_{GL}f(x)$ Grünwald-Letnikov türevine eşittir. Eger $0 \leq m-1 \leq \alpha \leq m \leq n$ ise bu takdirde, $a < t < x$ için,

$$D^{\alpha}_{RL}f(x) = D^{\alpha}_{GL}f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^{-\alpha+j}}{\Gamma(-\alpha+j+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_{a}^{x} f^{(m+1)}(t)(x-t)^{m-\alpha}dt$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.2.2: $f(x)$ fonksiyonu her (a,x) sonlu aralığında sürekli ve integrallenebilir, $m,\ m-1 < \alpha < m$ olacak şekilde pozitif bir tamsayı ve α herhangi bir pozitif sayı olmak üzere $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, ..., m+1)$ türevleride $[a,x]$ aralığında sürekli ve integrallenebilir olsun. Bu takdirde $k = 1, 2, ..., m + 1$ için $f^{(k)}(a) = 0$ şartları sağlanırsa

$$D^{\alpha}_{RL} f(x) = D^{\alpha}_{C} f(x)$$

dir.

Örnek 3.2.1: Daha önce ele aldığımız fonksiyonun türevini tekrar ele alalım. $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $\alpha = \frac{1}{2}$ için Riemann-Liouville kesirli türevi hesaplayalım. $m \in IN$, $m - 1 \leq \alpha < m$ olduğundan dolayı, $m - 1 \leq \frac{1}{2} < m$ için $m = 1$ olmalıdır. Riemann-Liouville kesirli türev formülünden,

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{RL} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x f(t)(x-t)^{m-\alpha-1} dt \\
D^{\frac{1}{2}}_{RL} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_a^x t^2 (x-t)^{1-\frac{1}{2}-1} dt \\
D^{\frac{1}{2}}_{RL} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dx} \int_a^x t^2 (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\
D^{\frac{1}{2}}_{RL} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^{x-a} (x-u)^2 (u)^{-\frac{1}{2}} du \\
D^{\frac{1}{2}}_{RL} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{8x^2 - a^2 - 4ax}{3(x-a)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi aynı fonksiyonun Grünwald-Letnikov kesirli türevini hesaplayalım. $m < \alpha < m + 1$ olduğundan dolayı, $m < \frac{1}{2} < m + 1$ için $m = 0$ olmalıdır. Grünwald-Letnikov kesirli türev formülünden

$$
\begin{aligned}
D^{\alpha}_{GL}f(x) &= \sum_{k=0}^{m}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)}\int_a^x f^{(m+1)}(t)(x-t)^{m-\alpha}dt\\
D^{\frac{1}{2}}_{GL}f(x) &= \sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{-\frac{1}{2}+k}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+k+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+0+1)}\int_a^x f^{(0+1)}(t)(x-t)^{0-\frac{1}{2}}dt\\
D^{\frac{1}{2}}_{GL}f(x) &= \frac{f^{(0)}(a)(x-a)^{-\frac{1}{2}+0}}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}+\frac{1}{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}\int_a^x f'(t)(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt\\
D^{\frac{1}{2}}_{GL}f(x) &= \frac{a^2(x-a)^{-\frac{1}{2}+0}}{\Gamma(\frac{1}{2})}+\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_a^x 2t(x-t)^{-\frac{1}{2}}dt\\
D^{\frac{1}{2}}_{GL}f(x) &= \frac{3a^2+12x(x-a)-4(x-a)^2}{\sqrt{\pi}3(x-a)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{8x^2-a^2-4ax}{3(x-a)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

4. KESİRLİ (FRACTIONAL) İNTEGRAL OPERATÖRLER

Bu bölümde Riesz potansiyelinin sınırlılığını ve genel formu olan kesirli integralleri inceleyeceğiz. Eğer $0 < \alpha < n$ ise $|x|^{-n+\alpha} \in L_{loc}(R^n)$ dir. Bu durumda

$$\left(\widehat{\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}}\right)(\xi) = \gamma(\alpha)(2\pi)^{-\alpha}|\xi|^{-\alpha} \tag{4.0.1}$$

yazılır. Burada

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

dir. Riesz potansiyeli,

$$I_{\alpha}(f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} * f\right)(x) \tag{4.0.2}$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi kesirli mertebeden Laplace operatörü ile Riesz potansiyeli arasındaki ilişkiyi verelim. Δ Laplace operatörünün,

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$$

şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Her bir $\varphi \in \Im(\mathbb{R}^n)$ için, $-\Delta\varphi$ operatörünün Fourier dönüşümü,

$$\left(\widehat{-\Delta\varphi}\right)(\xi) = (2\pi|\xi|)^2 \hat{\varphi}(\xi)$$

şeklindedir. Gerçektende;

$$\begin{aligned}
\left(\widehat{-\Delta\varphi}\right)(\xi) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\varphi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= -\frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_n^2}\right) e^{-2\pi i(\xi_1 x_1 + ... + \xi_n x_n)} dx_1 ... dx_n
\end{aligned}$$

olarak yazılır. Buradaki her bir toplam aynı karakterde olduğundan, bir tanesine yapacağımız işlemi tümü için alabiliriz. Bunun için kısmi integrasyon yöntemini uygulayalım,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_1^2} e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1$$

$$= \underbrace{e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \left. \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + 2\pi i \xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} e^{-2\pi i x_1 \xi_1} dx_1$$

$$= 2\pi i \xi_1 \left(\underbrace{e^{-2\pi i \xi_1 x_1} \varphi(x) \big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} + 2\pi i \xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1 \right)$$

$$= (2\pi i \xi_1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi_1 x_1} dx_1.$$

Elde edilen bu eşitlik yardımıyla,

$$\begin{aligned} \left(\widehat{-\Delta\varphi}\right)(\xi) &= 4\pi^2 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2\right) \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= 4\pi \left|\xi\right|^2 \widehat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

ifadesini yazabiliriz. Böylece $\varphi \in \Im(\mathbb{R}^n)$ ve $0 < \alpha < n$ için (4.0.1) ve (4.0.2) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} (\widehat{I_\alpha \varphi})(\xi) &= \left(\frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} * \varphi \right) \right)^{\widehat{}}(\xi) \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{|\cdot|^{n-\alpha}} * \varphi \right)^{\widehat{}}(\xi) \\ &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \gamma(\alpha) (2\pi)^{-\alpha} |\xi|^{-\alpha} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= (2\pi |\xi|)^{-\alpha} \hat{\varphi}(\xi) \\ &= \left((-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi \right)^{\widehat{}}(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1 Riesz Potansiyeli

Bu bölümde Riesz potansiyelleri için bazı özellikler ele alınacaktır. Bunun için öncelikle, I_α Riesz potansiyelinin, $0 < \alpha < n$ olmak üzere, L^p den L^q ya sınırlı olduğu gösterilecektir. Yani,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C \|f\|_p \tag{4.1.1}$$

olması için gerek ve yeter şartın

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} \tag{4.1.2}$$

olduğu gösterilecektir. $\delta > 0$ için

$$\tau_\delta(f)(x) = f(\delta x)$$

genişleme operatörünü ele alalım. Bu durumda $0 < \alpha < n$ için

$$\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta = \delta^{-\alpha} I_\alpha \tag{4.1.3}$$

ve

$$\left\|\tau_\delta(f)\right\|_p = \delta^{-n/p}\left\|f\right\|_p, \quad \left\|\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha(f)\right\|_q = \delta^{n/q}\left\|I_\alpha(f)\right\|_q \tag{4.1.4}$$

dir. Böylece $\delta > 0$ için (4.1.1), (4.1.3) ve (4.1.4) ifadelerinden dolayı

$$\begin{aligned} \left\|I_\alpha f\right\|_q &= \delta^{\alpha}\left\|\tau_{\delta^{-1}} I_\alpha \tau_\delta(f)\right\|_q \\ &= \delta^{\alpha+\frac{n}{q}}\left\|I_\alpha \tau_\delta(f)\right\|_q \\ &\leq C\delta^{\alpha+\frac{n}{q}}\left\|\tau_\delta f\right\|_p \\ &= C\delta^{\alpha+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}\left\|f\right\|_p \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

olduğu görülür. (4.1.5) tüm $\delta > 0$ için sağlandığından (4.1.2) nin sağlanması için $\alpha + \frac{n}{q} - \frac{n}{q} = 0$, yani $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmalıdır.

Lemma 4.1.1: $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ve $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ olsun. O halde $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\left|I_\alpha f(x)\right| \leq C\left\|f\right\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}\left[Mf(x)\right]^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

dir. Burada M operatörü Hardly-Littlewood maksimal fonksiyonu ve $C = C(\alpha, p, n)$ dir.

İspat: $x \in \mathbb{R}^n$ sabiti ve $r > 0$ için

$$\left|I_\alpha f(x)\right| \leq \int\limits_{|y|\leq r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy + \int\limits_{|y|>r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}}dy := J_1 + J_2$$

vardır. İlk olarak J_1 integralini ele alalım.

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-j-1}r<|y|\leq 2^{-j}r} \frac{f(x-y)}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left(2^{-j-1}r\right)^{n-\alpha}} \int\limits_{2^{-j-1}r<|y|\leq 2^{-j}r} |f(x-y)|\, dy \\ &\leq Cr^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{-j}\right)^{\alpha}}{\left(2^{-j}r\right)^{n}} \int\limits_{|y|\leq 2^{-j}r} |f(x-y)|\, dy \\ &= Cr^{\alpha} Mf(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j\alpha}} \\ &\leq Cr^{\alpha} Mf(x) \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

dir. J_2 için $p=1$ seçilirse

$$J_2 \leq r^{\alpha-n} \|f\|_1 \tag{4.1.7}$$

elde edilir. $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ alınırsa Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \left(\int\limits_{|y|>r} |y|^{(\alpha-n)p'} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \|f\|_p \\ &\leq Cr^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

yazılır. Böylece (4.1.6) ve (4.1.8) ifadelerinde $1\leq p<\dfrac{n}{\alpha}$ alındığında tüm $x\in\mathbb{R}^n$ için

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(r^{\alpha} Mf(x) + r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p\right)$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında,

$$f(r) = r^{\alpha} Mf(x) + r^{\alpha-\frac{n}{p}} \|f\|_p$$

alalım ve bu ifadenin en küçük değerini bulalım. Bunun için,

$$f'(r) = \alpha r^{\alpha-1} Mf(x) + \left(\alpha - \tfrac{n}{p}\right) r^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_p = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha r^{\frac{n}{p}} Mf(x) = \left(\frac{n}{p} - \alpha\right) \|f\|_p$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad r^{\frac{n}{p}} &= \frac{\left(\frac{n}{p}-\alpha\right)\|f\|_p}{\alpha Mf(x)} \\ &= \left(\frac{n}{p\alpha}-1\right)\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\end{aligned}$$

$$r = \left(\frac{n}{p\alpha}-1\right)^{\frac{p}{n}} \|f\|^{\frac{p}{n}} (Mf(x))^{-\frac{p}{n}}$$

eşitliğini elde ederiz. Burada $c_1 = \left(\frac{n}{p\alpha}-1\right)^{\frac{p}{n}}$ için,

$$r = c_1 \|f\|^{\frac{p}{n}} (Mf(x))^{-\frac{p}{n}}$$

dir. O halde,

$$|I_\alpha f(x)| \leq C\left(r^\alpha Mf(x) + r^{\alpha-\frac{n}{p}}\|f\|_p\right) = C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}[Mf(x)]^{1-\frac{\alpha p}{n}}$$

olduğu görülür.

Teorem 4.1.1 (Hardly-Littlewood-Sobolev Teoremi): Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Bu durumda,

i. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\left(1 < p < \frac{\alpha}{n}\right)$ ise $\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p$ dir.

ii. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve tüm $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}, \quad C = C(\alpha, n, p)$$

dir.

İspat *i.* $\left(1-\frac{\alpha p}{n}\right)q = p$ olacağı açıktır. Lemma 4.1.1 ve $1 < p < \infty$ olmak üzere Hardly-Littlewood maksimal operatörünün L^p-sınırlılığından,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}\|Mf\|_p^{1-\frac{\alpha p}{n}} \leq C\|f\|_p$$

eşitsizliği kolayca yazılır.

ii. Lemma 4.1.1 ve M operatörünün zayıf $(1,1)-$sınırlılığı gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left|\{x\in\mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)|>\lambda\}\right| &= \left|\left\{x\in\mathbb{R}^n : Mf(x)>\left(\frac{\lambda}{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\right\}\right| \\
&\leq C_1\left(\frac{C\|f\|_1^{\frac{\alpha}{n}}}{\lambda}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\|f\|_1 \\
&\leq \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}
\end{aligned}$$

yazılır.

Şimdi I_α Riesz potansiyeli için birkaç hatırlatma verelim.

Hatırlatma 4.1.1: Teorem 4.1.1 in (ii) kısmı

$$\|I_\alpha f\|_{\frac{n}{n-\alpha}}\leq C\|f\|_1 \tag{4.1.9}$$

olarak yazılamaz. Şimdi bu durumun sağlanmayacağına dair örnekler verelim. $|y|\leq 1$ iken $f(y)=1$ ve $|y|>1$ iken $f(y)=0$ olsun. Bu durumda,

$$I_\alpha f(x)=\frac{1}{\gamma(x)}\int\limits_{|y|\leq 1}\frac{dy}{|x-y|^{n-\alpha}}$$

olur. $|x|>1$ ve $|y|\leq 1$ için

$$|x-y|\leq |x|+|y|\leq |x|+1<2|x|$$

yazılabilir. Bundan dolayı,

$$|I_\alpha f(x)|\geq \frac{C}{|x|^{n-\alpha}},\quad x>1$$

olacaktır. O halde

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|I_\alpha f(x)|^{\frac{n}{n-\alpha}}dx\geq C\int\limits_{|x|>1}\frac{dx}{|x|^n}=\infty$$

olacaktır.

Hatırlatma 4.1.2: $p=\dfrac{n}{\alpha}$ iken Teorem 4.1.1 in (i) si doğru değildir. Bunun için f fonksiyonunu,

$$f(x)=\begin{cases} |x|^{-\alpha}\left(\log\dfrac{1}{|x|}\right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)} & , \ |x|\leq \dfrac{1}{2} \\ 0 & , \ |x|>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada ε yeterince küçük bir sayıdır. O halde $f \in L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ olduğu açıktır. Ancak her ε, $\dfrac{n}{\alpha}(1+\varepsilon) \leq 1$ ifadesi sağlayacak şekilde seçilirse

$$I_\alpha f(0) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|x| \leq \frac{1}{2}} |x|^{-n} \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^{-\frac{\alpha}{n}(1+\varepsilon)} dx = \infty$$

olur. Dolayısı ile $I_\alpha(f)$ aslında orjin etrafında sınırlı değildir. Bu yüzden $I_\alpha f(x) \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dir.

4.2 Riesz Potansiyelinin Ağırlıklı Sınırlılığı

I_α nın ağırlıklı sınırlılığını incelemek için öncelikle kesirli M_α maksimal operatörünü ifade etmek gerekir. $0 < \alpha < n$ ve $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ için

$$M_\alpha(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{|y|\le r} |f(x-y)|\, dy \tag{4.2.1}$$

dir. Buna denk bir tanım ise

$$M_\alpha(f)(x) = \sup_{Q_x} \frac{1}{|Q_x|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int\limits_{Q_x} |f(y)|\, dy \tag{4.2.2}$$

olarak ifade edilebilir. Buradaki supremum $\mathbb{R}^n$ de, kenarları eksenlere paralel ve merkezi x ekseni üzerinde olan tüm Q_x küpleri üzerinden alınmaktadır. M_α kesirli maksimal operatörü bazı durumlarda I_α yardımıyla karakterize edilecektir. Yani $0 < \alpha < n$, $f \in L_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_\alpha(f)(x) \le \gamma(\alpha)\, I_\alpha(|f|)(x) \tag{4.2.3}$$

dir. Gerçekten $x \in \mathbb{R}^n$ ve belirli $r > 0$ sabiti için

$$\begin{aligned} I_\alpha(|f|)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &\ge \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{|y|\le r} \frac{|f(x-y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy \\ &\ge \frac{1}{\gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{|y|\le r} |f(x-y)|\, dy \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki yanının $r > 0$ için supremumu alınırsa, istenen elde edilir.

Teorem 4.2.1: $0 < \alpha < n$, $1 \le p \le \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

i. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\left(1 < p \le \frac{n}{\alpha}\right)$ ise

$$\|M_\alpha f\|_q \le C\, \|f\|_p$$

ii. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve her bir $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > \lambda\}| \le \left(\frac{C}{\lambda}\|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

dir. Buradaki C, α, n, p ye bağlıdır.

İspat: Bu teoremin ispatı Hardy-Littlewood Sobolev teoremi, (4.2.3) eşitsizliği ve $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ yardımıyla kolayca görülür. Ayrıca $p = \frac{n}{\alpha}$ için Hölder eşitsizliği yardımıyla M_α nın $L^{\frac{n}{\alpha}}(\mathbb{R}^n)$ den $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlı olduğu açıktır.

Şimdi M_α kesirli (fractional) maksimal operatörünün ağırlıklı sınırlılığını inceleyelim. Bunun için öncelikle $A(p,q)$ sınıfını ve $A(p,q)$ sınıfı ile A_p sınıfı arasındaki ilişkiyi araştıralım.

$w(x)$, $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan ve lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. $w \in A(p,q)(1 < p, q < \infty)$ olmak üzere $C > 0$ sabiti vardır öyleki, $\mathbb{R}^n$ deki her bir Q kübü için

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^{-p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \leq C < \infty \tag{4.2.5}$$

dir. $w(x) \in A(1,q)\,(1 < q < \infty)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ deki her bir Q kübü için

$$\sup_Q \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(ess\sup_Q \frac{1}{w(x)} \right) \leq C < \infty \tag{4.2.6}$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

Teorem 4.2.2 ($A(p,q)$ ve A_p arasındaki ilişki): $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

i. $p > 1$ ise $w \in A(p,q) \Leftrightarrow w^q \in A_{q\frac{n-\alpha}{n}} \Leftrightarrow w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}} \Leftrightarrow w^{-p'} \in A_{1+\frac{p'}{q}}$

ii. $p > 1$ ise $w \in A(p,q) \Rightarrow w^q \in A_q$ ve $w^p \in A_p$

iii. $p = 1$ ise $w \in A(1,q) \Leftrightarrow w^q \in A_1$

dir.

Teorem 4.2.3: $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w \in A(p,q)$ olsun. $\forall \lambda > 0$ ve $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n, w^p)$ için

$$\left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > \lambda\}} w(x)^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) w(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.7}$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

İspat: $\lambda > 0$ ve $K > 0$ için

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_\alpha f(x) > \lambda\}$$

$$E_{\lambda,K} = E_\lambda \cap B(0,K)$$

alalım. Burada $B(0,K) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < K\}$ dir. Bundan dolayı, her bir $x \in E_{\lambda,K}$ için, M_α operatörünün tanımı yardımıyla

$$|Q_x|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int\limits_{Q_x} |f(y)|\, dy > \lambda \tag{4.2.8}$$

olacak şekilde bir Q_x kübü vardır. $E_{\lambda,K} \subset \bigcup\limits_{x \in E_{\lambda,K}} Q_x$ olduğundan $E_{\lambda,K} \subset \bigcup\limits_j Q_{x_j}$ olacak şekilde $\{x_j\} \subset E_{\lambda,K}$ vardır. $\{Q_{x_j}\}$ sınırlıdır, yani $\exists C = C(n)$ için,

$$\sum_j \chi_{Q_{x_j}}(x) \le C(n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

dir (Burada Besicovitch overlapping teoremi uygulanmıştır [Garcia-Cuerva 1985]). Buradan,

$$\left(\int\limits_{E_{\lambda,K}} w(y)^q\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \le \left(\sum_j \int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^q\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. $\dfrac{p}{q} < 1$ için (4.2.9) un sağ tarafı

$$\sum_j \left(\int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^q\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \tag{4.2.10}$$

olur. Tüm Q_{x_j} ler için (4.2.8) ifadesi sağlandığından (4.2.9) ile (4.2.10) un kombinasyonu

$$\left(\int\limits_{E_{\lambda,K}} w(y)^q\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \le \sum_j \left(\int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^q\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \left(\frac{1}{\lambda \left|Q_{x_j}\right|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int\limits_{Q_x} |f(y)|\, dy \right)^p \tag{4.2.11.}$$

eşitsizliğini sağlar. $p > 1$ için Hölder eşitsizliği ve (4.2.5) den

$$\begin{aligned}
&\left(\int\limits_{E_{\lambda,K}} w(y)^q \, dy\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq \sum_j \left(\int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^q \, dy\right)^{\frac{p}{q}} \lambda^{-p} \left|Q_{x_j}\right|^{1-p-\frac{p}{q}} \int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)|^p \, dy \left(\int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^{-p'} \, dy\right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq C\lambda^{-p} \sum_j \int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)|^p \, dy \\
&\leq C\lambda^{-p} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, w(y)|^p \, dy
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

olur. Elde edilen bu eşitsizliğin sağ tarafındaki son terim $\left\{Q_{x_j}\right\}$ nin özelliğinden dolayı sonlu örtüye sahiptir. Buradaki C sabiti ise K yarıçapından bağımsızdır. Dolayısıyla monoton yakınsaklık teoremi (4.2.12) yi sağlar.

$p = 1$ için

$$\begin{aligned}
\int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)| \, dy &= \int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)| \, w(y)^{-1} \, dy \\
&\leq ess\sup_{Q_{x_j}} w(y)^{-1} \int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)| \, dy
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

vardır. (4.2.11), (4.2.13) ve (4.2.6) dan

$$\begin{aligned}
&\left(\int\limits_{E_{\lambda,K}} w(y)^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sum_j \frac{1}{\lambda} \left(\int\limits_{Q_{x_j}} w(y)^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} \frac{1}{\left|Q_{x_j}\right|^{\frac{1}{q}}} ess\sup_{Q_{x_j}} \frac{1}{w(y)} \left(\int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)| \, dy\right) \\
&\leq C\frac{1}{\lambda} \sum_j \int\limits_{Q_{x_j}} |f(y)\, w(y)| \, dy \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(y)\, w(y)| \, dy
\end{aligned}$$

yazılır. O halde $k \to \infty$ alırsak $p = 1$ için (4.2.7) sağlanır.

Teorem 4.2.4: Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. $w \in A(p,q)$ olmak üzere

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [M_\alpha f(x)\, w(x)]^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, w(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.14}$$

dir. Burada C, f den bağımsızdır.

İspat: $w \in A(p,q)$ olduğu için, Teorem 4.2.2 nin (i) kısmından $w^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ vardır. A_p-ağırlığının temel özelliklerinden $w^q \in A_s$ olacak şekilde $1 < s < 1+\frac{q}{p'}$ vardır. Şimdi aşağıdakiler sağlanacak şekilde p_1 ve q alalım,

$$1 < p_1 < p \quad , \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n} \quad \text{ve} \quad s = 1 + \frac{q_1}{p_1'}. \tag{4.2.15}$$

Böylece (4.2.15) ve Teorem 4.2.2 nin (i) kısmından dolayı $w^{\frac{q}{q_1}} \in A(p_1, q_1)$ olduğu açıktır. Teorem 4.2.3 den yararlanarak her bir $\lambda > 0$ için

$$\left(\int_{E_\lambda} \left[w(x)^{\frac{q}{q_1}}\right]^{q_1} dx\right)^{\frac{p_1}{q_1}} \le C\lambda^{-p_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1} \left(w(x)^{\frac{q}{q_1}}\right)^{p_1} dx\right)$$

yazılır. Bu eşitsizlik,

$$\left(\int_{E_\lambda} v(x)\, dx\right)^{\frac{p_1}{q_1}} \le C\lambda^{-p_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_1}\, v(x)^{\frac{p_1}{q_1}}\, dx\right) \tag{4.2.16}$$

ifadesine denktir. Burada $v(x) = w^q(x)$ dir.
$f(x) = g(x)\, v(x)^{\frac{\alpha}{n}}$ alınarak

$$T(g)(x) = M_\alpha \left(g v^{\frac{\alpha}{n}}\right)(x)$$

şeklinde bir altlineer operatör tanımlayalım. Böylece (4.2.16) ifadesini bu yeni tanımlamalar altında yeniden yazarsak,

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : T(g)(x) > \lambda\}} v(x)\, dx \le C\lambda^{-q_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_1}\, v(x)\, dx\right)^{\frac{q_1}{p_1}} \tag{4.2.17}$$

olur. Diğer taraftan, $p < p_2 < \dfrac{n}{\alpha}$ olacak şekilde p_2 alalım ve $\dfrac{1}{q_2} = \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{\alpha}{n}$ sağlasın. O halde

$$1 + \frac{q_2}{p_2'} > 1 + \frac{q}{p'}$$

dir. Teorem 4.2.2 (i) den $w^{\frac{q}{q_2}} \in A(p_2, q_2)$ dir. Benzer şekilde (4.2.17) denkleminden,

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n : T(g)(x)>\lambda\}} v(x)\, dx \le C\lambda^{-q_2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^{p_2} v(x)\, dx \right)^{\frac{q_2}{p_2}} \tag{4.2.18}$$

yazılır. (4.2.17) ve (4.2.18) ifadelerine Marcinkiewicz interpolation teoremini uygularsak

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [T(g)(x)]^q v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p v(x)\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.19}$$

olur. $g(x) = f(x)v(x)^{-\frac{\alpha}{n}}$ ve $v(x) = w(x)^q$ olsun. O halde

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [M_\alpha(f)(x)\, w(x)]^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, w(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

M_α nın ağırlıklı sınırlılığından, I_α Riesz potansiyelinin ağırlıklı sınırlılığını araştıralım. Bir sonraki lemmayı vermeden önce A_α üzerinde bir tanım verelim. $\mathbb{R}^n$ de negatif olmayan $w(x)$ fonksiyonu, her Q kübünde $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ varsa A_∞ durumu sağlanır. $|E| \le \delta\,|Q|$ eşitsizliğini sağlayan Q nun bir ölçülebilir E alt kümesi için

$$\int_E w(x)dx \le \varepsilon \int_Q w(x)dx \tag{4.2.20}$$

vardır. A_∞ koşulunu sağlayan tüm fonksiyonlar A_∞ sınıfını oluşturur. A_∞ ve A_p $(1 \le p < \infty)$ arasıdaki ilişki

$$A_\infty = \bigcup_{p\ge 1} A_p \tag{4.2.21}$$

dir. Şimdi ispatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki Lemma bize I_α ve M_α arasındaki ilişkiyi verecektir [Muckenhoupt 1971].

Lemma 4.2.1: Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $0 < q < \infty$ ve $w(x) \in A_\infty$ olsun. f den bağımsız öyle bir C sabiti vardır ki,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q \, w(x)dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [M_\alpha f(x)]^q \, w(x)dx$$

ve

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^q \int_{\{x:|I_\alpha f(x|)>\lambda\}} w(x)dx \leq C \sup_{\lambda>0} \lambda^q \int_{\{x:M_\alpha f(x)>\lambda\}} w(x)dx$$

dir.

Teorem 4.2.5: Kabul edelim ki $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w(x) \in A(p,q)$ olsun.

i. $1 < p < \infty$ için,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x) \, w(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \, w(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2.22}$$

ii. $p = 1$ ise her bir $\lambda > 0$ için

$$\int_{\{x:|I_\alpha f(x)|>\lambda\}} w(x)^q \, dx \leq \frac{C}{\lambda^q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) \, w(x)| \, dx \right)^q \tag{4.2.23}$$

dır. Burada C f ve λ dan bağımsızdır.

Teorem 4.2.5 in ispatı basittir. Gerçekten, Teorem 4.2.2, $w(x)^q \in A_{1+\frac{q}{p'}}$ $(p > 1)$ veya $w(x)^q \in A_1 \, (p = 1)$ için (4.2.21) denkleminden $w(x)^q \in A_\infty$ elde edilir. Lemma 4.2.1, Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4 birlikte uygulanarak (4.2.22) ve (4.2.23) denklemleri elde edilir.

4.3 Homogen Çekirdekli Kesirli İntegral Operatörü

Bu bölümde I_α Riesz potansiyelinden daha genel olan kesirli integral operatörlerinin ağırlıklı sınırlılığını ve (L^p, L^q) −sınırlılığı ele alacağız.

Ω, $\mathbb{R}^n$ üzerinde sıfırıncı mertebeden homogen bir fonksiyon olsun. Yani her $\lambda > 0$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\Omega \in L^{\frac{n}{n-1}}(S^{n-1})$ iken

$$\Omega(x) = \Omega(\lambda x) \tag{4.3.1}$$

olsun. Burada S^{n-1} $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $0 < \alpha < n$ olan birim küre olarak tanımlanır. Böylece homogen çekirdekli kesirli integral operatör

$$T_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y)\, dy \tag{4.3.2}$$

şeklinde açıklanır. Açıktır ki, $\Omega \equiv 1$ iken $T_{\Omega,\alpha}$ bir sabit olması dışında I_α Riesz potansiyeli ile aynı anlama gelir. Diğer taraftan $\alpha = 0$ ve Ω, S^{n-1} üzerinde azalan momente sahipse

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(x')\, d\sigma(x') = 0 \tag{4.3.3}$$

olur. Böylece $T_{\Omega,\alpha}$ Carderon-Zygmund singüler integral operatörü haline gelir.

Aşağıdaki sonuç, Hardly-Littlewood-Sobolev teoreminin $T_{\Omega,\alpha}$ için sağlandığını gösterir.

Teorem 4.3.1: Kabul edelim ki, $0 < \alpha < n$, $\Omega \in L^{\frac{n}{n-1}}(S^{n-1})$ olmak üzere (4.3.1) sağlasın.

i. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\alpha} f(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_1 \right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

olur.

ii. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\left(1 < p < \dfrac{n}{\alpha}\right)$ ise $\|T_{\Omega,\alpha} f\|_q \leq C \|f\|_p$ dir. Burada $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ ve $C = C(n, \alpha, p)$ dir.

İspat: İspatı üç adımda yapacağız. Burada,

$$K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^{n-\alpha}}$$

ve

$$E(s)=\{x\in\mathbb{R}^n:|K(x)|>s\}$$

alalım. İlk olarak $\forall s>0$ için

$$|E(s)|\leq As^{-\frac{n}{n-\alpha}} \tag{4.3.4}$$

sağlandığını gösterelim. Burada A, α ve n ye bağlıdır. Gerçekten, (4.3.1) yardımıyla,

$$\begin{aligned}|E(s)| &\leq \frac{1}{s}\int\limits_{E(s)}\frac{|\Omega(x)|}{|x|^{n-\alpha}}dx\\ &= \frac{1}{s}\int\limits_{S^{n-1}}|\Omega(x')|\int_0^{\left(\frac{|\Omega(x')|}{s}\right)^{\frac{1}{n-\alpha}}} r^{\alpha-1}drd\sigma(x')\\ &= As^{\frac{-n}{n-\alpha}}\end{aligned}$$

eşitsizliğini yazarız. Burada $A=\dfrac{1}{\alpha}\|\Omega\|^{\frac{n}{n-\alpha}}_{L^{\frac{n}{n-\alpha}}(S^{n-1})}$ dir.

Şimdi $1\leq p<\dfrac{n}{\alpha}$, $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\alpha}{n}$ için $T_{\Omega,\alpha}$ nın $(p,q)-$zayıf tipli olduğunu gösterelim. Belirli bir $\mu>0$ sabiti için

$$K_1(x)=sgn\left(K\left(x\right)\right)\left(\left|K\left(x\right)\right|-\mu\right)\chi_{E(\mu)}(x)$$

ve

$$K_2(x)=K(x)-K_1(x)$$

alalım. Buradan $p=1$ ise $\|K_2\|_\infty\leq\mu$, ve $1<p<\dfrac{n}{\alpha}$ ise (4.3.4) den

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|K_2(x)|^{p'}dx &= p'\int\limits_0^{\mu}s^{p'-1}|E(s)|ds\\ &\leq p'A\int\limits_0^{\mu}s^{p'-1-\frac{n}{n-\alpha}}ds\\ &= \frac{p'A}{p'-\frac{n}{n-\alpha}}.\mu^{p'-\frac{n}{n-\alpha}}\\ &= \frac{n-\alpha}{n}Aq\mu^{\frac{n}{n-\alpha}\frac{p'}{q}}\end{aligned}$$

dir. Böylece $1 \leq p < \dfrac{n}{\alpha}$ için,

$$\left\|K_2\right\|_{p'} \leq \left(\frac{n-\alpha}{n}Aq\right)^{\frac{1}{p'}} \mu^{\frac{n}{(n-\alpha)q}} \tag{4.3.5}$$

vardır. Bu yüzden Hölder eşitsizliği

$$\left\|K_2 * f\right\|_{\infty} \leq \left(\frac{n-\alpha}{n}Aq\right)^{\frac{1}{p'}} \mu^{\frac{n}{(n-\alpha)q}} \left\|f\right\|_p$$

ifadesini sağlar.

Şimdi $\forall\lambda > 0$ için

$$\left(\frac{n-\alpha}{n}Aq\right)^{\frac{1}{p'}} \mu^{\frac{n}{(n-\alpha)q}} \left\|f\right\|_p = \frac{\lambda}{2}$$

denklemeni sağlayacak şekilde μ alalım. O zaman,

$$\left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |K_2 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| = 0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\alpha}f(x)| > \lambda\}| &\leq \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n : |K_1 * f(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \\ &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\left\|K_1 * f\right\|_p\right)^p \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

yazılır. (4.3.4) denkleminden,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_1(x)|\, dx &= \int\limits_{E(\mu)} (|K(x)| - \mu)\, dx \\ &\leq \int\limits_0^\infty |E(t+\mu)|\, dt \\ &\leq A\int\limits_\mu^\infty t^{-\frac{n}{n-\alpha}} dt \\ &= \frac{\alpha A}{n-\alpha}\mu^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}} \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

vardır. Her $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için (4.3.7) yardımıyla,

$$|K_1 * f(x)| \leq \left\|f\right\|_\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_1(x)|\, dx \leq \frac{\alpha A}{n-\alpha}\mu^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}} \left\|f\right\|_\infty \tag{4.3.8}$$

yazılır. $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|K_1 * f\|_1 \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |K_1(x-y)|\,|f(y)|\,dydx \leq \frac{\alpha A}{n-\alpha}\mu^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}}\|f\|_1 \tag{4.3.9}$$

dir. Böylece (4.3.8) ve (4.3.9) ifadelerinden $T_1 : f \mapsto K_1 * f$ nin $(\infty,\infty)-$tipli ve $(1,1)-$tipli olduğu görülür. The Riesz-Thörin teoremi, T_1 operatörünün $(1 < p < \infty)$ için $(p,p)-$tipli olduğunu ve

$$\|T_1\|_{(p,p)} \leq \frac{\alpha A}{n-\alpha}\mu^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}} \tag{4.3.10}$$

eşitsizliğini sağladığını gösterir. (4.3.6) ve (4.3.10) un kombinasyonundan

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n : |T_{\Omega,\alpha}f(x)| > \lambda\}| &\leq \left(\frac{2}{\lambda}\frac{\alpha A}{n-\alpha}\mu^{-\frac{\alpha}{n-\alpha}}\|f\|_p\right)^p \\ &= C\left(\frac{1}{\lambda}\|f\|_p\right)^q \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

yazılır. Burada C ve λ, f den bağımsızdır. Dolayısıyla Teoremin (i) kısmı ispatlanmış olur. Şimdi (ii) kısmını gösterelim. $\forall 1 < p < \frac{n}{\alpha}$ için, $p < p_0 < \frac{n}{\alpha}$ olmak üzere p_0 ve $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere q_0 seçelim. İkinci durumdan $T_{\Omega,\alpha}$ nın $(p_0,q_0)-$zayıf tipli olduğu açıktır. (i) ve Marcinkiewicz interpolation teoreminden dolayı, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere $T_{\Omega,\alpha}$ operatörünün $(p,q)-$tipli olduğu görülür. Gerçekten, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \theta$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{(n-\alpha)\theta}{n}$ olacak şekilde $0 < \theta < 1$ vardır. Böylece ispat tamamlanır.
Teorem 4.3.1 in ispatı yardımıyla daha genel bir sonuç elde edilebilir.
Kabul edelim ki $K(x)$, $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir f fonksiyonu için,

$$Tf(x) = (K * f)(x)$$

olsun. $1 < r < \infty$ olmak üzere $\forall s > 0$ için

$$\{x \in \mathbb{R}^n : |K(x)| > s\} \leq Cs^{-r}$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa o zaman $1 \leq p < r'$ ve $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$ için

i. $p = 1$ iken, T $(1,r)-$zayıf tipli, *ii.* $1 < p < r'$ iken, T $(p,q)-$tiplidir.

Aşağıdaki $T_{\Omega,\alpha}$ ile ilişkili operatör, homogen çekirdekli bir kesirli maksimal operatördür. Bu da,

$$M_{\Omega,\alpha}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{|y|\leq r} |\Omega(y)| \, |f(x-y)| \, dy \tag{4.3.12}$$

şeklinde tanımlanır. (4.2.3) ün ispatındaki düşünceden, $M_{\Omega,\alpha}$ ve $T_{\Omega,\alpha}$ arasında bir ilişki bulabiliriz.

Lemma 4.3.1: Kabul edelim ki, $0 < \alpha < n$ ve $\Omega \in L^{\frac{n}{n-\alpha}}(S^{n-1})$, (4.3.1) ifadesi sağlasın. O halde

$$M_{\Omega,\alpha} \leq C(n,\alpha) T_{|\Omega|,\alpha}(|f|)(x)$$

dir. Buradan Lemma 4.3.1 ve Teorem 4.3.1 den homogen çekirdekli kesirli maksimal operatörünün $(L^p, L^q)-$sınırlılığını elde edilir. Şimdiye kadar yapılanlardan, ispat etmeden şu teoremi verebiliriz.

Teorem 4.3.2: Kabul edelim ki, $0 < \alpha < n$, $\Omega \in L^{\frac{n}{n-\alpha}}(S^{n-1})$ olmak üzere (4.3.1) ifadesini sağlasın.

i. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : M_{\Omega,\alpha}f(x) > \lambda\}| \leq \left(\frac{C}{\lambda} \|f\|_1\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$

ii. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $\left(1 < p \leq \frac{n}{\alpha}\right)$ ise $\|M_{\Omega,\alpha}f\|_q \leq C\|f\|_p$ dir. Burada $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $C = C(n,\alpha,p)$ dir.

4.4 $T_{\Omega,\alpha}$ nın Ağırlıklı Sınırlılığı

Bu bölümde I_α Riesz potansiyelinin ağırlıklı sınırlılığının homogen çekirdekli $T_{\Omega,\alpha}$ kesirli integral operatörüne genişlemesi incelenecektir. $M_{\Omega,\alpha}$ homogen çekirdekli kesirli maksimal operatörünün ağırlıklı sınırlılığı gösterilecektir. Burada Ω, sıfırıncı dereceden homogen ve daha önce tanımlandığı gibi alınacaktır.

Teorem 4.4.1: Kabul edelim ki, $0 < \alpha < n$, $1 \leq s' < p < \dfrac{n}{\alpha}$ ve $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ olsun. $\Omega \in L^s\left(S^{n-1}\right)$ ve $w(x)^{s'} \in A\left(\dfrac{p}{s'}, \dfrac{q}{s'}\right)$ ise

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\Omega,\alpha} f\left(x\right) w(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|f\left(x\right) w(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde f den bağımsız bir C sabiti vardır.

İspat: Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} M_{\Omega,\alpha} f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int\limits_{|y|\leq r} \left|\Omega\left(y\right)\right| \left|f\left(x-y\right)\right| dy \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \left(\int\limits_{|y|\leq r} \left|f\left(x-y\right)\right|^{s'} dy\right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int\limits_{|y|\leq r} \left|\Omega\left(y\right)\right|^{s} dy\right)^{\frac{1}{s}} \\ &\leq C \left\|\Omega\right\|_{L^s(S^{n-1})} \sup_{r>0} \left(\frac{1}{r^{n-\alpha s'}} \int\limits_{|y|\leq r} \left|f\left(x-y\right)\right|^{s'} dy\right)^{\frac{1}{s'}} \\ &= C \left\|\Omega\right\|_{L^s(S^{n-1})} \left(M_{\alpha s}\left(|f|^{s'}\right)(x)\right)^{\frac{1}{s'}} \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

yazılır. Hipotezin koşulları $0 < \alpha s' < n$, $1 < \dfrac{p}{s'} < \dfrac{n}{\alpha s'}$ ve $\dfrac{1}{(q/s')} = \dfrac{1}{(p/s')} - \dfrac{\alpha s'}{n}$ sağlar.

(4.4.1) ve Teorem 4.2.4 yardımıyla,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\Omega,\alpha} f\left(x\right) w(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\alpha s'}\left(|f|^{s'}\right)(x)\, w(x)^{s'}(x)\right)^{\frac{q}{s'}} dx\right)^{\frac{s'}{q}}\right]^{\frac{1}{s'}}$$

$$\leq C\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x)|^{s'} w(x)^{s'}(x)\right)^{\frac{p}{s'}} dx\right)^{\frac{s'}{p}}\right]^{\frac{1}{s'}}$$

$$= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)w(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Bu da teoremin ispatıdır.

Aşağıdaki lemma, homogen çekirdekli kesirli maksimal operatörleri ve homogen çekirdekli kesirli integral operatörleri arasındaki noktasal ilişkiyi verir.

Lemma 4.4.1: Kabul edelim ki $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ için $0 < \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon < n$ sağlasın. O halde

$$|T_{\Omega,\alpha} f(x)| \leq C\left(n, \alpha, \varepsilon\right)\left(M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\left(M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f\left(x\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.4.2}$$

vardır.

İspat: $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ hipotezden vardır. $\delta > 0$ alalım, öyleki

$$\delta^{2\varepsilon} = \frac{M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f\left(x\right)}{M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f\left(x\right)}$$

olsun. Bu durumda,

$$T_{\Omega,\alpha} f(x) = \int_{|x-y|<\delta} \frac{\Omega\left(x-y\right)}{|x-y|^{n-\alpha}} f\left(y\right) dy + \int_{|x-y|\geq\delta} \frac{\Omega\left(x-y\right)}{|x-y|^{n-\alpha}} f\left(y\right) dy := I_1 + I_2$$

yazalım. Böylece

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^{-j-1}\delta \leq |x-y| < 2^{-j}\delta} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| \, dy \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-j-1}\delta\right)^{-(n-\alpha)} \int_{|x-y| < 2^{-j}\delta} |\Omega(x-y)| \, |f(y)| \, dy \\
&\leq C\delta^{\varepsilon} M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{j-1}\delta \leq |x-y| < 2^{j}\delta} \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} |f(y)| \, dy \\
&\leq C \sum_{j=1}^{\infty} \left(2^{j}\delta\right)^{-\varepsilon} \frac{1}{\left(2^{j}\delta\right)^{n-\alpha-\varepsilon}} \int_{|x-y| < 2^{j}\delta} |\Omega(x-y)| \, |f(y)| \, dy \\
&\leq C\delta^{-\varepsilon} M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)
\end{aligned}
$$

yazılır. Buraya kadar yapılanlardan,

$$
\begin{aligned}
|T_{\Omega,\alpha} f(x)| &\leq C \left(\delta^{\varepsilon} M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x) + \delta^{-\varepsilon} M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\right) \\
&= 2C \left(M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\right)^{\frac{1}{2}} \left(M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$T_{\Omega,\alpha}$ nın ağırlıklı sınırlılığını göstermek için $A(p,q)$ nın aşağıdaki özelliğini verelim.

Lemma 4.4.2: $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w \in A(p,q)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

i. $\varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < n$

ii. $\frac{1}{p} > \frac{\alpha+\varepsilon}{n}$, $\frac{1}{q} < \frac{n-\varepsilon}{n}$

iii. $w \in A(p, q_{\varepsilon})$, $w \in A(p, \widetilde{q_{\varepsilon}})$ sağlanr. Burada

$$
\frac{1}{q_{\varepsilon}} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\varepsilon}{n} \quad , \quad \frac{1}{\widetilde{q_{\varepsilon}}} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-\varepsilon}{n}
$$

dir.

İspat: $\alpha > 0$ ve $q > 1$ olduğu için, $\varepsilon_1 < \alpha$ ve

$$
\frac{1}{q} + \frac{\varepsilon_1}{n} < 1
$$

olacak şekilde $\varepsilon_1 > 0$ seçebiliriz.

$$\frac{1}{q_{\varepsilon_1}} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha - \varepsilon_1}{n} = \frac{1}{q} + \frac{\varepsilon_1}{n}$$

olsun. O halde $q > q_{\varepsilon_1} > 1$ ve $1 + \frac{p'}{q} < 1 + \frac{p'}{q_{\varepsilon_1}}$ dir. Teorem 4.2.2 ile A_p-ağırlığından,

$$w^{-p'} \in A_{1+\frac{p'}{q}} \subset A_{1+\frac{p'}{q_{\epsilon_1}}}$$

dir. Teorem 4.2.2 den dolayı bu kapsamın,

$$w \in A(p, q_{\varepsilon_1}) \tag{4.4.3}$$

ifadesine denk olduğu görülür. Diğer taraftan A_p nin özelliğinden $\eta < \frac{1}{q}$ ve $w^{-p'} \in A_{1+p'\left(\frac{1}{q}-\eta\right)}$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ vardır. $\varepsilon_2 < \min\{\alpha, n-\alpha\}$, $\frac{1}{p} > \frac{\alpha+\varepsilon_2}{n}$ ve $\frac{\varepsilon_2}{n} < \eta$ olacak şekilde $\varepsilon_2 > 0$ alalım

$$\frac{1}{q_{\varepsilon_2}} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha + \varepsilon_2}{n}$$

olsun. O halde $0 < \frac{1}{q_{\varepsilon_2}} < 1$ ve $\frac{1}{q_{\varepsilon_2}} = \frac{1}{q} - \frac{\varepsilon_2}{n} > \frac{1}{q} - \eta$ vardır. Teorem 4.2.2 ve A_p nin özelliğinden,

$$w(x)^{-p'} \in A_{1+p'\left(\frac{1}{q}-\eta\right)} \subset A_{1+\frac{p'}{q_{\varepsilon_2}}}$$

yazılır. Bu da

$$w \in A(p, q_{\varepsilon_2}) \tag{4.4.4}$$

ifadesine denktir.

$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olsun. Buradan ε, ε_1 ve ε_2 nin bütün özelliklerini sağlar. Eğer

$$\frac{1}{q_\varepsilon} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha+\varepsilon}{n} \quad , \quad \frac{1}{\widetilde{q}_\varepsilon} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha-\varepsilon}{n}$$

alınırsa, (4.4.3) ve (4.4.4) den $w \in A(p, q_\varepsilon)$ ve $w \in A(p, \widetilde{q}_\varepsilon)$ olduğu görülür.

Lemma 4.4.3: $0 < \alpha < n$, $1 \leq s' < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $w(x)^{s'} \in A\left(\frac{p}{s'}, \frac{q}{s'}\right)$ olsun. Aşağıdakiler sağlanacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır.

i. $\varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon < n$

ii. $\frac{1}{p} > \frac{\alpha+\varepsilon}{n}, \frac{1}{q} < \frac{\alpha-\varepsilon}{n}$

iii. $w(x)^{s'} \in A\left(\frac{p}{s'}, \frac{q_\varepsilon}{s'}\right), w(x)^{s'} \in A\left(\frac{p}{s'}, \frac{\widetilde{q_\varepsilon}}{s'}\right)$ dir. Buradaki q_ε ve $\widetilde{q_\varepsilon}$ Lemma 4.4.2 deki gibi seçilir.

Bu Lemmanın ispatı doğrudan Lemma 4.4.2 den elde edilir.

Şimdi $T_{\Omega,\alpha}$ nın ağırlıklı (L^p, L^q) −sınırlılığını ifade ederek ispatlayacağız.

Teorem 4.4.2: $0 < \alpha < n$, $1 \leq s' < p < \frac{n}{\alpha}$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. $\Omega \in L^s(S^{n-1})$ ve $w(x)^{s'} \in A\left(\frac{p}{s'}, \frac{q}{s'}\right)$ ise

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_{\Omega,\alpha} f(x)\, w(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, w(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Bu C sabiti f den bağımsızdır.

İspat: Lemma 4.4.3 de olduğu gibi $\varepsilon > 0$ için,

$$l_1 = 2\frac{q_\varepsilon}{q} \quad , \quad l_2 = 2\frac{\widetilde{q_\varepsilon}}{q}$$

alınırsa $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = 1$ olur. Seçilen bu ε, Lemma 4.4.1 ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |T_{\Omega,\alpha} f(x)\, w(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\, w(x))^{\frac{q}{2}} (M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)\, w(x))^{\frac{q}{2}}\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\, w(x))^{\frac{ql_1}{2}}\, dx\right)^{\frac{1}{ql_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)\, w(x))^{\frac{ql_1}{2}}\, dx\right)^{\frac{1}{ql_2}} \\
&= C \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\, w(x))^{q_\varepsilon}\, dx\right)^{\frac{1}{2q_\varepsilon}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)\, w(x))^{\widetilde{q_\varepsilon}}\, dx\right)^{\frac{1}{2\widetilde{q_\varepsilon}}}
\end{aligned}$$

yazılır. Lemma 4.4.3 ve Teorem 4.4.1 den

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (M_{\Omega,\alpha+\varepsilon} f(x)\, w(x))^{q_\varepsilon}\, dx\right)^{\frac{1}{2q_\varepsilon}} \leq C\, \|f\|_{p,w^p}^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\Omega,\alpha-\varepsilon} f(x)\, w(x)\right)^{\widetilde{q_\varepsilon}} dx\right)^{\frac{1}{2\widetilde{q_\varepsilon}}} \leq C \|f\|_{p,w^p}^{\frac{1}{2}}$$

vardır. O halde

$$\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{q,w(x)^q} \leq C \|f\|_{p,w^p}$$

olur. Şimdi Teorem 4.4.2 nin dual formunu inceleyelim.

Teorem 4.4.3: $0 < \alpha < n$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n}$ ve $s > q$ olsun. $\Omega \in L^s(S^{n-1})$ ve $w(x)^{-s'} \in A\left(\dfrac{q'}{s'}, \dfrac{p'}{s'}\right)$ ise,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_{\Omega,\alpha} f(x)\, w(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\, w(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

İspat: $\widetilde{\Omega}(x) = \overline{\Omega(-x)}$ olsun. O halde $\widetilde{\Omega}$, Ω nın sağladığı koşulları sağlar. $T_{\widetilde{\Omega},\alpha}$ operatörü $T_{\Omega,\alpha}$ nın dual operatörü olduğu kolayca elde edilebilir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned}
\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{q,w(x)^q} &= \sup_{\|g\|_{q',w^{-q'}} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} T_{\Omega,\alpha} f(x)\, g(x) dx\right| \\
&= \sup_{\|g\|_{q',w^{-q'}} \leq 1} \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, T_{\widetilde{\Omega},\alpha} g(x) dx\right| \\
&\leq \|f(x)\|_{p,w^p} \sup_{\|g\|_{q',w^{-q'}} \leq 1} \left\|T_{\widetilde{\Omega},\alpha} g(x)\right\|_{p',w^{-p'}}
\end{aligned}$$

dir. Hipotezde verilen durumlardan $\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q'} - \dfrac{\alpha}{n}$, $s' < q' < \dfrac{n}{\alpha}$ ve $(w^{-1})^{s'} \in A\left(\dfrac{q'}{s'}, \dfrac{p'}{s'}\right)$ vardır. Teorem 4.4.2 den

$$\left\|T_{\overline{\Omega},\alpha} g\right\|_{p',w^{-p'}} \leq C \|g\|_{q',w^{-q'}}$$

yazılır. Böylece

$$\|T_{\Omega,\alpha} f\|_{q,w^q} \leq C \|f\|_{p,w^p}$$

olur.

Teorem 4.4.3 ve Lemma 4.3.1 in bir sonucu olarak Teorem 4.4.1 in dual formunu elde edelim.

Teorem 4.4.4: $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $s > q$ olsun. $\Omega \in L^s\left(S^{n-1}\right)$ ve $w(x)^{-s'} \in A\left(\frac{q'}{s'}, \frac{p'}{s'}\right)$ ise,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_{\Omega,\alpha} f\left(x\right) w(x)\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\left(x\right) w(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

Teorem 4.4.2 ve Teorem 4.4.4 deki ağırlık fonksiyon sınıfının s ye bağlı olduğu açıktır.

Teorem 4.4.5: $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve olsun. $\frac{\alpha}{n} + \frac{1}{s} < \frac{1}{p} < \frac{1}{s'}$, $\Omega \in L^s\left(S^{n-1}\right)$ ifadelerini sağlayan bazı s ler ve $1 < r < \frac{s}{\left(\frac{n}{\alpha}\right)'}$ için $w(x)^{r'} \in A\left(p, q\right)$ ise,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|T_{\Omega,\alpha} f\left(x\right) w(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|f\left(x\right) w(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

olacak şekilde f den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır.

Lemma 4.4.4: $0 < \alpha < n$, $1 < p_0 < p_1 < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. Lineer T operatörü aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar.

$$\|Tf\|_{L^{q_0}(w_0^{q_0})} \leq C_0 \|f\|_{L^{p_0}(w_0^{p_0})}$$

ve

$$\|Tf\|_{L^{q_1}(w_1^{q_1})} \leq C_1 \|f\|_{L^{p_1}(w_1^{p_1})}$$

ise

$$\|Tf\|_{L^{q}(w^{q})} \leq C \|f\|_{L^{p}(w^{p})}$$

olur. Burada $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $w = w_0^{1-\theta} w_1^{\theta}$ ve $C \leq C_0^{1-\theta} C_1^{\theta}\,(0 < \theta < 1)$ dir.

Kaynaklar

[1] **Agrawal, Om P.,** Formulation of Euler-Lagrange Equations for Fractional Variational Problems, J. Math. Anal. Appl, 272, 368-379, 2002

[2] **Babakhani, A., Daftardar-Gejji, V.,** On Calculus of Local Fractional Derivatives, J. Math. Anal. Appl., 270, 66-79, 2002

[3] **Bertram, R.,** Fractional Calculus and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1975

[4] **Butzer, P.L., Westphal, U.,** An Introduction to Fractional Calculus, in: R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, New Jersey, 2000

[5] **Ding, Y., Lu, S.Z., and Yan, D.,** Singular Integrals and Related Topics, World Scientific, China, 2007

[6] **Garcia-Cuerva, J., Rubio de Francia, J.L.**, Weighted Norm Inequalities and Related Topics, Amsterdam, North-Holland, 1985

[7] **Landkoff,** Transl-in New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 424 p., 1972

[8] **Mihlin, S.** Multy-Dimentional Singular Integral Equations (In Russia) English Editions. Pergamo Press. Oxford, 1962

[9] **Miller, K.S., Ross, B.**, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, New York, 1974

[10] **Mizuta, Y.** Continuity Properties of Riesz Potentials and Boundary Limits Beppo Levi Functions. Math. Scand., 1987

[11] **Mizuta, Y.** Continuity Properties of Potentials and Beppo Levi-Deny Functions Hiroshima Math., 1993

[12] **Mizuta, Y.** Properties Theory in Euclidean Spaces Gakuto Internation Series, Tokyo, Japan, 1996

[13] **Muckenhoupt, B., Wheeden, R.**, Weighted Norm Inequalities for Singular and Fractional Integrals, Trans. Amer. Math. Soc., 1971

[14] **Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I.,** Fractional Integrals and Derivatives–Theory and Applications, Gordon and Breach, Longhorne, PA, 1993

[15] **Neri, U.,** Lecture Notes in Mathematica, Springer Verlag, Berlin-New York, 1971

[16] **Oldham, K.B., Spainer, J.,** The Fractional Calculus, Academic Press, New York and London, 1974

[17] **Podlubny, I.,** Fractional Differential Equations, Academic Press, London, 1999

[18] **Riesz,** L. Integrals de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy. Acto Math., 81, no 1-2, 1949

[19] **Schwarz, L.,** Mathematics for The Physiccal Sciences. Hermann, Editeurs Des Sciences et des Arts. Paris, 1966

[20] **Stein, E.M., Weiss, G.**, Interpolation of Operators with Change of Measures, Trans. Amer. Math. Soc., 87(1958), 159-172

[21] **Stein, E.M.,** Singular Integrals Differential Properties of Functions, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970

ÖZGEÇMİŞ

Yadigâr Leyla YURT

Matematik Anabilim Dalı

Eğitim

Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Lise : Söke Hilmi Fırat Anadolu Lisesi

Kişisel Bilgiler

Doğum yeri ve yılı : Aydın-Söke 25.04.1986

Cinsiyeti : Bayan

Yabancı Dili : İngilizce