NÖTRAL VE NÖTRAL OLMAYAN

ÖKLİD GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rafet TÜRK

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

2010

NÖTRAL VE NÖTRAL OLMAYAN ÖKLİD GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rafet TÜRK

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ

Matematik Anabilim Dalı

2010

ONAY SAYFASI

Yrd. Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ danışmanlığında,

Rafet TÜRK tarafından hazırlanan

NÖTRAL VE NÖTRAL OLMAYAN ÖKLİD GEOMETRİSİ ÜZERİNE

başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

01/07/2010

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından

Matematik Anabilim Dalında

Yüksek Lisans tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Unvanı, Adı, SOYADI		İmza
Başkan	Yrd. Doç. Dr. Derya Sağlam	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Nilgün Sönmez	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Murat PEKER	

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetin Kurulu'nun

........./......../........ tarih ve

.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

3.BÖLÜM: NÖTRAL OLMAYAN GEOMETRİ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NÖTRAL VE NÖTRAL OLMAYAN ÖKLİD GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Rafet TÜRK

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Yard. Doç. Dr. Nilgün SÖNMEZ

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Öklid düzlemi ve Öklid düzlemindeki temel kavramlar özetlendi. İkinci bölümde, üçgenin ve çemberin nötral geometrisi verildi. Üçüncü bölümde, üçgenin ve çemberin nötral olmayan geometrisi verildi.

2010, 116 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşlik, Paralellik, Benzerlik

ABSTRACT

Msc. Thesis

ON THE NEUTRAL AND NONNEUTRAL EUCLİDEAN GEOMETRY

Rafet TÜRK

Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Ass. Prof. Dr. Nilgün SÖNMEZ

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, Euclidean plane and basic concepts on the Euclidean plane are summarized. In the second chapter, neutral geometry of triangle and circle are given. In the third chapter, non-neutral geometry of triangle and circle are given.

2010, 116 pages

Keywords: Equality, parallelism, similarity

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli hocam Sayın

Yrd. Doç. Dr. NİLGÜN SÖNMEZ ’e

teşekkürlerimi sunarım.

Rafet TÜRK

Afyonkarahisar, 2010

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\propto$, β	Açı
rad	Radyan
^{o}	Derece
$[AB]$	AB doğru parçası
$[AB$	AB ışını
$\angle AOB$	AOB açısı
$m(\angle AOB)$	AOB açısının ölçüsü
$\triangle ABC$	ABC üçgeni
Ç	Çevre
A,S	Alan
$\triangle(ABC)$	Üçgensel bölge
V_a	a kenarına ait kenarortay
G	Ağırlık merkezi
n_A	A köşesine ait açıortay
h_a	a kenarına ait yükseklik
$\perp$	diklik
$\cong$	eşlik
$\in$	elemanıdır
$\notin$	elemanı değildir
K.A.K.	Kenar Açı Kenar
K.K.K.	Kenar Kenar Kenar
A.A.	Açı Açı
A.K.A.	Açı Kenar Açı

1.BÖLÜM
TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Öklid ve Öklid Geometrisi Hakkında

Bu bölümde tezi anlaşılır kılmak için Öklid geometrisinin tanımı yapılarak Öklid geometrisindeki bazı postulatlar ve aksiyomlar [1],[3],[4],[16],[22] kaynakları esas alınarak özetlendi. Bu postulatlara dayanarak nötral geometrinin tanımı yapıldı.

Resim 1.1 Euclid (M.Ö. 325-M.Ö. 265)

Öklid'in yaşamı konusunda hemen hemen hiçbir şey bilinmiyor. Fakat, Öklid gelmiş geçmiş matematikçilerin içinde adı geometri ile en çok özdeşleştirilen kişidir. Geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yeri kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok, geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilinen tüm bilgileri ismi ile *Elements* adını taşıyan kitabında toplamasıyla elde etmiştir. Öklid önemli kitabı olan *Elemanlar* kitabını yaklaşık milattan önce 300 yıllarında yazdı. Bu kitap 13 tane kitaptan oluşmaktadır. Kitapların başlıkları şöyledir:

- I.Kitap: Benzerlik (üçgenlerin benzerliği, pergel ve cetvelle çizilen basit geometrik şekiller, bir üçgenin açılarına ve kenarlarına ilişkin eşitsizlikler), paraleller (paralel doğruların özellikleri ve paralelkenarlar), Pisagor teoremi.

- II. Kitap: Geometrik cebir $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ gibi bugün cebirsel olarak ele alınan, ama o zamanlar geometrik olarak düşünülen özdeşlikler, alanlar.
- III. Kitap: Daire ve açı ölçümleri.
- IV. Kitap: Daire içine ve dışına çokgenlerin çizimi.
- V. Kitap: Geometrik olarak incelenen şeylerin büyüklükleri ve miktarları arasındaki ilişki, kesirli cebirsel denklemlerin geometrik çözümü.
- VI. Kitap: Çokgenlerin benzerliği.
- VII., VIII. ve IX. Kitaplar: Aritmetik (sayılar teorisi geometrik olarak incelenmiştir)
- X. Kitap: Orantısızlık.
- XI., XII. ve XIII. Kitaplar: Uzay geometrisi (üç boyutlu cisimler, örneğin beş düzgün yüzlü cismin özellikleri incelenmiştir).

Elemanlar kitabına sonradan iki kitap daha eklenmiştir ve bunları Öklid'in yazmadığı tahmin edilmektedir.

- XIV. Kitap'ta bir küre içine çizilen düzgün üç boyutluların mukayesesi yapılmıştır ve bu kitabın Hypsicles (M.Ö. 2. yüzyılın ikinci yarısı) tarafından Apollonius'dan etkilenerek yazıldığı sanılmaktadır.
- XV. Kitap'ta ise düzgün üç boyutluların birbiri içine nasıl çizileceği, açı ve kenar hesaplarının nasıl yapılacağı incelenmiştir. Bu kitabın Miletli Isidore (532) tarafından yazıldığı düşünülmektedir.

İskenderiye'de yazılmış olan Elemanlar'ın içeriğinden çok, kapsamış olduğu konuların sunuluş biçimi önemlidir; Önce bir takım tanımlar, aksiyomlar ve postulatlar verilmiş ve teoremler bunlara dayanarak kanıtlanmıştır. Böylece geometri, belirli tanım ve ilkeler çerçevesinde yapılandırılmıştır.

Elemanlar'da nokta, çizgi, yüzey ve cisim gibi geometrik kavramlar tanımlandıktan sonra, aksiyomlara geçilmiştir. Aksiyom, doğruluğu açık ve seçik olan önerme demektir. Öklid'in aksiyomları şunlardır:

Aksiyomlar:

1. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.
2. Eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, eşitlik bozulmaz.
3. Eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkartılırsa, eşitlik bozulmaz.
4. Birbirine çakışan şeyler birbirine eşittir.
5. Bütün parçadan büyüktür.

Aksiyomlardan sonra da postulatlar verilmiştir. Postulat, ispat edilmeksizin doğru olarak benimsenen önerme demektir. Öklid'in postulatları ise şunlardır:

Postulatlar:

1. İki nokta arasını birleştiren en kısa yol bir doğrudur.
2. Bir doğru, doğru olarak sonsuza kadar uzatılabilir.
3. Bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yeri bir çemberdir.
4. Bütün dik açılar birbirine eşittir.
5. İki doğru bir üçüncü doğru tarafından kesilirse, içte meydana gelen açıların toplamının 180 dereceden küçük olduğu yönde bu iki doğru kesişir.

1.2 Geometrik Kavramlar

1.2.1 Nokta, Doğru, Doğru Parçası, Işın

Tanım 1.2.1.1: Nokta, geometrinin en temel kavramıdır. Kesin tanımını yapamayız, fakat açıklayabiliriz. Toplu iğnenin bıraktığı iz; kalemin sivri ucunun deftere değdirildiğinde bıraktığı işaret, tebeşirin tahtaya dokundurulmasıyla elde edilen "·" biçiminde işaretin kapsadığı yer olarak düşünülebilir. Bu örnekler bize nokta hakkında bilgi verir. Ancak, nokta olarak düşünülen bu izlerin bir büyüklüğü vardır. Oysa noktayı eni, boyu, derinliği olmayan bir nesne olarak düşünmek gerekir. $A,B,C...$ gibi büyük harfler ile isimlendirilir.

Tanım 1.2.1.2: İki uçtan sınırsız noktalar kümesine *doğru* denir. [2]

Şekil 1.2.1.1

Tanım 1.2.1.3: İki nokta ile bu iki nokta arasında kalan noktaların birleşimine *doğru parçası* denir. $[AB]$ sembolüyle gösterilir.

Şekil 1.2.1.2

Tanım 1.2.1.4: Işın, bir başlangıç noktası olup sonsuza giden noktalar kümesidir.

Şekil 1.2.1.3

$[AB$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.2.1.5: $[AB$ ışınından A noktasının çıkarılması ile elde edilen kümeye AB *yarı doğrusu* denir.

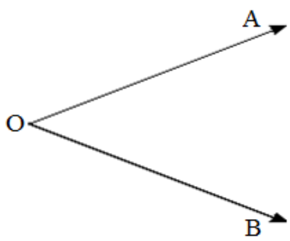
Şekil 1.2.1.4

$]AB$ sembolüyle gösterilir. [14]

1.2.2 Açı ile ilgili Temel Kavramlar

Tanım 1.2.2.1: Düzlemde başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine *açı* denir. Başlangıç noktasına *açının köşesi*, ışınlara da *açının kenarları* denir.

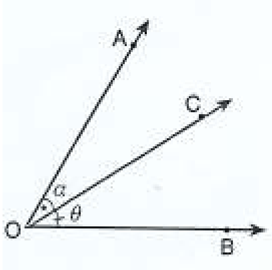
$[OA$ ve $[OB$ açının kenarları, O noktası ise açının köşesidir



Şekil 1.2.2.1

Köşesi O, kenarları $[OA$ ve $[OB$ olan açı $\angle AOB, \angle BOA$ veya $\angle O$ şeklinde gösterilir. [11]

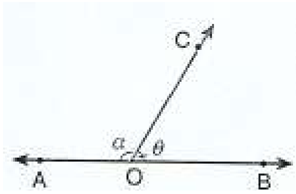
Tanım 1.2.2.2: Birer kenarları ortak, iç bölgeleri ayrık; başka bir deyişle köşeleri ve birer kenarları ortak olan, fakat hiç ortak iç noktaları olmayan iki açıya *komşu açılar* denir.



Şekil 1.2.2.2

Şekil 1.2.2.2 de $\angle AOC$ ile $\angle COB$ komşu açılardır.

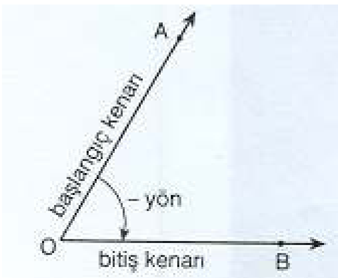
Tanım 1.2.2.3: Ortak olmayan kenarları zıt ışınlar olan komşu iki açıya *doğrusal çift* oluştururlar denir.



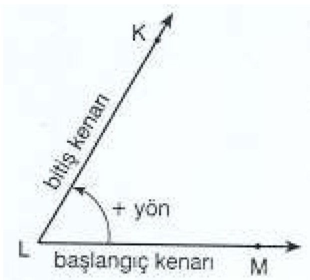
Şekil 1.2.2.3

Şekil 1.2.2.3 de A,O ve B noktaları doğrusal $[OA$ ile $[OB$ zıt ışınlar olduğundan $\angle AOC$ ve $\angle COB$ doğrusal çift oluştururlar.

Tanım 1.2.2.4: Bir açının kenarlarından biri başlangıç, diğeri bitiş kenarı olarak düşünülürse, saatin dönme yönü negatif, tersi yönü ise pozitif yön olarak kabul edilir. Böyle açılara *yönlü açılar* denir.



Şekil 1.2.2.4
$\angle AOB$ negatif yönlü açı



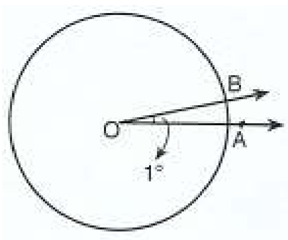
Şekil 1.2.2.5
$\angle MLK$ pozitif yönlü açı

1.2.3 Açının Ölçüsü

Bir AOB açısı içerisinde birim olarak seçilen açının kaç defa bulunduğunu gösteren sayıya AOB açısının *ölçüsü* denir.

AOB açısının ölçüsü $m(\angle AOB)$ şeklinde gösterilir. Açıları ölçebilmek için bir ölçü birimi olması gerekir. Bu ölçü birimleri derece, radyan ve graddır. Açılar derece ya da grad bölmeli iletki adı verilen bir aletle ölçülür. [2]

Tanım 1.2.3.1: Bir çember yayı 360 eş parçaya bölünürse, 360 eş yay elde edilir. Bu eş yaylardan birini gören merkez açının ölçüsüne *1 derece* denir. Bir derece 1° şeklinde gösterilir. Bu açıya da 1° *lik açı* denir. O noktası çemberin merkezi, $|OA| = |OB| = r$ çemberin yarıçapıdır.



Şekil 1.2.3.1

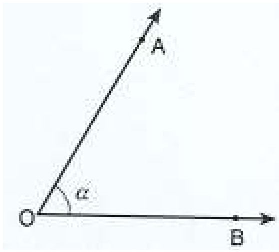
$$\left|\overset{\frown}{AB}\right| = \frac{2\pi r}{360^0} \Rightarrow m(\angle AOB) = 1^0$$

1 dereceden daha küçük ölçüleri hesaplamak için daha küçük açı ölçü birimlerine ihtiyaç duyulur. Dereceden daha küçük olan bu ölçü birimleri dakika ve saniyedir. Bu birimlere derecenin askatları denir.

Bir derecenin $\frac{1}{60}$ ına *1 dakika*, bir dakikanın $\frac{1}{60}$ ına da *1 saniye* denir.

Bir dakikalık açı $1'$ ve bir saniyelik açı da $1''$ şeklinde gösterilir. Örneğin, 40 derece 36 dakika 56 saniye, $40^\circ 36' 56''$ seklinde yazılır. [18]

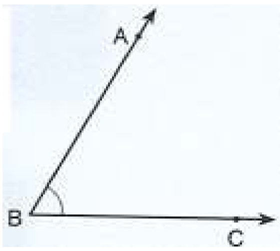
Aksiyom 1.2.3.1 (Açı Ölçme Aksiyomu) : Her açıya $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ olmak üzere α gibi bir reel sayı ve karşıt olarak $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ olmak üzere α gibi bir reel sayıya bir tek açı karşılık gelir. Bir açıya karşılık gelen reel sayıya bu açının derece olarak *ölçüsü* denir.



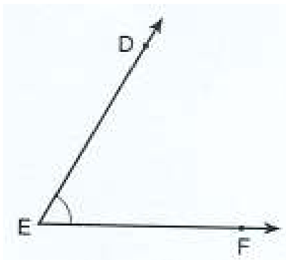
Şekil 1.2.3.2

$$m(\angle AOB) = \alpha \text{ ve } 0^0 \leq \alpha \leq 180^0$$

Tanım 1.2.3.2: Ölçüleri eşit olan açılara *eş açılar* denir. Eş açılar "≅ "sembolüyle gösterilir.



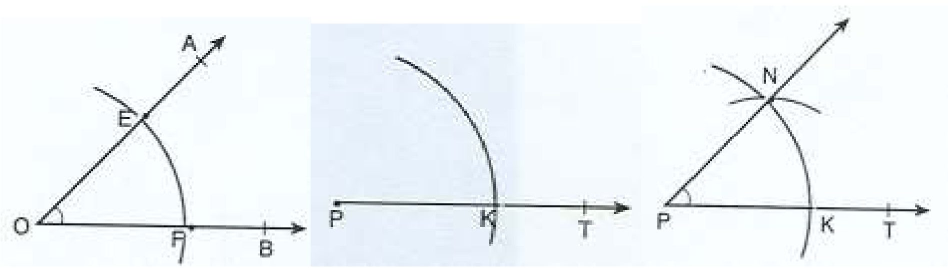
Şekil 1.2.3.3



Şekil 1.2.3.4

$m(\angle ABC) = m(\angle DEF) \Leftrightarrow \angle ABC \cong \angle DEF$ dır. [2]

Verilen Bir Açıya Eş Bir Açı Çizme:



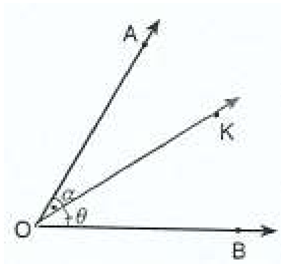
Şekil 1.2.3.5

Bir $\angle AOB$ açısına eş olan bir açı çizelim:

$[PT$ nı ışınını çizelim. Pergelimizi $\angle AOB$ açısının O köşesine koyup açının kollarını kesen bir yay çizelim. Yayın kolları kestiği noktalar E ve F olsun. Pergelimizin açıklığını bozmadan sivri ucunu $[PT$ nın P uç noktasına koyup bir yay daha çizelim. Bu yayın $[PT$ nı kestiği noktaya da K diyelim. Pergelimizi $|EF|$ kadar açıp sivri ucunu K noktasına koyalım ve bir yay çizelim. Çizilen yayların kesim noktası N olsun. P ve N noktalarını birleştirdiğimizde AOB açısına eş olan NPK açısını elde ederiz. Yani,

$\angle AOB \cong \angle NPK$ olur. [6]

Aksiyom 1.2.3.2 (Açı Toplama Aksiyomu) : Eğer bir K noktası AOB açısının iç bölgesinde ise; $m(\angle AOK)+m(\angle KOB)=m(\angle AOB)$ dir.

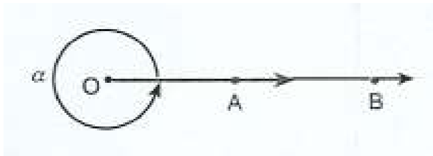


Şekil 1.2.3.6

$m(\angle AOK)+m(\angle KOB)=m(\angle AOB)$ veya $\alpha+\theta=m(\angle AOB)$ olur. [2]

1.2.4 Açı Çeşitleri

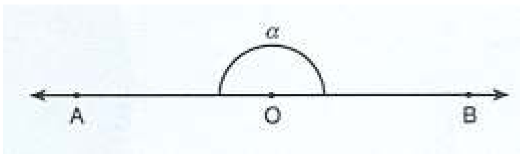
Tanım 1.2.4.1: $[OB$, O noktası etrafında pozitif yönde 360^0 döndürülerek $[OA$ ile çakıştırılırsa bir *tam açı* oluşur. Ölçüsü 360^0 dir.



Şekil 1.2.4.1

$m(\angle AOB) = \alpha = 360^0$ dir. [11]

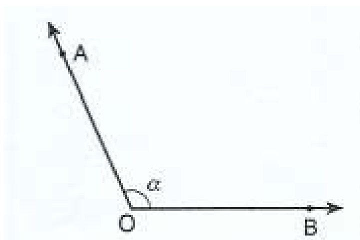
Tanım 1.2.4.2: Zıt iki ışının oluşturduğu açıya *doğru açı* denir. Ölçüsü 180^0 dir.



Şekil 1.2.4.2

$m(\angle AOB) = \alpha = 180^0$ dir.

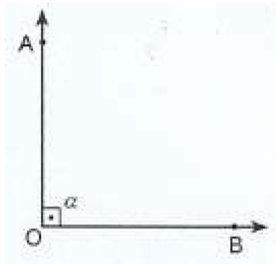
Tanım 1.2.4.3: Ölçüsü 90^0 ile 180^0arasında olan açıya *geniş açı* denir.



Şekil 1.2.4.3

$m(\angle AOB) = \alpha$ ise $90^0 \le \alpha \le 180^0$ dir.

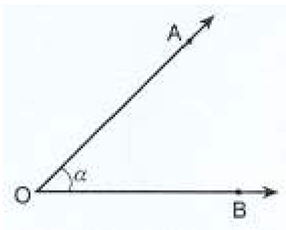
Tanım 1.2.4.4: Ölçüsü 90^0 olan açıya *dik açı* denir.



Şekil 1.2.4.4

$m(\angle AOB) = \alpha = 90^0$ dir.

Tanım 1.2.4.5: Ölçüsü 0^0 ile 90^0 arasında olan açıya *dar açı* denir.



Şekil 1.2.4.5

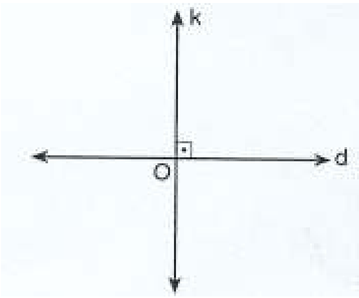
$m(\angle AOB) = \alpha$ ise $0^0 \leq \alpha \leq 90^0$ dir.

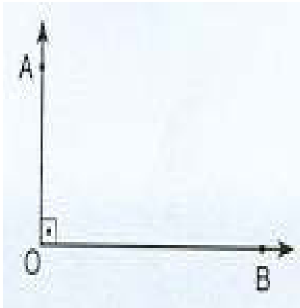
Tanım 1.2.4.6: Kenarları çakışık olan açıya *0^0 (sıfır derece) lik açı* denir.

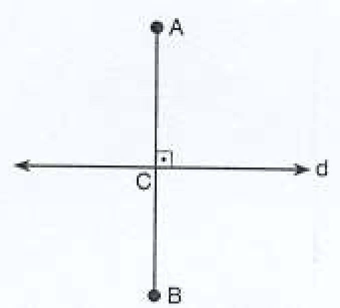
Şekil 1.2.4.6

$[OA = [OB$ ise $m(\angle AOB) = 0^0$ dir.

Tanım 1.2.4.7: İki doğru, doğru parçası veya ışının kesiştiklerinde, dik açı oluşuyorsa bu doğrular, doğru parçaları veya ışınlar *diktir* denir. d ile k doğrularının dikliği $d \perp k$ şeklinde gösterilir.







Şekil 1.2.4.7 Şekil 1.2.4.8 Şekil 1.2.4.9

Tanım 1.2.4.8: Ölçüleri toplamı 90^0 olan iki açıya *tümler açılar* denir. Bu açıların her birine diğerinin tümleyeni denir.

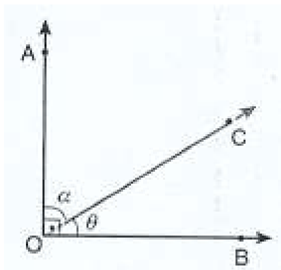
$m(\angle AOB) + m(\angle CED) = 90^0$

$\alpha + \theta = 90^0$

Yani $\alpha + \theta = 90^0$ ise ölçüleri α ile θ olan açılar tümler açılardır.

Şekil 1.2.4.10 deki gibi herhangi iki açı hem komşu hem de tümler ise bu açılara *komşu tümler açılar* denir.

$m(\angle AOC) + m(\angle COB) = 90^0$ ve komşu açılar olduklarından bu açılar komşu tümler açılardır. [18]

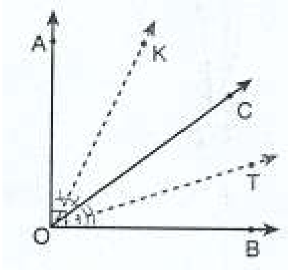


Şekil 1.2.4.10

Teorem 1.2.4.1: Komşu tümler iki açının açıortaylarının oluşturduğu açının ölçüsü 45^0dir.

İspat: $[OK$ ve $[OT$ sırasıyla $\angle AOC$ ile $\angle COB$ nin açıortayları olsun.

$m(\angle AOC) + m(\angle COB) = 90^0$ (komşu tümler açılar)



Şekil 1.2.4.11

$$\frac{m(\angle AOC)}{2}+\frac{m(\angle COB)}{2}=\frac{90^0}{2}$$

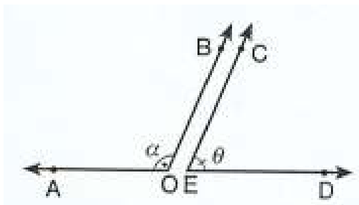
$m(\angle KOC)+m(\angle COT)=45^0$ ($[OK$ ve $[OT$ açıortay)

$m(\angle KOT)=45^0$ olur.

Tanım 1.2.4.9: Ölçüleri toplamı 180^0 olan iki açıya *bütünler açılar* denir. Bu açılardan her birine de *diğerinin bütünleyeni* denir.

$m(\angle AOB)+m(\angle CED)=180^0$

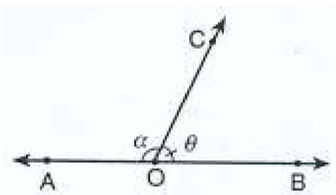
$\alpha+\theta=180^0$



Şekil 1.2.4.12

Yani $\alpha+\theta=180^0$ ise ölçüleri α ile θ olan açılar bütünler açılardır.

Şekil 1.2.4.12 deki gibi herhangi iki açı hem komşu hem de bütünler ise bu açılara *komşu bütünler açılar* denir. Ölçüleri α ile θ olan açılar komşu açılar ve $\alpha+\theta=180^0$ olduğundan bu açılar *komşu bütünler* açılardır.

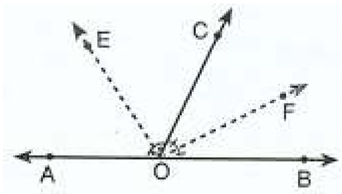


Şekil 1.2.4.13

Teorem 1.2.4.2: Komşu bütünler iki açının açıortayları birbirine diktir.

İspat : $[OE$ ve $[OF$ sırayla $\angle AOC$ ile $\angle COB$ nın açıortayları olsun.

$m(\angle AOC)+m(\angle COB)=180^0$ (komşu bütünler açılar)



Şekil 1.2.4.14

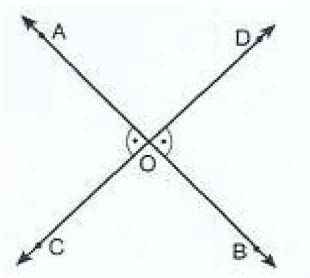
$$\frac{m(\angle AOC)}{2}+\frac{m(\angle COB)}{2}=\frac{180^0}{2}$$

$m(\angle EOC)+m(\angle COF)=90^0$ ($[OE$ ve $[OF$ açıortay)

$m(\angle EOF)=90^0$ olur.

O halde $[OE \perp [OF$ dir.

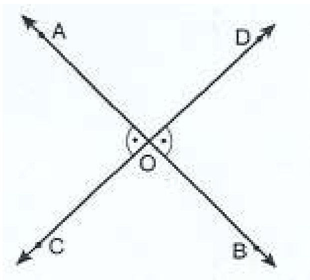
Tanım 1.2.4.10: Kenarları zıt ışınlar olan iki açıya *ters açılar* denir. Bunlardan her birine de *diğerinin tersi* denir.



Şekil 1.2.4.15

Şekil 1.2.4.15 görüldüğü gibi $[OA$ ile $[OB$, $[OC$ ile $[OD$ zıt ışınlar olduklarından $\angle AOC$ ile $\angle DOB$ ve $\angle AOD$ ile $\angle COB$ ters açılardır.

Teorem 1.2.4.3: Ters açıların ölçüleri eşittir.



Şekil 1.2.4.16

İspat:

1. $m(\angle AOD)+m(\angle DOB)=180^0$ (komşu bütünler)

2. $m(\angle AOD)+m(\angle AOC)=180^0$ (komşu bütünler)

3. O halde 1. ve 2. Den $m(\angle DOB)=m(\angle AOC)$ bulunur. [2]

2.BÖLÜM
NÖTRAL GEOMETRİ

Öklid ilk 5 postulatına ek olarak ayırma ve uygulama postulatlarını eklemiş ve diğer postulatlar bunları izlemiştir.

Ayırma: Eğer l herhangi bir doğru ise o zaman düzlem H_1 ve H_2 gibi iki alt kümeye ayrılır ve ayrıca

i) H_1 ve H_2 konveks,

ii) $H_1 \cup H_2$ =düzlem

iii) $A \in H_1$ ve $B \in H_2 \Rightarrow AB \cap l \neq \varnothing$

Uygulama: Verilen ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri için A noktasını A' noktasına, AB kenarını $A'B'$ kenarına ve C noktasını da C' noktasına dönüştürecek şekilde uygulama yapmak mümkündür.

Uzun süre postulat olarak adlandırılan önermelerin yapıları tam olarak anlaşılamamış ve özellikle Öklid ’in paraleller postulatı adıyla tanınan beşinci postulatı matematikçiler tarafından sanki bir teoremmiş gibi kanıtlanmaya çalışılmıştır. Beşinci postulat üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda bazı geometriler ortaya çıkmıştır.

Bu geometrilerden Öklid’in ilk dört postulatıyla ayırma ve uygulama postulatlarına dayanarak ortaya çıkan geometriye *nötral geometri* ya da *mutlak geometri* denilmektedir.

O halde Öklid’in beşinci postulatı nötral geometride yer almaz. [16]

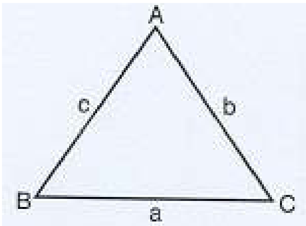
Bu bölümde [2], [4], [7], [11], [13], [16], [18], [19], [20] kaynakları esas alınarak üçgenin ve çemberin nötral geometrisiyle ilgili tanım ve teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

2.1 Üçgenin Nötral Geometrisi

2.1.1 Üçgen ve yardımcı elemanları

Tanım 2.1.1.1: *A, B* ve *C* doğrusal olmayan herhangi farklı üç nokta olmak üzere $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın birleşim kümesine *üçgen* denir.

• Köşeleri *A, B, C* olan üçgen $\triangle ABC$ şeklinde gösterilir. Şekil 2.1.1.1 deki üçgen $\triangle ABC$ $\triangle ACB$, $\triangle BCA$, $\triangle BAC$, $\triangle CAB$, $\triangle CBA$ gibi 6 değişik şekilde isimlendirilebilir.



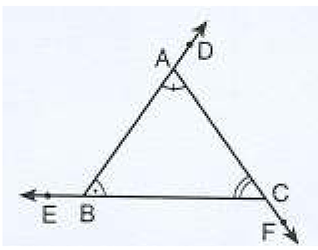
Şekil 2.1.1.1

$\triangle ABC = [AB] \cup [BC] \cup [CA]$ şeklinde de ifade edilir.

• A, B ve C noktaları üçgenin köşeleri, $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ üçgenin kenarlarıdır.

Üçgenin kenar uzunlukları $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olacak şekilde a, b, c ile gösterilir.

$\angle BAC$, $\angle ABC$ ve $\angle ACB$ üçgenin iç açıları, iç açıların komşu bütünleri olan açılar da üçgenin dış açılarıdır. $\angle DAC$, $\angle ABE$ ve $\angle BCF$ üçgenin dış açılarıdır.



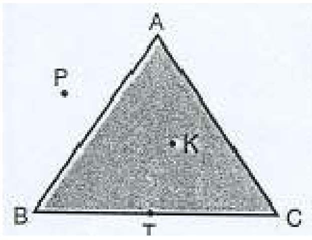
Şekil 2.1.1.2

• $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ kenarları ile $\angle A, \angle B$ ve $\angle C$ açıları ABC üçgeninin temel elemanlarıdır.

• Bir üçgenin üç kenarının uzunlukları toplamına *üçgenin çevresi* denir.

Yani, bir ABC üçgeninin çevresinin uzunluğu; $Ç = a + b + c$ dir.

Tanım 2.1.1.2: Bir ABC üçgeninde $[AB]$, $[BC]$ ve $[CA]$ nın sınırladığı bölgedeki noktaların kümesine üçgenin *iç bölgesi,* üçgenin içinde ve üzerinde olmayan noktaların kümesine de üçgenin *dış bölgesi* denir. Diğer bir deyişle bir üçgenin iç açılarının, iç bölgelerinin kesişimine üçgenin *iç bölgesi*, üçgen ve iç bölgesinin dışında kalan noktalar kümesine de *dış bölgesi* denir.



Şekil 2.1.1.3

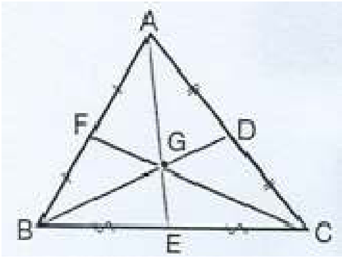
Şekil 2.1.1.3 de görüldüğü gibi K noktası üçgenin iç bölgesinde,T noktası üçgenin üzerinde, P noktası üçgenin dış bölgesindedir.

• $\triangle ABC$ nin iç bölgesi ile kendisinin birleşimine *üçgensel bölge* denir ve $\triangle(ABC)$ şeklinde gösterilir. [18]

Tanım 2.1.1.3 (Kenarortay): Bir üçgenin bir köşesini karşısındaki kenarın orta noktasına birleştiren doğru parçasına üçgenin o kenarına ait *kenarortayı* denir.

• Kenarortayların uzunlukları ”V” harfiyle gösterilir. ABC üçgeninin $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarına ait kenarortay uzunlukları sırasıyla V_a, V_b ve V_c ile gösterilir.

Bir üçgenin üç kenarortayı bir noktada kesişirler. Bu noktaya üçgenin *ağırlık merkezi* denir.



Şekil 2.1.1.4

$|BE| = |EC| \Rightarrow |AE| = V_a$

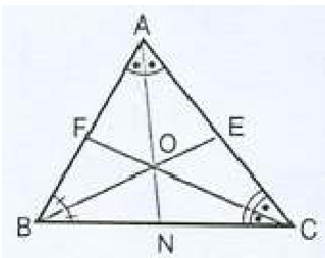
$|AD| = |DC| \Rightarrow |BD| = V_b$

$|AF| = |FB| \Rightarrow |CF| = V_c$

G noktası $\triangle ABC$ nin ağırlık merkezidir.

Tanım 2.1.1.4 (Açıortay): Bir üçgenin bir açısını iki eşit parçaya bölen ışının, köşe ile karşı kenar arasında kalan parçasına, üçgenin o köşesine ait *açıortayı* denir.

• Açıortayların uzunlukları ”n” harfiyle gösterilir. Bir ABC üçgeninin A, B ve C köşelerinden çıkan açıortayların uzunlukları sırayla n_A, n_B ve n_C dir. Üçgenin iç açılarının açıortaylarına *iç açıortayları* denir. Dış açılarının açıortaylarına da *dış açıortayları* denir.

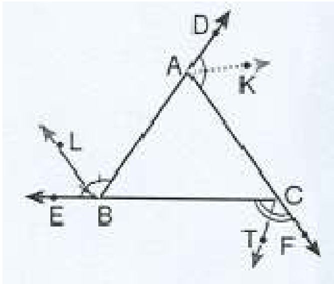


Şekil 2.1.1.5

$m(\angle BAN) = m(\angle NAC) \Rightarrow |AN| = n_A$

$m(\angle EBA) = m(\angle EBC) \Rightarrow |BE| = n_B$

$m(\angle ACF) = m(\angle BCF) \Rightarrow |CF| = n_C$



Şekil 2.1.1.6

$m(\angle DAK) = m(\angle KAC)$

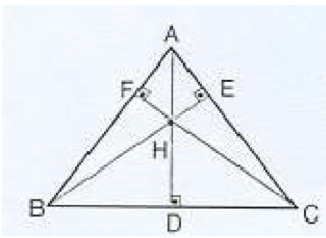
$m(\angle ABL) = m(\angle EBL)$

$m(\angle BCT) = m(\angle TCF)$

$[AK$,$[BL$ ve $[CT$ dış açıortaylardır.

Tanım 2.1.1.5 (Yükseklik): Bir üçgenin bir köşesinden, karşı kenar doğrusuna indirilen dikmenin, karşı kenarı kestiği nokta ile köşeyi birleştiren doğru parçasına, üçgenin o kenarına ait *yüksekliği* denir.

• Yükseklik uzunlukları genel olarak ”h” harfiyle gösterilir. Bir ABC üçgeninin a, b ve c kenarlarına ait yüksekliklerinin uzunlukları sırasıyla h_a, h_b ve h_c dir. Üçgenin yükseklikleri bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin *diklik merkezi* denir.



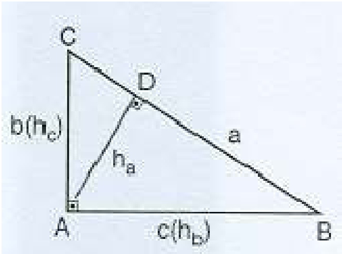
Şekil 2.1.1.8

$[AD] \perp [BC] \Rightarrow |AD| = h_a$

$[BE] \perp [AC] \Rightarrow |BE| = h_b$

$[CF] \perp [AB] \Rightarrow |CF| = h_c$

H: Diklik merkezi (Dar açılı üçgende)



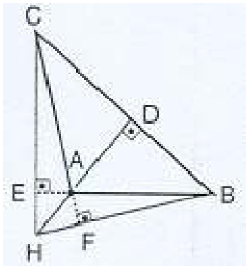
Şekil 2.1.1.9

$[AD] \perp [BC] \Rightarrow |AD| = h_a$

$[AB] \perp [AC] \Rightarrow |AB| = h_b$

$|AC| = h_c$

A: Diklik merkezi (Dik üçgende)



Şekil 2.1.1.10

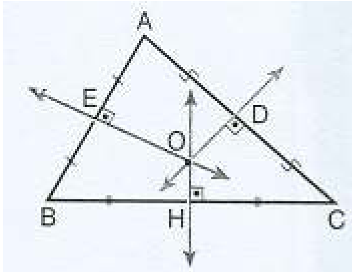
$[AD] \perp [BC] \Rightarrow |AD| = h_a$

$[BF] \perp [AC] \Rightarrow |BF| = h_b$

$[CE] \perp [AB] \Rightarrow |CE| = h_c$

H: Diklik merkezi (Geniş açılı üçgende)

Tanım 2.1.1.6 (Kenar Orta Dikme): Herhangi bir üçgenin kenarlarına, orta noktalarında dik olan doğrulara, üçgenin *kenar orta dikmeleri* denir. [2]



Şekil 2.1.1.11

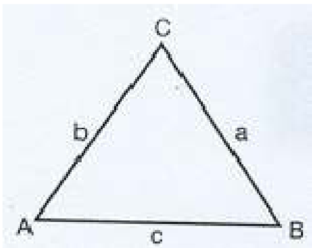
$|BH| = |HC|$ ve $OH \perp [BC]$

$|AD| = |DC|$ ve $OD \perp [AC]$

$|AE| = |EB|$ ve $OE \perp [AB]$

2.1.2 Üçgen çeşitleri

Tanım 2.1.2.1 (Dar açılı üçgen) Her bir açısının ölçüsü dar açı olan üçgenlere *dar açılı üçgen* denir.



Şekil 2.1.2.1

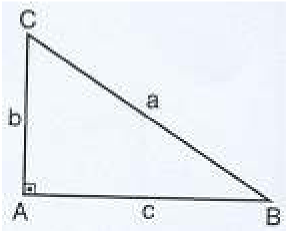
$m(\angle A) < 90^0$

$m(\angle B) < 90^0$ ve

$m(\angle C) < 90^0$ ise

$\triangle ABC$ dar açılı üçgendir. [11]

Tanım 2.1.2.2 Dik açılı üçgen (Dik üçgen) Bir açısının ölçüsü 90^0 olan üçgenlere *dik (açılı) üçgen* denir. Dik üçgenin dik açısını oluşturan kenarlarına *dik kenarlar*, dik açının karşısındaki kenarına dik üçgenin *hipotenüsü* denir.



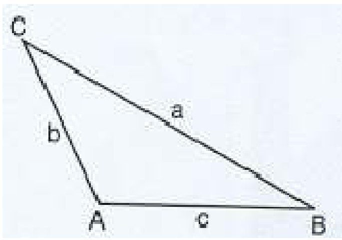
Şekil 2.1.2.2

$m(\angle A) = 90^0$

$[BC]$ hipotenüs, $[AB]$ ve $[AC]$ dik kenarlardır.

$m(\angle B) < 90^0$, $m(\angle C) < 90^0$ ve $m(\angle B) + m(\angle C) = 90^0$ dir.

Tanım 2.1.2.3 (Geniş açılı üçgen) Herhangi bir açısının ölçüsü geniş açı olan üçgenlere *geniş açılı üçgen* denir.



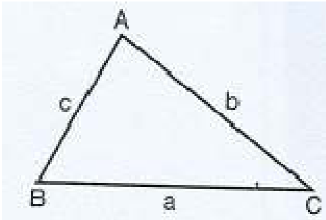
Şekil 2.1.2.3

$m(\angle A) > 90^0$

$m(\angle B) < 90^0$, $m(\angle C) < 90^0$ ve $m(\angle B) + m(\angle C) < 90^0$ dir.

$\vartriangle ABC$ geniş açılı üçgendir.

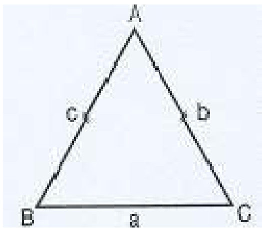
Tanım 2.1.2.4 (Çeşitkenar üçgen) Kenarlarının uzunlukları birbirinden farklı olan üçgenlere *çeşitkenar üçgen* denir.



Şekil 2.1.2.4

$|AB| \neq |BC| \neq |AC|$ ise $\triangle ABC$ çeşitkenar üçgendir.

Tanım 2.1.2.5 (İkizkenar üçgen) Herhangi iki kenarı eş olan üçgenlere *ikizkenar üçgen* denir. İkizkenar üçgende, eş olan kenarlara üçgenin eş(yan) kenarları, diğer kenara ise *taban* denir. Tabanın karşısındaki köşeye *üçgenin tepesi* denir. Eş kenarların karşısındaki açılara üçgenin *taban açıları*, taban kenarının karşısındaki açıya da *tepe açısı* denir.



Şekil 2.1.2.5

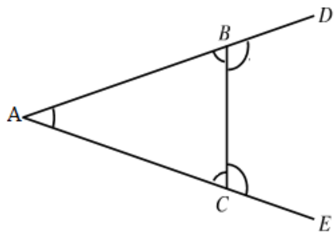
$[AB] \cong [AC]$ olduğundan $\triangle ABC$ ikizkenar üçgendir.

$|AB| = |AC| \Leftrightarrow m(\angle B) = m(\angle C)$

$[AB],[AC]$ eş(yan) kenarlar, $[BC]$ tabandır.

$\angle A$ tepe, $\angle B$ ile $\angle C$ taban açılardır. [2]

Teorem 2.1.2.1: İkizkenar üçgenin taban açıları birbirine eşittir ve eşit olan kenarlar uzatılırsa tabana ait dış açıların ölçüleri eşit olur. [16]

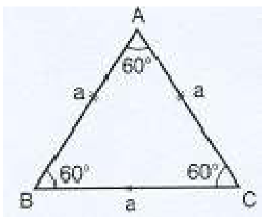


Şekil 2.1.2.6

İspat: ABC ikizkenar üçgeninde $[AB]$ yi ve $[AC]$ kenarlarını uzattığımızda $\angle DBA$ ve $\angle ECA$ doğru açıları meydana gelir.

1. $m(\angle CBD)+m(\angle CBA)=180^0$ (Bütünler açılar)
2. $m(\angle BCE)+m(\angle BCA)=180^0$ (Bütünler açılar)
3. $m(\angle CBA)=m(\angle BCA)$ (İkizkenar üçgen)
4. $m(\angle CBD)+m(\angle CBA)=m(\angle BCE)+m(\angle BCA)$
5. $m(\angle CBD)=m(\angle BCE)$ bulunur.

Tanım 2.1.2.6 (Eşkenar üçgen) Bütün kenarları birbirine eş olan üçgenlere *eşkenar üçgen* denir. Eşkenar üçgenin bütün açılarının ölçüleri birbirine eşit ve 60 ar derecedir.



Şekil 2.1.2.7

$[AB]\cong[AC]\cong[BC]$ olduğundan $\triangle ABC$ eşkenar üçgendir.

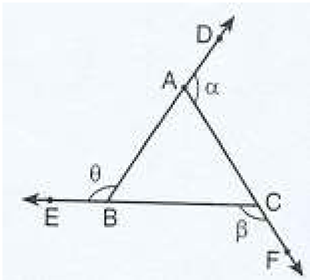
$|AB|=|AC|=|BC|$ ve $m(\angle A)=m(\angle B)=m(\angle C)=60^0$ dir.

2.1.3 Üçgende açılar

Aksiyom 2.1.3.1: Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplamı 180^0 dir. [4]

Teorem 2.1.3.1: Bir üçgenin dış açılarının ölçüleri toplamı 360^0 dir. [2]

İspat:



Şekil 2.1.3.1

1. $m(\angle DAC)+m(\angle A)=180^0$ (komşu bütünler açılar)

2. $m(\angle EBA)+m(\angle B)=180^0$ (komşu bütünler açılar)

3. $m(\angle FCB)+m(\angle C)=180^0$ (komşu bütünler açılar)

4. 1. ,2. ve 3. deki eşitlikler taraf tarafa toplanırsa;

$m(\angle DAC)+m(\angle EBA)+m(\angle FCB)+m(\angle A)+m(\angle B)+m(\angle C)=540^0$ olur.

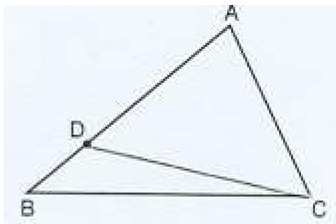
5. $m(\angle DAC)+m(\angle EBA)+m(\angle FCB)+180^0=540^0$ bulunur.

6. $m(\angle DAC)+m(\angle EBA)+m(\angle FCB)=360^0$

2.1.4 Üçgenin açıları ile kenarları arasındaki bağıntılar

Teorem 2.1.4.1: Bir üçgenin herhangi iki kenarı eş değil ise bu kenarlardan büyük olanının karşısındaki açının ölçüsü, diğer kenarın karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür. [2]

İspat: ABC üçgeninde $|AB| > |AC|$ kabulümüz olmak üzere;
$m(\angle ACB) > m(\angle ABC)$ olduğunu gösterelim.



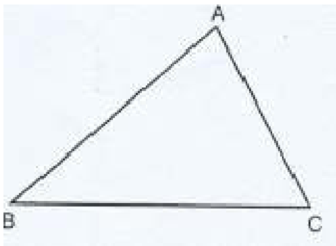
Şekil 2.1.4.1

$|AD| = |AC|$ olacak şekilde $[AB]$ üzerinde bir D noktası alalım.

1. $m(\angle ADC) = m(\angle ACD)$ ($\triangle ADC$ ikizkenar üçgen)
2. $m(\angle ACB) = m(\angle ACD) + m(\angle DCB)$ (açı toplama aksiyomu)
3. $m(\angle ACB) > m(\angle ACD)$
4. $m(\angle ADC) = m(\angle B) + m(\angle DCB)$ (dış açı)
5. $m(\angle ADC) > m(\angle B)$
6. $m(\angle ACB) > m(\angle ADC) > m(\angle B)$
7. $m(\angle ACB) > m(\angle ACD) > m(\angle B)$ olur.

Teorem 2.1.4.2: Bir üçgenin herhangi iki açısı eş değilse, bu açılardan ölçüsü büyük olanının karşısındaki kenarın uzunluğu daha büyüktür. [16]

İspat: ABC üçgeninde $m(\angle C) > m(\angle B)$ kabul edelim; $|AB| > |AC|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.1.4.2

$\triangle ABC$ nde, $[AB]$ ve $[AC]$ kenarlarının uzunlukları arasında,

1. $|AB| = |AC|$,
2. $|AB| < |AC|$,
3. $|AB| > |AC|$ bağıntılarından yalnız birisi doğrudur.

1. durumda $|AB| = |AC|$ ise $m(\angle B) = m(\angle C)$ olur ki kabulümüze aykırıdır.

2. durumda $|AB| < |AC|$ ise $m(\angle C) < m(\angle B)$ olur ki bu da kabulümüze aykırıdır. O hâlde, 3. durum olan $|AB| > |AC|$ doğrudur.

Sonuç 1:

Bir ABC üçgeninde kenar uzunlukları *a, b, c* ve açıları $\angle A$, $\angle B$ ve $\angle C$ ise

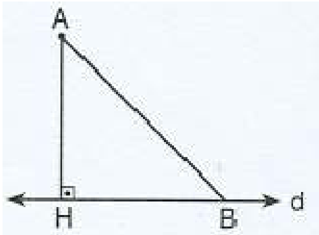
$m(\angle A) > m(\angle B) > m(\angle C) \Rightarrow a > b > c$ dir

Sonuç 2:

Bir ABC üçgeninde *A, B* ve *C* köşelerindeki dış açılar A', B', C' ise $m(\angle A) > m(\angle B) > m(\angle C) \Rightarrow m(\angle A') < m(\angle B') < m(\angle C')$ dir.

Teorem 2.1.4.3: Bir noktanın bir doğruya olan en kısa uzaklığı, noktadan o doğruya inilen dikmedir.

İspat: $A \notin d$, $[AH] \perp d$ ve $H, B \in d$ olsun. $|AH| < |AB|$ olduğunu gösterelim.



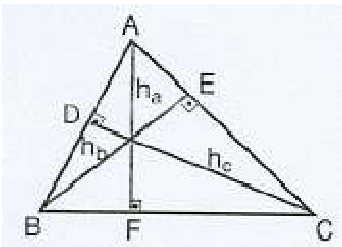
Şekil 2.1.4.3

AHB dik üçgeninde,

$m(\angle ABH) < m(\angle AHB)$ olduğundan, Teorem 2.1.4.1 gereğince $|AH| < |AB|$ olur.

Sonuç 1:

Bir ABC üçgeninde; a, b, c kenarlarına ait yükseklikler sırasıyla; h_a, h_b, h_c ise $h_a + h_b + h_c < a + b + c$ dir.



Şekil 2.1.4.4

İspat: Şekil 2.1.4.4 deki $\triangle ABC$ de,

$|AF| = h_a$, $|BE| = h_b$, $|CD| = h_c$ dir.

1. $\triangle EBC$ nde; $|BE| < |BC|$ yani $h_b < a$

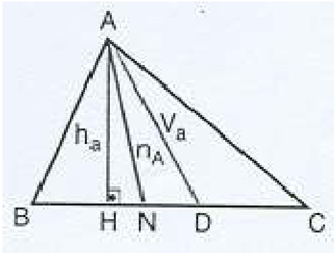
2. $\triangle DCA$ nde; $|DC| < |AC|$ yani $h_c < b$

3. $\triangle ABF$ nde; $|AF| < |AB|$ yani $h_a < c$

1. , 2. ve 3. eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$h_a + h_b + h_c < a + b + c$ olur.

Sonuç 2:



Şekil 2.1.4.5

Şekilde [AH], [AN] ve [AD] sırasıyla A köşesinden çizilen yükseklik, açıortay ve kenarortay ise $h_a < n_A < V_a$ dır.

İspat: $|AB| < |AC|$ olsun.

$\triangle ABC$ nde;

$|AH| < |AN| \Rightarrow h_a < n_A$ (1)

$|AB| < |AC| \Rightarrow m(\angle CAD) < m(\angle BAD)$ olur.

O hâlde, $m(\angle BAD) > m(\angle BAN)$ dir ve N noktası H ile D arasında olur.

$\triangle AND$ nde, $m(\angle AND) = 90^0 + m(\angle HAN)$ olduğunda,

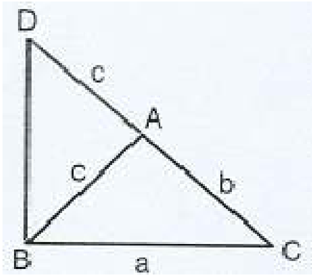
$\angle AND$ geniş açıdır ve $n_A < V_a$ olur (2)

O hâlde, (1) ve (2) den,

$h_a < n_A < V_a$ bulunur.

Teorem 2.1.4.4 (Üçgen Eşitsizliği) Bir üçgenin herhangi iki kenarının uzunluğunun toplamı, üçüncü kenarın uzunluğundan büyüktür.

İspat: ABC bir üçgendir. $|AB| + |AC| > |BC|$ olduğunu gösterelim;



Şekil 2.1.4.6

$[CA]$ nın uzantısında $|AB| = |AD|$ olacak şekilde bir D noktası alalım.

1. $|DC| = |AD| + |AC|$ (arada olma)

2. $|DC| = |AB| + |AC|$ ($|AB| = |AD|$)

3. $m(\angle CBD) > m(\angle ABD)$ (açı toplama aksiyomu)

4. $m(\angle ADB) = m(\angle ABD)$ ($|AB| = |AD|$)

5. $m(\angle CBD) > m(\angle ADB)$

6. $|DC| > |BC|$

7. $|AB| + |AC| > |BC|$

Sonuç 1: Bir üçgende herhangi iki kenarın uzunlukları farkının mutlak değeri üçüncü kenar uzunluğundan küçüktür.

İspat: Herhangi bir ABC üçgeninde, $|AB| + |AC| > |BC|$ (Üçgen eşitsizliği) eşitsizliğinden, $|AB| > |BC| - |AC|$ elde edilir. $|BC|$ ile $|AC|$ nun büyüklükleri belli olmadığı için dolayısıyla uzunluk negatif olmayacağından $|AB| > \big||BC| - |AC|\big|$ olur.

Sonuç 2: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ise

$|b - c| < a < b + c$

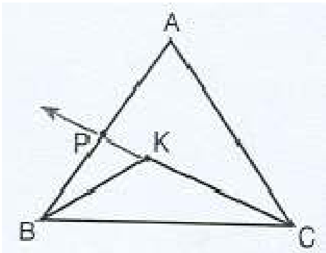
$|a - c| < b < a + c$

$|a - b| < c < a + b$ dir.

Teorem 2.1.4.5: Bir ABC üçgeninin iç bölgesindeki bir nokta K ise $|KB|+|KC|<|AB|+|AC|$ eşitsizliği vardır.

İspat: K noktası ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun.

$|KB|+|KC|<|AB|+|AC|$ olduğunu göstermeliyiz.



Şekil 2.1.4.7

$[CK$, $[AB]$ nı P noktasında kessin.

1. $\triangle PBK$ nde; $|BK|<|PK|+|PB|$ (üçgen eşitsizliği)

2. $\triangle APC$ nde; $|PK|+|KC|<|AP|+|AC|$ (üçgen eşitsizliği)

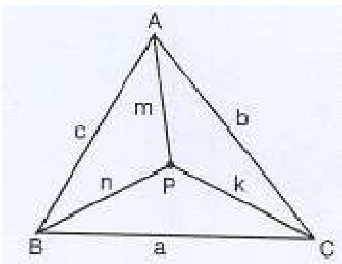
1. ve 2. eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak;

$$|PK|+|BK|+|KC|<|PK|+\underbrace{|PB|+|AP|}_{|AB|}+|AC|$$

$|KB|+|KC|<|AB|+|AC|$ olur.

Teorem 2.1.4.6: Bir ABC üçgeninin iç bölgesinde alınan bir P noktasının, köşelere olan uzaklıkları toplamı, üçgenin yarı çevre uzunluğundan büyük, çevre uzunluğundan küçüktür.

İspat:



Şekil 2.1.4.8

$|PA| = m$, $|PB| = n$ ve $|PC| = k$ diyelim,

$\triangle PBC$, $\triangle PCA$ ve $\triangle PAB$ nde;

$a < n + k$

$b < m + k$

$c < m + n$

Taraf tarafa toplarsak,

$$a + b + c < 2(m + n + k) \Rightarrow \frac{a + b + c}{2} < m + n + k \qquad (1)$$

Üçgen eşitsizliğinden

$n + k < b + c$

$m + n < a + b$

$m + k < a + c$

taraf tarafa toplarsak,

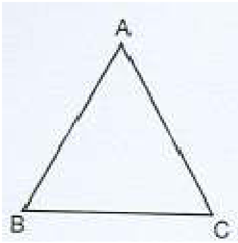
$$2(m + n + k) < 2(a + b + c) \Rightarrow m + n + k < a + b + c \text{ olur.} \qquad (2)$$

(1) ve (2) den

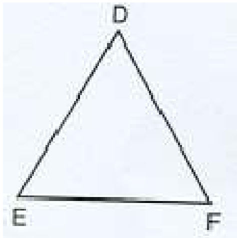
$\frac{a + b + c}{2} < m + n + k < a + b + c$ bulunur. [2]

2.1.5 Üçgenlerde eşlik

$\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ gibi verilen iki üçgenin köşeleri ve kenarları arasında, $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi yapılabilir. Bu eşlemenin anlamı;



Şekil 2.1.5.1



Şekil 2.1.5.2

Köşelere göre;

A köşesi ile *D* köşesi veya $\angle A$ ile $\angle D$

B köşesi ile *E* köşesi veya $\angle B$ ile $\angle E$

C köşesi ile *F* köşesi veya $\angle C$ ile $\angle F$

Kenarlara göre;

$[AB]$ kenarı ile $[DE]$ kenarı, $[BC]$ kenarı ile $[EF]$ kenarı, $[AC]$ kenarı ile $[DF]$ kenarı arasında birebir karşılaştırma yapmaktır. [4]

Tanım 2.1.5.1 : İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı açılar ve kenarlar eş ise bu üçgenlere *eş üçgenler* denir. Üçgenlerin eşliği " $\cong$ " sembolü ile gösterilir.

$\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesi bir eşlik ise;

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ şeklinde gösterilir ve *"ABC üçgeni eştir DEF üçgeni"* diye okunur.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ise

$m(\angle A) = m(\angle D)$ ve $|AB| = |DE|$

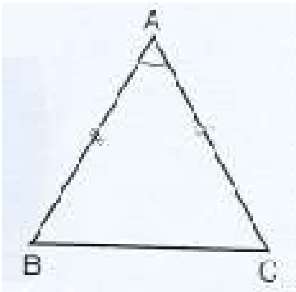
$m(\angle B) = m(\angle E)$ ve $|BC| = |EF|$

$m(\angle C) = m(\angle F)$ ve $|AC| = |DF|$

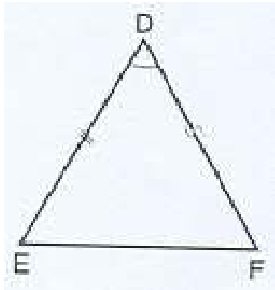
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ifadesi; aşağıdaki şekillerde de yazılabilir. [15]

$\triangle ACB \cong \triangle DFE$, $\triangle BAC \cong \triangle EDF$, $\triangle BCA \cong \triangle EFD$, $\triangle CAB \cong \triangle FDE$, $\triangle CBA \cong \triangle FED$

Aksiyom 2.1.5.1 (Kenar Açı Kenar eşlik aksiyomu) İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı ikişer kenarları ile bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise bu iki üçgen de eştir. Bu eşliğe *kenar açı kenar (K.A.K.) eşliği* denir.



Şekil 2.1.5.3



Şekil 2.1.5.4

ABC ve DEF üçgenleri için,

$\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ eşlemesine göre,

$$\left.\begin{array}{l} [AB] \cong [DE] \text{ yani } |AB| = |DE| \\ \angle A = \angle D \text{ yani } m(\angle A) = m(\angle D) \\ [AC] \cong [DF] \text{ yani } |AC| = |DF| \end{array}\right\} \text{ ise } \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ dir.}$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğundan, karşılıklı diğer tüm elemanlar da eştirler,

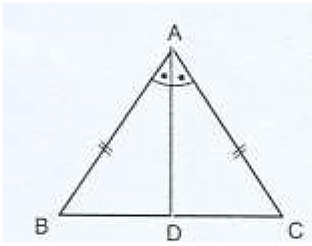
$|BC| = |EF|$

$m(\angle B) = m(\angle E)$

$m(\angle C) = m(\angle F)$ dir.

Teorem 2.1.5.1: Bir üçgenin iki kenarı eş ise bu kenarların karşısındaki açılar da eştir.

İspat:



Şekil 2.1.5.5

ABC üçgeninde, $|AB|=|AC|$ olsun. $m(\angle B)=m(\angle C)$ olduğunu göstermeliyiz.

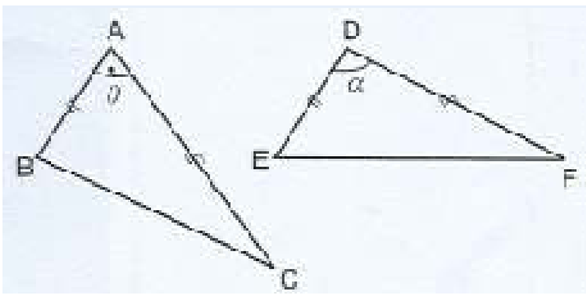
A açısının $[AD]$ açıortayını çizersek;

$$\left.\begin{array}{l} |AB|=|AC| \\ m(\angle BAD)=m(\angle DAC) \quad ([AD]\ açıortay) \\ |AD|=|AD| \end{array}\right\} \text{K.A.K aksiyomuna göre } \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

Eş üçgenlerin karşılıklı tüm elemanları eş olacağından, $m(\angle B)=m(\angle C)$ bulunur.

Yardımcı Teorem 2.1.5.1: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarı birbirine eş ve bu kenarların oluşturduğu açılar eş değilse bu açılardan büyük olanın karşısındaki kenar diğer açının karşısındaki kenardan büyüktür.

İspat:



Şekil 2.1.5.6

Şekilde $\triangle ABC$ ve $\triangle DEF$ veriliyor.

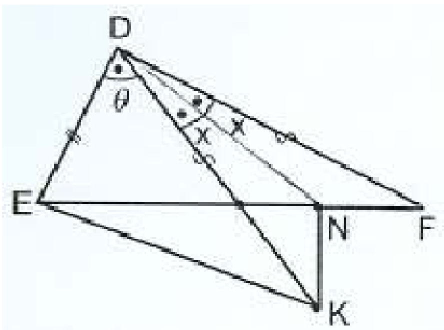
$$\left.\begin{array}{l} |AB| = |DE| \\ |AC| = |DF| \\ m(\angle A) < m(\angle D) \end{array}\right\} \Rightarrow \; |BC| = |EF| \quad \text{olduğunu gösterelim.}$$

$m(\angle EDK) = m(\angle BAC)$ ve $|AC| = |DK|$ olacak şekilde $[DK]$ nı çizip K ile E yi birleştirelim (Şekil 2.1.5.7). K.A.K eşlik aksiyomuna göre,

$\triangle ABC \cong \triangle DEK$ dir. ve $|BC| = |EK|$ olur. (1)

KDF açısının açıortayını çizip $[EF]$ yi kestiği nokta N olsun.

K.A.K eşlik aksiyomuna göre $\triangle DKN \cong \triangle DFN$ olur. Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olacağından, $|NK| = |NF|$ | dir. (2)



Şekil 2.1.5.7

$\triangle EKN$ de;

$|NE| + |NK| > |EK|$ (üçgen eşitsizliği)

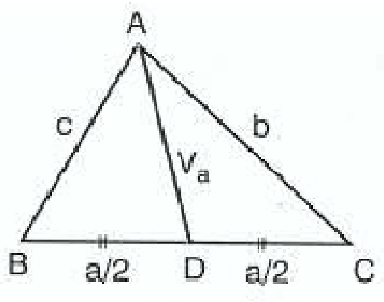
$|NE| + |NF| > |BC|$ ((1) ve (2) den)

$|EF| > |BC|$ olur.

Sonuç: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları birbirine eş ve üçüncü kenarları eş değilse, uzun olan kenar karşısındaki açı, diğer üçgendeki bu açıya karşılık gelen açıdan daha büyüktür.

Yardımcı Teorem 2.1.5.2: ABC üçgeninde $[AD]$, $[BC]$ kenarının kenarortayı,

$|BD| = |DC| = \frac{a}{2}$, $|AB| = c$ $|AC| = b$ ve $|AD| = V_a$ ise



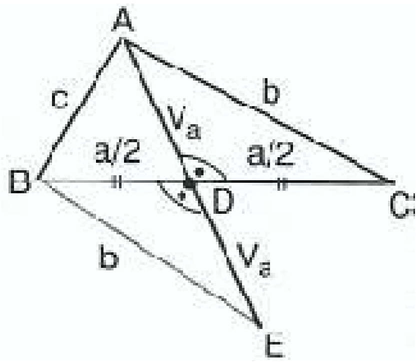
Şekil 2.1.5.8

a. $\left|\frac{b-c}{2}\right| < V_a < \frac{b+c}{2}$

b. $[BC]$, $[CA]$ ve $[AB]$ kenarlarının kenarortayları

V_a, V_b, V_c ise $\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_b < a+b+c$ dir.

İspat:



Şekil 2.1.5.9

$|AD| = |DE|$ olacak şekilde $[AD]$ nı uzatalım. E ile B yi birleştirelim.

$$\left.\begin{array}{l} |BD| = |CD| \\ m(\angle BDE) = m(\angle ADC) \ \text{(ters açılar)} \\ |DE| = |DA| \end{array}\right\} \text{K.A.K eşlik aksiyomuna göre } \triangle BDE \cong \triangle CDA$$

a. ABE üçgeninde

$$|b-c| < 2V_a < b+c$$

$$\left|\frac{b-c}{2}\right| < V_a < \frac{b+c}{2} \text{ olur.}$$

b. ABE üçgeninde $2V_a < b+c$ dir. Benzer şekilde $2V_b < a+c$, $2V_c < a+b$ olur.

Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa

$$2(V_a + V_b + V_c) < 2(a+b+c) \Rightarrow V_a + V_b + V_c < a+b+c \text{ olur.} \quad (1)$$

Şekil 2.1.5.9 dan;

$\triangle ABD$ nde; $V_a > c - \frac{a}{2}$

Benzer şekilde $V_b > a - \frac{b}{2}$

Benzer şekilde $V_c > b - \frac{c}{2}$ olur.

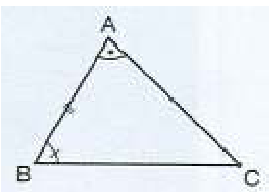
Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$V_a + V_b + V_c > \frac{a+b+c}{2} \text{ olur.} \quad (2)$$

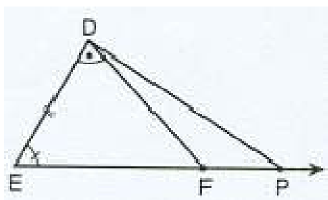
O halde (1) ve (2) den;

$\frac{a+b+c}{2} < V_a + V_b + V_b < a+b+c$ bulunur. [4]

Teorem 2.1.5.2 (Açı Kenar Açı eşlik teoremi) İki üçgenin karşılıklı birer kenarları ve bu kenarların uçlarındaki ikişer açıları eş ise bu üçgenler eştir. Bu teoreme *açı kenar açı (A.K.A.) eşlik teoremi* denir. [18]



Şekil 2.1.5.10



Şekil 2.1.5.11

İspat: $ABC \leftrightarrow DEF$ eşlemesi kabulümüz olsun. $m(\angle A) = m(\angle D)$

$|AB| = |DE|$ ve $m(\angle B) = m(\angle E)$ dır.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.

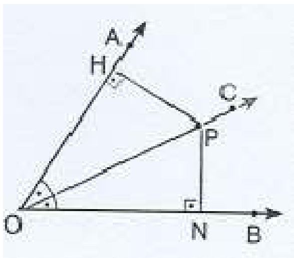
$[EF]$ uzantısında, $|BC| = |EP|$ olacak şekilde bir P noktası işaretleyelim.

1. $|AB| = |DE|$
2. $m(\angle B) = m(\angle E)$
3. $|BC| = |EP|$
4. $\triangle ABC \cong \triangle DEP$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
5. $m(\angle BAC) = m(\angle EDP) = m(\angle EDF)$
6. $|EF| = |EP|$
7. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Teorem 2.1.5.3: Bir açının açıortayı üzerindeki herhangi bir noktanın, açının kenarlarına olan uzaklıkları birbirine eşittir.

İspat: $[OC$, AOB açısının açıortayı ve $P \in [OC$, $[PH] \perp [OA$, $[PN] \perp [OB$ kabulümüz olsun.

$|PH| = |PN|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.1.5.12

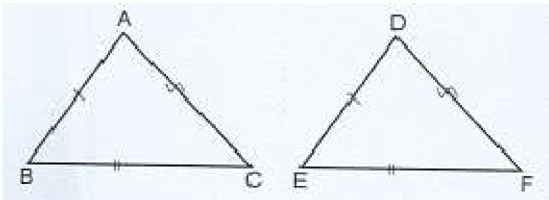
$m(\angle POH) = m(\angle PON)$

$m(\angle OHP) = m(\angle ONP) \Rightarrow m(\angle OPH) = m(\angle OPN)$

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle HOP) = m(\angle NOP) \\ |OP| = |PO| \\ m(\angle OPH) = m(\angle OPN) \end{array}\right\} \text{ A.K.A. eşlik teoremine göre; } \triangle HOP \cong \triangle NOP$$

Eş üçgenlerde karşılıklı kenarlar eş olduğundan $|PH| = |PN|$ ve $|OH| = |ON|$ olur.

Teorem 2.1.5.4: (Kenar Kenar Kenar eşlik teoremi) İki üçgenin karşılıklı bütün kenarları birbirine eş ise üçgenler eştir. Bu teorem *kenar kenar kenar (K.K.K.) eşlik teoremi* denir.

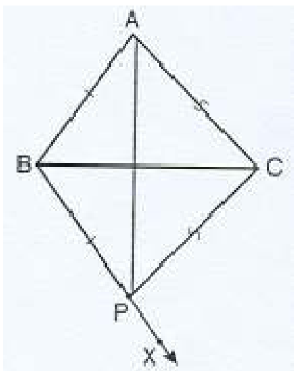


Şekil 2.1.5.13

İspat: $ABC \leftrightarrow DEF$,

$|AB| = |DE|$, $|AC| = |DF|$, $|BC| = |EF|$ olsun.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.1.5.14

$m(\angle DEF) = m(\angle CBX)$ olacak şekilde $[BX$ çizelim $|DE| = |BP|$ olacak şekilde P noktasını belirleyip C noktasıyla birleştirelim. (Şekil 2.1.5.14)

1. $\triangle DEF \cong \triangle PBC$

2. $|DF| = |PC| \quad |DE| = |PB|$

3. $|DF| = |AC| \quad |DE| = |AB|$

4. $|PC| = |AC| \quad |PB| = |AB|$

5. $m(\angle BAP) = m(\angle BPA)$

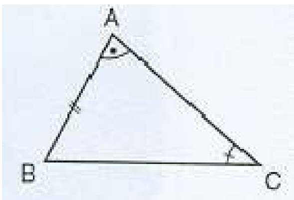
6. $m(\angle PAC) = m(\angle APC)$

7. $m(\angle BAC) = m(\angle BPC)$ (Açı ölçülerini toplama aksiyomundan)

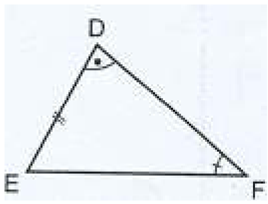
8. $\triangle ABC \cong \triangle PBC$ (K.A.K. eşlik aksiyomundan)

9. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Teorem 2.1.5.5 (Kenar Açı Açı eşlik teoremi) Herhangi iki üçgenin birinin iki açısı ile bu açılardan birinin karşısındaki kenarı, diğer üçgenin bunlara karşılık olan elemanlarına eş ise bu iki üçgen eştir.



Şekil 2.1.5.15



Şekil 2.1.5.16

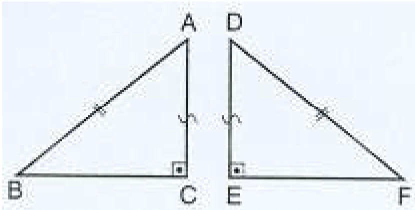
İspat: $|AB| = |DE|$, $m(\angle A) = m(\angle D)$ ve $m(\angle C) = m(\angle F)$ kabulümüz; $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ olduğunu gösterelim.

$$\left.\begin{array}{l} m(\angle A) = m(\angle D) \\ m(\angle C) = m(\angle F) \end{array}\right\} m(\angle B) = m(\angle E) \text{ olur.}$$

O hâlde,

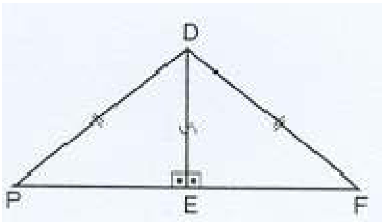
$$\left.\begin{array}{l} m(\angle A) = m(\angle D) \\ |AB| = |DE| \\ m(\angle B) = m(\angle E) \end{array}\right\} \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ olur.} \qquad \text{(A.K.A. eşlik teoreminden)}$$

Teorem 2.1.5.6 (Hipotenüs - Dik Kenar eşlik teoremi) Hipotenüsleri ve birer dik kenarları eş olan iki dik üçgen eştir.



Şekil 2.1.5.17

İspat: ABC ve DEF üçgenlerinden $m(\angle C) = m(\angle E) = 90^0$, $|AB| = |DF|$ ve $|AC| = |DE|$ alalım. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ olduğunu göstermemiz isteniyor.



Şekil 2.1.5.18

$[FE$ üzerinde, $|EP| = |BC|$ olacak şekilde, bir P noktası alalım ve D ile birleştirelim.

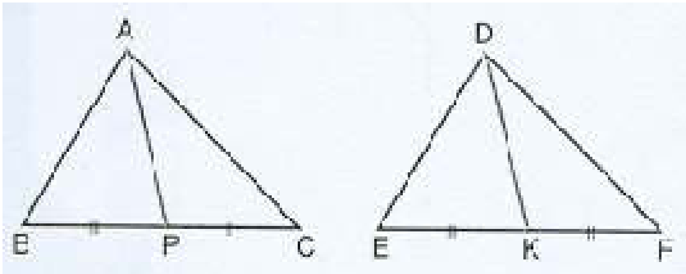
1. $\triangle ABC \cong \triangle DPE$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
2. $|AB| = |DP| = |DF|$
3. $m(\angle P) = m(\angle F)$
4. $|DE| = |DE|$
5. $\triangle DPE \cong \triangle DFE$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
6. $\triangle ABC \cong \triangle DFE$

Sonuç: Hipotenüsleri ve birer dar açıları eş olan dik üçgenler eştir. [4]

Teorem 2.1.5.7: Eş iki üçgenin;

1. Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları,
2. Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları,
3. Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları, birbirine eşittir.[2]

İspat:1.

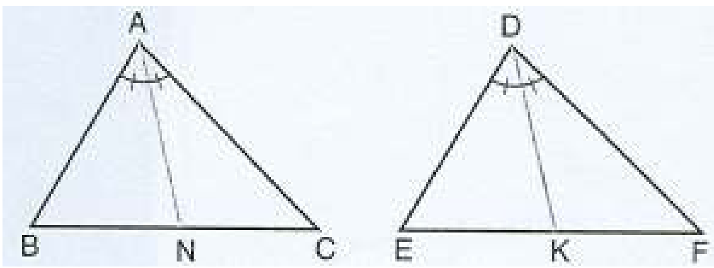


Şekil 2.1.5.19

$[AP]$ ve $[DK]$, üçgenlerin $[BC]$ ve $[EF]$ kenarlarına ait kenarortaylar olsun.

1. $\|AB\|=\|DE\|$	($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
2. $m(\angle B)=m(\angle E)$	($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)
3. $\|BP\|=\|EK\|$	($\triangle ABC \cong \triangle DEF \Rightarrow \|BC\|=\|EF\|$)
4. $\triangle ABP \cong \triangle DEK$	(K.A.K. eşlik aksiyomu)
5. $\|AP\|=\|DK\|$	

2.



Şekil 2.1.5.20

$[AN]$ ve $[DK]$, üçgenlerin A ve D açılarına ait açıortaylar olsun.

1. $m(\angle B)=m(\angle E)$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)

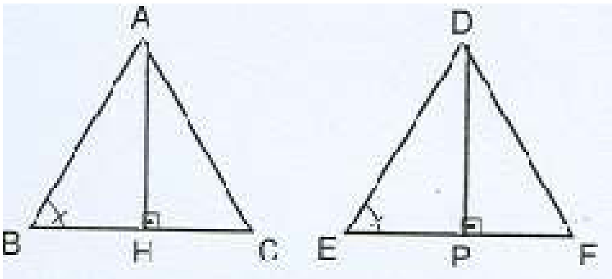
2. $|AB|=|DE|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)

3. $m(\angle BAN)=m(\angle EDK)$ ($\triangle ABC = \triangle DEF \Rightarrow m(\angle BAC)=m(\angle EDF)$)

4. $\triangle ABN \cong \triangle DEK$ (A.K.A. eşlik teoreminden)

5. $|AN|=|DK|$

3.



Şekil 2.1.5.21

$[AH]$ ve $[DP]$, üçgenlerin $[BC]$ ve $[EF]$ kenarlarına ait yükseklikler olsun.

1. $m(\angle B)=m(\angle E)$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)

2. $m(\angle BHA)=m(\angle EPD)=90^0$

3. $m(\angle BHA)=m(\angle EDP)$

4. $|AB|=|DE|$ ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$)

5. $\triangle ABH \cong \triangle DEP$ (A.K.A. eşlik teoreminden)

6. $|AH|=|DP|$

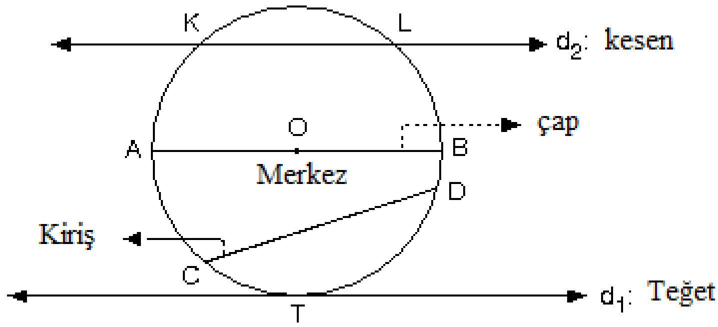
2.2 Çemberin Nötral Geometrisi

2.2.1 Çemberde Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1.1: Düzlemde sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesine *çember* denir.

Tanım 2.2.1.2: Çemberin herhangi bir noktasını merkeze birleştiren doğru parçasına, *çemberin yarıçapı* denir.

O noktasından *r* uzaklıktaki noktalar kümesi, *O* merkezli ve *r* yarıçaplı çemberdir. *Ç(O,r)* biçiminde gösterilir.



Şekil 2.2.1.1

Tanım 2.2.1.3: Çember üzerindeki iki noktayı birleştiren doğru parçasına *kiriş* denir. Şekil 2.2.1.1 de $[CD]$ kiriştir.

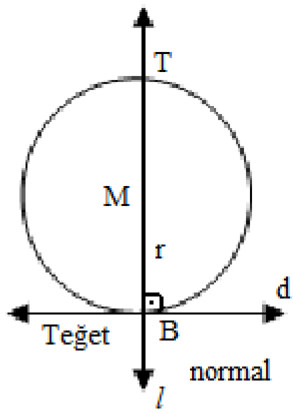
Tanım 2.2.1.4: En uzun kiriş merkezden geçen kiriştir. *O* merkezinden geçen $[AB]$ kirişine *çemberin çapı* denir.

Tanım 2.2.1.5: Çemberi iki noktada kesen doğrulara *kesen* denir. d_2 doğrusu çemberi *K* ve *L* noktalarında kestiğine göre, kesendir.

Tanım 2.2.1.6: Çemberi bir noktada kesen doğruya *teğet* denir. d_1 doğrusu çemberi T noktasında kestiğinden teğettir.

Tanım 2.2.1.7: Bir çemberle teğetin kesişim kümesi $\{B\}$ ise B noktasına *teğetin değme noktası* denir.

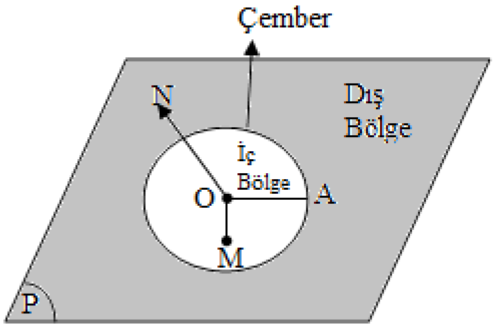
Tanım 2.2.1.8: Bir çemberin veya bir eğrinin herhangi bir teğetine değme noktasında dik olan doğruya, çemberin veya eğrinin bu noktadaki *normali* denir [13].



Şekil 2.2.1.2

2.2.2 Çemberin düzlemde ayırdığı bölgeler

Tanım 2.2.2.1: Düzlemde bir çemberin içinde kalan bölgeye *çemberin iç bölgesi*, çember dışında kalan bölgeye *çemberin dış bölgesi* denir.



Şekil 2.2.1.3

Bir çember düzlemde üç ayrık küme oluşturur:

1. Çember
2. Çemberin iç bölgesi
3. Çemberin dış bölgesi

O merkezli *r* yarıçaplı bir çemberde; *N* çemberin dış bölgesinde, *M* çemberin iç bölgesinde ve *A* çemberin üzerinde herhangi üç nokta olsun.

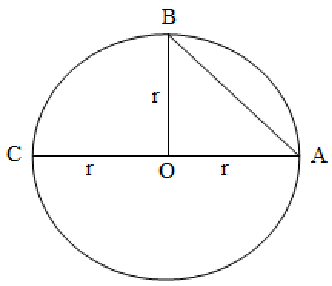
$|ON| > r$, $|OA| = r$, $|OM| < r$ dir. [20]

Tanım 2.2.2.2: Bir çember ile çemberin iç bölgesinin birleşimine *daire* denir. [13]

2.2.3 Çemberde kiriş ile ilgili durumlar

Teorem 2.2.3.1: Bir çemberin çaplarından biri, onun en uzun kirişlerinden biridir.

İspat:



Şekil 2.2.3.1

Yukarıdaki şekilde uzunluğu r, merkezi O olan bir çember veriliyor. Çemberin bir kirişi $[AB]$ ve A dan geçen bir çapı $[AC]$ olsun.

OAB üçgeninde

$|OA| = |OB| = r$ dir.

$|OC| = r$ olduğundan üçgen eşitsizliğine göre,

$|OA| + |OC| > |AB|$ olur.

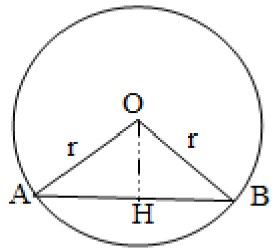
$|AO| + |OC| > |AB|$ ve $|OA| + |OC| = |AC|$ olduğundan,

$|AC| > |AB|$ olur.

Sonuç: Bir çemberde merkezden geçmeyen herhangi bir kirişin uzunluğu, çemberin çapının uzunluğundan küçüktür.

Teorem 2.2.3.2: Çemberde, merkezden kirişe inilen dikme, kirişi ortalar.

İspat:



Şekil 2.2.3.2

Merkezi O ve yarıçap uzunluğu r olan bir çemberin kirişlerinden biri $[AB]$ olsun.

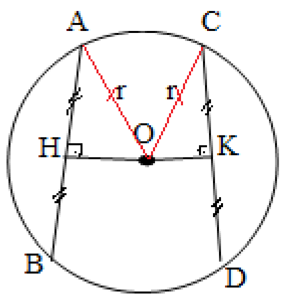
$|OA| = |OB| = r$ olduğundan, OAB üçgeni ikizkenar üçgendir. O dan $[AB]$ kirişine inilen dikmenin ayağı H olsun. $[OH]$ doğru parçası, ikizkenar üçgenin yüksekliğidir. $[OH]$ nın $[AB]$ kenarını ortaladığını, yani $|AH| = |HB|$ olduğunu göstereceğiz.

$$\left.\begin{array}{l} |OA| = |OB| = r \\ m(\angle OHA) = m(\angle OHB) = 90^0 \\ |OH| = |OH| \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OHA \cong \triangle OHB \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $|AH| = |HB|$ dir.

Teorem 2.2.3.3: Bir çemberde veya eş çemberlerde, eş kirişlerin merkeze olan uzaklıkları eşittir. [7]

İspat:



Şekil 2.2.3.3

Ç(O,r) çemberinde, $[AB]$ ve $[CD]$ herhangi iki kiriş ve $[AB] \cong [CD]$ dır.

$|OH| = |OK|$ olduğunu gösterelim.

O noktasını, A ve C noktalarına birleştirelim.

1. $[OA] \cong [OC]$

2. $|AB| = |CD|$

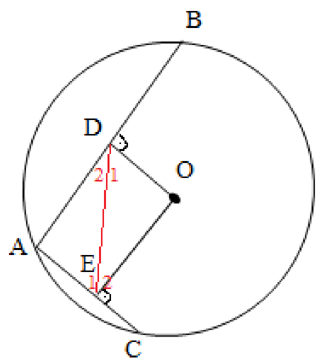
$\frac{1}{2}.|AB| = \frac{1}{2}.|CD|$ ve $|HA| = |KC|$

3. $m(\angle AHO) = m(\angle CKO)$ olduğundan $\angle OHA \cong \angle OKC$ (Hipotenüs-dik kenar eşliği)

Bu eşitlikten $[OH] \cong [OK]$ veya $|OH| = |OK|$ bulunur.

Teorem 2.2.3.4: Bir çemberin iki kirişi merkezden eşit uzaklıkta değilse, uzun olan kiriş merkeze daha yakındır.

İspat:



Şekil 2.2.3.4

$[AB]$ ve $[AC]$, O merkezli çemberin iki kirişidir.

$|AB| > |AC|$, $[OD] \perp [AB]$ ve $[OE] \perp [AC]$ dır.

$|OD| < |OE|$ olduğunu gösterelim.

$|AD| = \frac{|AB|}{2}$ ve $|AE| = \frac{|AC|}{2} \Rightarrow |AD| > |AE|$

Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar bulunduğundan,

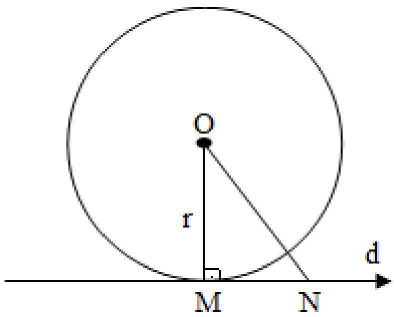
$\triangle ADE$ üçgeninde $m(\angle E_2) > m(\angle D_1)$ olur.

$m(\angle E_1) + m(\angle E_2) = 90^0$ ve $m(\angle D_1) + m(\angle D_2) = 90^0$ olduğundan $m(\angle E_1) < m(\angle D_2)$ olur. O halde *OED* üçgeninde $|OD| < |OE|$ bulunur. [19]

2.2.4 Çemberde teğet ile ilgili durumlar

Teorem 2.2.4.1: Çemberin herhangi bir teğeti değme noktasındaki yarıçapa diktir.

İspat:



Şekil 2.2.4.1

d doğrusu *M* noktasında *Ç(O,r)* çemberine teğettir. $[OM] \perp d$ olduğunu gösterelim.

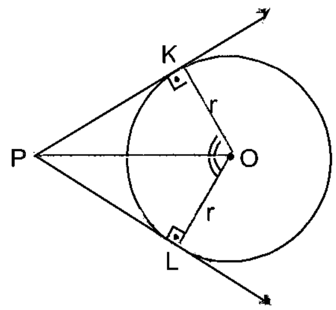
$[OM]$ nın *d* doğrusuna dik olmadığını varsayalım. *d* doğrusuna merkezden $[ON]$ dikmesini çizelim. $|ON| < |OM|$ olacaktır. (1)

N noktası çemberin dışında, *M* noktası çemberin üzerinde olduğundan $|ON| > r$ ve $|OM| = r$ dir. Bu durumda $|ON| > |OM|$ olur. Bu sonuç (1) ile çeliştiğinden her ikisi de doğru değildir. Bu durumda $|ON| = |OM|$ olur. Bu ise $[OM] \cong [ON]$ ve $[OM] \perp d$ olduğunu gösterir.

Sonuç: Çemberde teğete değme noktasından çıkılan dikme, merkezden geçer. [20]

Teorem 2.2.4.2: Bir çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşittir.

İspat:



Şekil 2.2.4.2

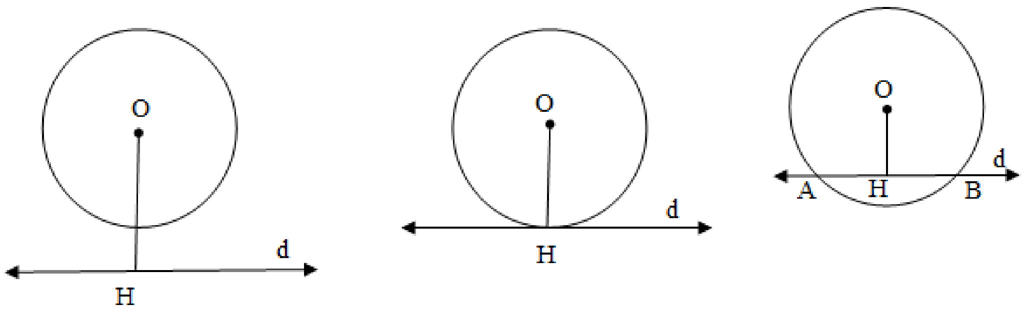
$[PK$ ve $[PL$, *Ç(O,r)* çemberine K ve L noktalarında teğet olsun. $|PK| = |PL|$ olduğunu gösterelim.

Teğet değme noktasına göre yarıçapa dik olduğundan (Teorem 2.2.4.1), $[OK] \perp [PK]$ ve $[OL] \perp [PL]$ dır.

KPO ve LPO üçgenlerinde $m(\angle K) = m(\angle L) = 90^0$, $|OK| = |OL| = r$ ve $|PO|$ ortak kenar olduğundan, $\triangle KPO \cong \triangle LPO$ (Hipotenüs-Dik kenar eşliği) olur.

O halde $|PK| = |PL|$ dur.

2.2.5 Düzlemde bir doğru ile bir çemberin birbirine göre durumları

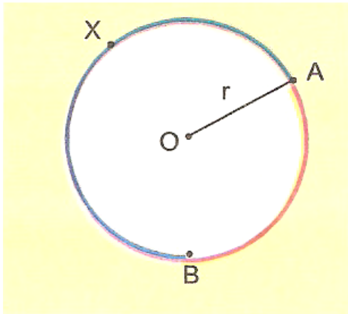


Şekil 2.2.5.1

1. $[OH] \perp d$ ve $|OH| > r$ ise d doğrusu çemberi kesmez. $d \cap Ç = \varnothing$
2. $[OH] \perp d$ ve $|OH| = r$ ise d doğrusu çembere teğettir. $d \cap Ç = \{H\}$
3. $[OH] \perp d$ ve $|OH| < r$ ise d doğrusu çembere teğettir. $d \cap Ç = \{A, B\}$

2.2.6 Çemberde Yaylar ve Açılar

Tanım 2.2.6.1: Çemberin bir parçasına *yay* denir.



Şekil 2.2.6.1

Çemberin üzerinde aldığımız *A* ve *B* gibi farklı iki nokta, çemberi iki yay parçasına ayırır. Bu yaylar ya eşit veya biri diğerinden küçüktür. *AB* yayı denildiğinde, bu yaylardan küçük olanı anlaşılır. Büyük yayı ifade etmek için, büyük yay üzerinde bir başka nokta alınarak, *AXB* yayı biçiminde ifade edilir.

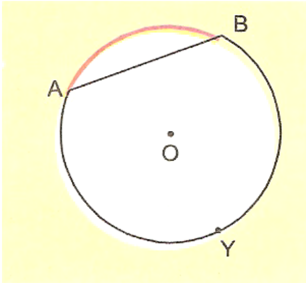
Yayları gösterirken "$\frown$" işareti kullanılır. AB yayı $\overset{\frown}{AB}$ biçiminde, *AXB* yayı da $\overset{\frown}{AXB}$ şeklinde gösterilir. Yay ölçüsü birimi derecedir. Bir çember yayının tamamının ölçüsü 360^0 dir.

$\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{AXB}$ yaylarının ölçüleri derece türünden $m\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ ve $m\left(\overset{\frown}{AXB}\right)$ şeklinde ifade edilir.

$\overset{\frown}{AB}$ ve $\overset{\frown}{AXB}$ yaylarının uzunlukları $\left|\overset{\frown}{AB}\right|$ ve $\left|\overset{\frown}{AXB}\right|$ biçiminde yazılır.

$Ç(O,r)=\overset{\frown}{AB}\cup\overset{\frown}{AXB}$ veya $m\left(\overset{\frown}{AB}\right)+m\left(\overset{\frown}{AXB}\right)=360^0$ dir.

Bir çemberde her $[AB]$ kirişi çemberi iki yaya ayırır. $[AB]$ kirişinin yayı denildiği zaman küçük olan *AB* yayı anlaşılır. Diğer yaya da *kirişin büyük yayı* denir.

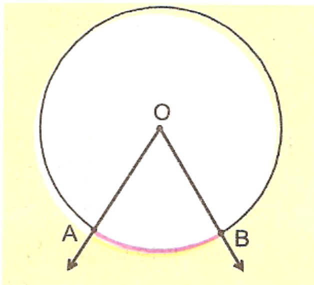


Şekil 2.2.6.2

$[AB]$ kirişinin küçük yayı $\overset{\frown}{AB}$ ve büyük yayı ise $\overset{\frown}{AYB}$ dir.[19]

Tanım 2.2.6.2: Köşesi çemberin merkezinde olan açıya *merkez açı* denir.

Tanım 2.2.6.3: Bir çemberde açının kolları arasında kalan yay parçasına o açının gördüğü *yay* denir.

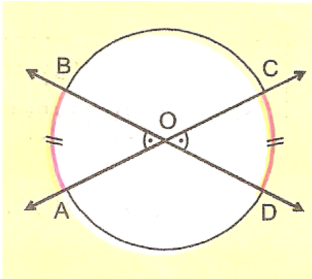


Şekil 2.2.6.3

Tanım 2.2.6.4: Çemberin bir yayının ölçüsü, bu yayı gören merkez açının ölçüsüne eşittir.

Şekil 2.2.6.3 de $m(\angle AOB) = m\left(\angle \overset{\frown}{AB}\right)$ dır. [14]

Tanım 2.2.6.5: Bir çemberde veya eş çemberlerde ölçüleri eşit olan yaylara, *eş yaylar* denir.



Şekil 2.2.6.4

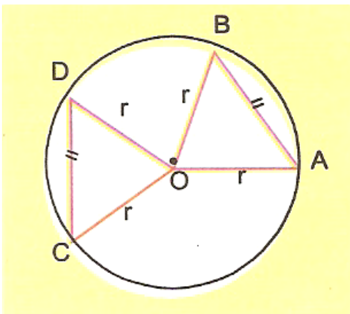
$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DC}$ olduğuna göre,

$m\left(\overset{\frown}{AB}\right) \cong m\left(\overset{\frown}{DC}\right) \Rightarrow m\left(\angle AOB\right) = m\left(\angle DOC\right)$ dır. [15]

Sonuç: Bir çemberde veya eş çemberlerde ki merkez açı eş ise, bu merkez açıların gördüğü yaylarda eştir.

Teorem 2.2.6.1: Bir çemberde veya eş çemberlerde eş kirişlerin yayları da eştir.

İspat: $[AB], [CD]$, *Ç(O,r)* nin kirişleri ve $[AB] \cong [CD]$ olsun. $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.2.6.5

$|OA| = |OB| = |OC| = |OD| = r$ ve $|AB| = |CD|$ dur.

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ (K.K.K Eşlik Teoremi)

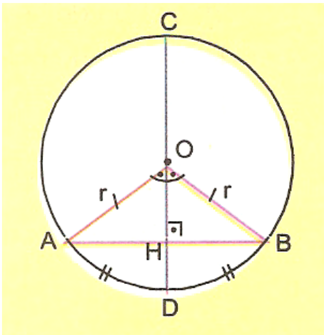
$m\left(\angle AOB\right) = m\left(\angle COD\right) \Rightarrow m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = m\left(\overset{\frown}{CD}\right)$ veya $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$ dır.

Sonuç: Bir çemberde veya eş çemberlerde, eş yayların kirişleri de eştir.

$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD} \Rightarrow [AB] \cong [CD]$ veya $m\left(\overset{\frown}{AB}\right) = m\left(\overset{\frown}{CD}\right) \Rightarrow |AB| = |CD|$ dur. [20]

Teorem 2.2.6.2: Bir çemberin merkezinden herhangi bir kirişine inilen dikme bu kirişin gördüğü yayı ortalar.

İspat: *Ç(O,r)* çemberinin bir kirişi $[AB]$ ve $[OH] \perp [AB]$ olsun. $m\left(\overset{\frown}{AD}\right) = m\left(\overset{\frown}{DB}\right)$ olduğunu gösterelim.



Şekil 2.2.6.6

$|OA| = |OB| = r$ AOB ikizkenar üçgen ve $[OH] \perp [AB]$ dır.

İkizkenar üçgende yükseklik aynı zamanda açıortayı olduğundan,

$m(\angle AOD) = m(\angle BOD)$ olur.

Ölçüleri eşit olan merkez açıların gördükleri yaylar eş olduğundan,

$\overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB}$ veya $m\left(\overset{\frown}{AD}\right) = m\left(\overset{\frown}{DB}\right)$ olduğu görülür. [7]

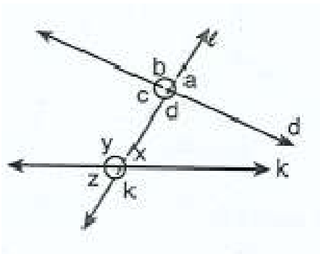
3.BÖLÜM
NÖTRAL OLMAYAN GEOMETRİ

Bu bölümde [2], [4], [5], [7], [8], [11], [13] ,[14], [16], [18], [19], [21] kaynakları esas alınarak, Öklid'in beşinci postulatına dayanan aksiyom ve teoremlerle birlikte, üçgenin ve çemberin nötral geometrisi dışındaki tanım ve teoremlerin ispatlarına yer verilmiştir.

3.1 Paralellik

3.1.1 Yöndeş, iç ters ve dış ters açılar

d ve k gibi iki farklı doğru ve her iki doğruyu da farklı noktalarda kesen l gibi üçüncü bir doğru verilsin.



Şekil 3.1.1.1

$\angle c, \angle d, \angle x$ ve $\angle y$ na *iç açılar*,

$\angle a, \angle b, \angle z$ ve $\angle k$ na *dış açılar* denir,

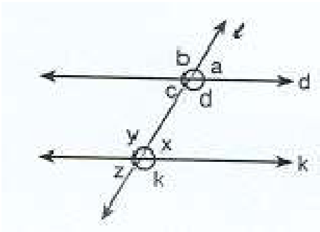
$\angle a$ ile $\angle x$, $\angle b$ ile $\angle y$, $\angle c$ ile $\angle z$ ve $\angle d$ ile $\angle k$ na *yöndeş açılar* denir.

$\angle c$ ile $\angle x$ ve $\angle d$ ile $\angle y$ na *iç ters açılar*,

$\angle a$ ile $\angle z$ ve $\angle b$ ile $\angle k$ na ise *dış ters açılar* denir.

$\angle d$ ile $\angle x$, $\angle c$ ile $\angle y$, $\angle a$ ile $\angle k$ ve $\angle b$ ile $\angle z$ na *karşı durumlu açılar*, denir.[2]

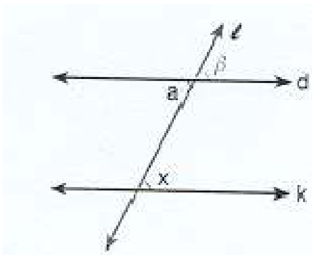
Aksiyom 3.1.1.1: Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde, oluşan yöndeş açılar eştir.



Şekil 3.1.1.2

$$d \parallel k \text{ ise } \begin{cases} a \cong x & \text{yani} \quad m(\angle a) = m(\angle x) \\ b \cong y & \text{yani} \quad m(\angle b) = m(\angle y) \\ c \cong z & \text{yani} \quad m(\angle c) = m(\angle z) \\ d \cong k & \text{yani} \quad m(\angle d) = m(\angle k) \end{cases}$$

Teorem 3.1.1.1: Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan iç ters açılar birbirine eşittir.



Şekil 3.1.1.3

İspat:

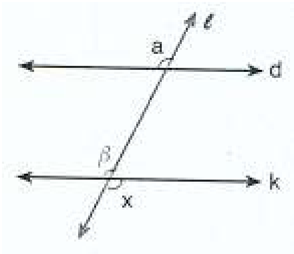
$d \parallel k$ olsun.

1. $\angle x \cong \angle \beta$ (Yöndeş açılar)

2. $\angle a \cong \angle \beta$ (Ters açılar)

O halde 1. ve 2. den $\angle x \cong \angle a$ olur.

Teorem 3.1.1.2: Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan dış ters açılar birbirine eşittir.



Şekil 3.1.1.4

İspat :

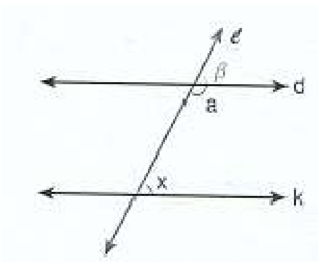
$d \parallel k$ olsun.

1. $\angle x \cong \angle \beta$ (Yöndeş açılar)

2. $\angle a \cong \angle \beta$ (Ters açılar)

O halde 1. ve 2. den $\angle x \cong \angle a$ olur.

Teorem 3.1.1.3: Paralel iki doğru, üçüncü bir doğru ile kesildiğinde oluşan karşı durumlu açılar bütünlerdir.



Şekil 3.1.1.5

İspat:

$d \parallel k$ olsun.

1. $\angle x \cong \angle \beta$ (Yöndeş açılar)

2. $m(\angle a) + m(\angle \beta) = 180^0$

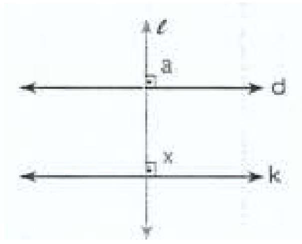
O halde 1. ve 2. den $m(\angle a) + m(\angle x) = 180^0$ olur. [14]

Sonuç: Farklı iki doğru, farklı noktalarda üçüncü bir doğru ile kesildiğinde;

1. Yöndeş açılar eş ise doğrular paraleldir.
2. İç ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
3. Dış ters açılar eş ise doğrular paraleldir.
4. Karşı durumlu açılar bütünler ise doğrular paraleldir.

Teorem 3.1.1.4: Paralel iki doğrudan birine dik olan doğru diğerine de dik olur.

$d \parallel k$ ve d $\perp l \Rightarrow k \perp l$ dir.



Şekil 3.1.1.6

İspat:

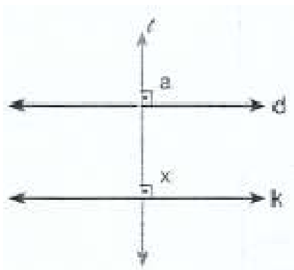
1. $d \perp l \;\; \Rightarrow \;\; m(\angle a) = 90^0$

2. $d \parallel k \;\; \Rightarrow \;\; \angle a = \angle x$

O halde 1. ve 2. den $m(\angle x) = 90^0$ olur. Dolayısıyla $k \perp l$ dir.

Teorem 3.1.1.5: İki doğru üçüncü bir doğruya dik ise bu iki doğru birbirine paraleldir.

d $\perp l$ ve $k \perp l \;\; \Rightarrow \;\; d \parallel k$ olur.



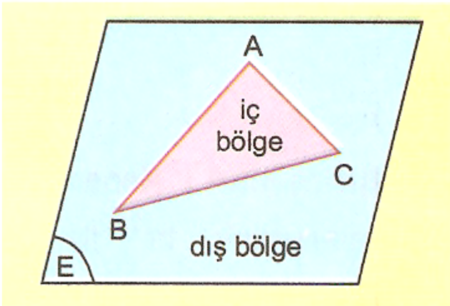
Şekil 3.1.1.7

İspat : $\angle a$ ile $\angle x$ yöndeş açılar ve $m(\angle a) = m(\angle x) = 90^0$ dir. Daha öncede bahsedildiği üzere yöndeş açıların ölçüleri eşit ise doğrular paralel olacağından $d \parallel k$ olur. [2]

3.2 Çokgensel bölgeler ve alan hesabı

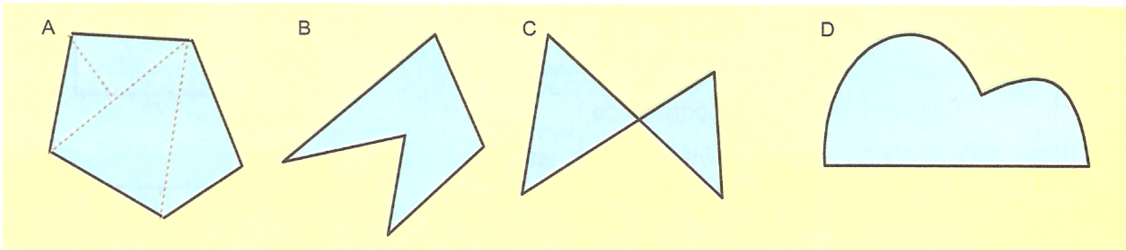
3.2.1 Çokgensel bölgeler

Tanım 3.2.1.1: Bir üçgen ile iç bölgesinin birleşimine, *üçgensel bölge* denir.



Şekil 3. 2.1.1

Tanım 3.2.1.2: Düzlemsel bir nokta kümesi A olsun. Eğer A kümesi, herhangi ikisinin iç bölgelerinin ara kesiti boş küme olacak şekilde sonlu sayıda üçgensel bölgelerin birleşimi olarak gösterilebiliyorsa; A kümesine, *çokgensel bölge* denir.



Şekil 3.2.1.2

Şekil 3.1.2.2 de A,B,C çokgensel bölgedir fakat D çokgensel bölge değildir.

3.2.2 Alan kavramı

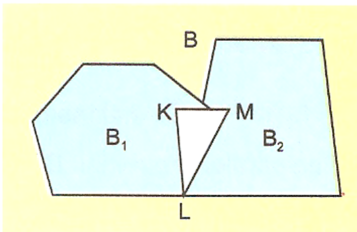
Aksiyom 3.2.2.1: Her çokgensel bölgeye bir ve yalnız bir pozitif gerçek sayı karşılık gelir.

Bir B bölgesine karşılık gelen pozitif reel sayıya, bu bölgenin *alanı* denir. B bölgesinin alanı S ise, $A(B)=S$ şeklinde yazılır.

Aksiyom 3.2.2.2: Eş üçgensel bölgelerin alanları eşittir.

Bu aksiyoma göre, $\triangle ABC \cong \triangle PQR \Rightarrow A(\triangle ABC)=A(\triangle PQR)$ dir. [19]

Aksiyom 3.2.2.3: (Alan toplama aksiyomu) Bir B bölgesi, B_1 ve B_2 bölgelerinin birleşimi olsun. B_1 ve B_2 bölgelerinin içlerinin ara kesiti boş küme ise; B bölgesinin alanı, B_1 ile B_2 bölgelerinin alanları toplamına eşittir.



Şekil 3.2.2.1

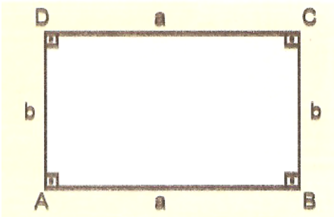
Şekilde , $B_1 \cup B_2 = B$ ve B_1 ve B_2 nin iç bölgelerinin arakesiti boş kümedir. [7]

$$A(B)=A(B_1)+A(B_2)$$

3.2.3 Karesel ve dikdörtgensel bölgelerin alanı

Tanım 3.2.3.1: Bir kenarının uzunluğu 1 birim (1 br) olan karesel bölgenin alanına *birim alan* denir ve br^2 ile gösterilir.

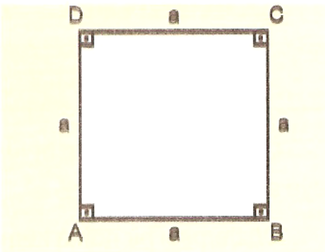
Aksiyom 3.2.3.1: Bir dikdörtgensel bölgenin alanı, kesişen iki kenarının uzunluklarının çarpımına eşittir.



Şekil 3.2.3.1

$$A(ABCD) = |AB|.|BC| = a.b$$

Aksiyom 3.2.3.2: Bir karesel bölgenin alanı, kesişen iki kenarının uzunluklarının çarpımına eşittir.[16]



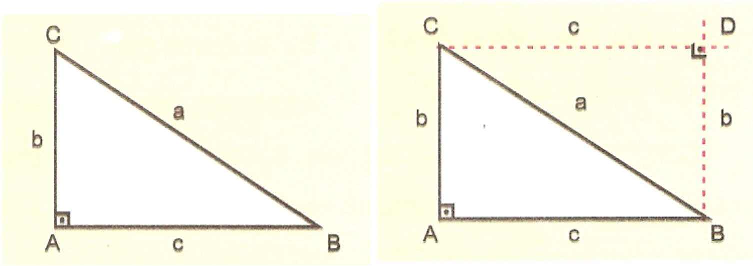
Şekil 3.2.3.2

$$A(ABCD) = |AB|.|BC| = a.a = a^2$$

3.2.4 Üçgensel bölgenin alanı

Teorem 3.2.4.1: Bir dik üçgensel bölgesinin alanı, dik kenarların uzunlukların çarpımının yarısına eşittir.

İspat:



Şekil 3.2.4.1

C noktasından $[AB]$na, B noktasından $[AC]$na çizilen paraleller D noktasında kesiştiğinde $ABCD$ dikdörtgensel bölgesi oluşur.

$A(ABCD) = b.c$ ve $\triangle CAB \cong \triangle BDC$ (K.K.K. eşlik teoremi)

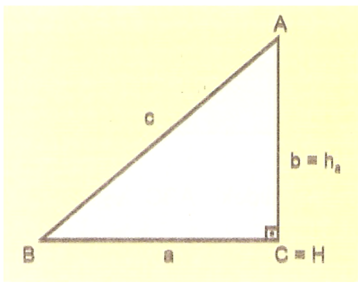
$A(\triangle CAB) = A(\triangle BDC) \Rightarrow A(ABCD) = 2A(\triangle CAB)$

$b.c = 2A(\triangle CAB) \Rightarrow A(\triangle CAB) = \dfrac{b.c}{2}$ bulunur. [16]

Teorem 3.2.4.2: Bir üçgensel bölgenin alanı, bir kenarının uzunluğu ile bu kenara ait yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.[19]

İspat: Üçgenin A köşesinden geçen yüksekliğini çizelim. Bu yüksekliğin karşı kenarı kestiği nokta H olsun. H noktasının konumu için aşağıdaki üç durum vardır.

a) $H = C$ ise,

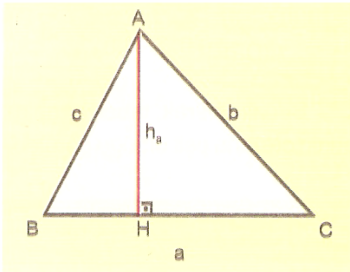


Şekil 3.2.4.2

Bu durumda H ile C çakışıktır. ABH dik olacağından;

$$A(\triangle ABH) = A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}.a.h_a \text{ olur.}$$

b) H noktası B ile C arasında ise;



Şekil 3.2.4.3

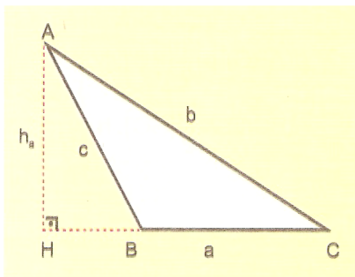
$$A(\triangle ABC) = A(\triangle ABH) + A(\triangle ACH)$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|BH|.|AH| + \frac{1}{2}|HC|.|AH|$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(|BH| + |HC|).|AH|$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|BC|.|AH| = \frac{1}{2}.a.h_a \text{ olur.}$$

c) B noktası C ile H arasında veya C noktası B ile H arasında ise;



Şekil 3.2.4.4

$$A(\triangle ABC) = A(\triangle AHC) - A(\triangle AHB)$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|HC|.|AH| - \frac{1}{2}|HB|.|AH|$$

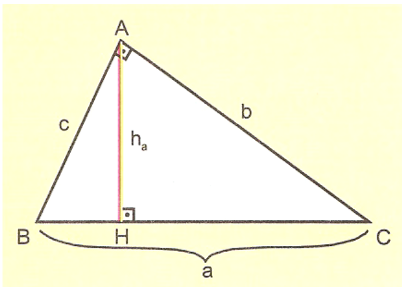
$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}(|HC| - |BH|).|AH|$$

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|BC|.|AH| = \frac{1}{2}.a.h_a$$

Benzer şekilde $A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}.a.h_a = \frac{1}{2}.b.h_b = \frac{1}{2}.c.h_c$ olduğu bulunabilir.

Sonuç: Bir *ABC* üçgeninde kenar uzunlukları *a,b,c* ve bu kenarlara ait yükseklikler sırayla h_a, h_b, h_c ise $a.h_a = b.h_b = c.h_c$ dir.

Özelik 1: Bir *ABC* dik üçgeninde eğer $m(\angle A) = 90^0$ ise, dik kenarların uzunlukları çarpımı, hipotenüsün uzunluğu ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımına eşittir.



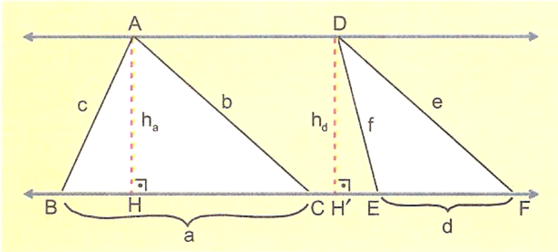
Şekil 3.2.4.5

$A(\triangle ABC) = \frac{|AB|.|AC|}{2}$ veya $A(\triangle ABC) = \frac{|BC|.|AH|}{2}$ olur.

Bu iki eşitlikten,

$|AB|.|AC| = |BC|.|AH| \Rightarrow b.c = a.h_a$ bulunur.

Özelik 2: Yükseklikleri eşit olan iki üçgensel bölgenin alanları oranı, tabanlarının uzunlukları oranına eşittir.



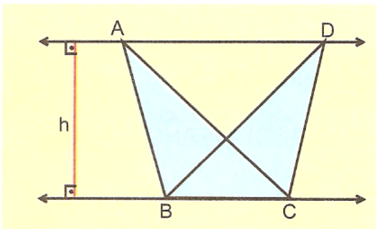
Şekil 3.2.4.6

Şekilde ABC ve DEF üçgenlerinde, $h_a = h_d$ dir.

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)} = \frac{\frac{1}{2}.a.h_a}{\frac{1}{2}.d.h_d} = \frac{a}{d} \text{ bulunur.}$$

Benzer olarak, taban uzunlukları eşit olan iki üçgensel bölgelerinin alanları oranının, bu tabanlara ait yüksekliklerinin oranına eşit olduğu görülecektir.

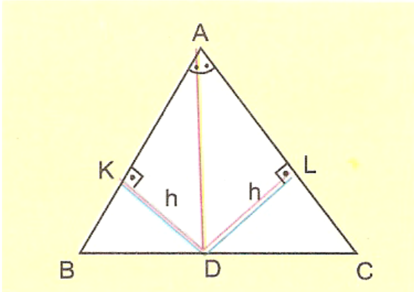
Özelik 3: Bir kenarı ve bu kenara ait yükseklikleri eşit olan üçgensel bölgelerin alanları da eşittir.



Şekil 3.2.4.7

$$\left.\begin{array}{l} A(\triangle ABC) = \frac{1}{2}|BC|.h \\ A(\triangle BCD) = \frac{1}{2}|BC|.h \end{array}\right\} \Rightarrow A(\triangle ABC) \cong A(\triangle BCD) \text{ olur.}$$

Özelik 4: Bir üçgenin herhangi bir köşesinden çıkan bir iç açıortayın oluşturduğu iki üçgensel bölgenin alanlarının oranı, açıortayın çıktığı köşede birleşen kenarların uzunlukları oranına eşittir.



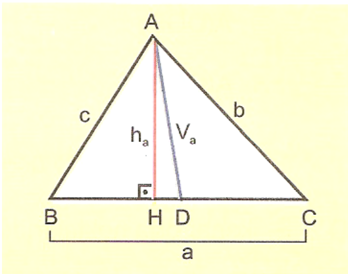
Şekil 3.2.4.8

$[AD]$, A açısının iç açıortayıdır. Açıortayı üzerindeki D noktasından $[DL]\perp[AC]$ ve $[DK]\perp[AB]$ olacak biçimde $[DL]$ ve $[DK]$ yüksekliklerini çizildiğinde

$|DL| = |DK| = h$ olur.

$$\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle ADC)} = \frac{\frac{1}{2}|AB|.|DK|}{\frac{1}{2}|AC|.|DL|} = \frac{|AB|}{|AC|} \text{ bulunur.}$$

Özelik 5: Bir üçgende kenarortay, üçgensel bölgeyi eşit alanlı iki üçgensel bölgeye ayırır.



Şekil 3.2.4.9

$|AD| = V_a$ kenarortay olduğundan, $|BD| = |DC|$ dur.

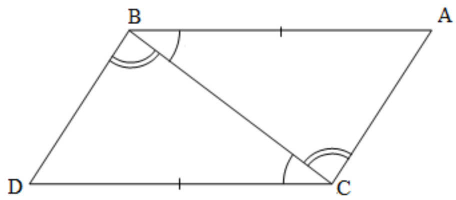
$$\left.\frac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle ADC)} = \frac{\frac{1}{2}|BD|.h_a}{\frac{1}{2}|DC|.h_a}\right\} \Rightarrow A(\triangle ABC) \cong A(\triangle ADC) \text{ bulunur.}$$

3.2.5 Paralelkenar şeklindeki bölgenin alanı

Tanım 3.2.5.1: Bir dörtgenin karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşit ise bu dörtgene *paralelkenar* denir.

Teorem 3.2.5.1: Paralelkenarda karşılıklı kenarlar ve karşılıklı açıların ölçüleri eşittir.

İspat: Doğru parçaları $[AB] \parallel [CD]$, $|AB| = |CD|$ veriliyor, $[AC] \parallel [BD]$, $|AC| = |BD|$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.2.5.1

Birbirine paralel $[AB]$ ve $[CD]$ doğru parçalarını $|AB| = |CD|$ olacak şekilde çizelim. *B* ile *C* köşelerini $[BC]$ doğru parçası ile birleştirelim.

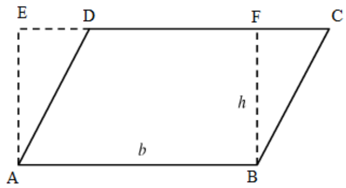
1. $|AB| = |DC|$
2. $m(\angle ABC) = m(\angle DCB)$ (İç ters açılar)
3. $|BC| = |CB|$

Buradan $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ K.A.K. eşlik teoreminden

4. $|AC| = |DB|$ bulunur.
5. $m(\angle ACB) = m(\angle DBC)$ (İç ters açılar)
6. $[AC] \parallel [BD]$ bulunur.

Teorem 3.2.5.2: Tabanı b birim yüksekliği h birim olan paralelkenar şeklindeki bölgenin alanı $b.h$ br^2 dir.

İspat:



Şekil 3.2.5.2

$[CD]$ doğrusuna dik olacak şekilde $[AE]$ve $[BF]$doğru parçaları alalım ve $[AE] \parallel [BF]$.

$|EA| = |FB|$

$|AD| = |BC|$

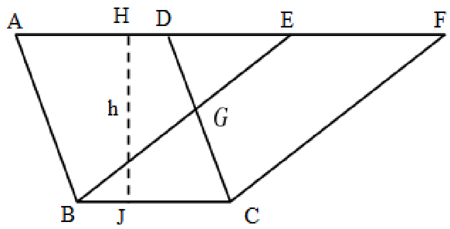
$m(\angle EAD) = m(\angle FBC)$ (Yöndeş açılar)

K.A.K. eşlik teoreminden $\triangle EAD \cong \triangle FBC$ olur. Eş üçgensel bölgelerin alanları eşit olduğundan, $\square ABCD$ paralelkenar şeklindeki bölgenin alanı, $\square ABFE$ dikdörtgensel bölgenin alanına eşittir.

$A(\square ABCD) = A(\square ABFE) = b.h$ olur.

Teorem3.2.5.3: Aynı paraleller arasında kalan ve tabanları aynı olan paralelkenarların alanları birbirine eşittir.

İspat:



Şekil 3.2.5.3

$[AD]$ ve $[BC]$ye dik olacak şekilde $[HJ]$doğru parçasını çizelim.

1. $A(\square ABCD)=|BC|.|HJ|$

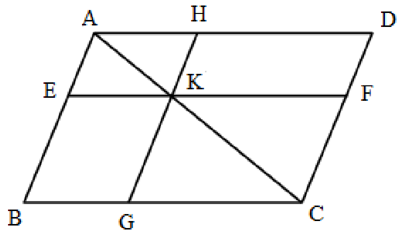
2. $A(\square BCFE)=|BC|.|HJ|$

1. ve 2. den $A(\square ABCD)=|BC|.|HJ|=A(\square BCFE)$ olur.

SONUÇ: Tabanları ve yükseklikleri aynı olan paralelkenarların alanları da eşittir.

Teorem 3.2.5.4: Bir paralelkenarda köşegen üzerindeki bir noktadan kenarlara paralel çizerek oluşan birbirini tamamlayan paralelkenar şeklindeki bölgelerin alanları eşittir.

İspat:



Şekil 3.2.5.4

K noktası $[AC]$köşegeni üzerinde herhangi bir nokta olsun.

1. $\square GCFK$ paralelkenarında $A(\triangle GCK)=A(\triangle FCK)$ olur.

2. $\square EKHA$ paralelkenarında $A(\triangle EKA)=A(\triangle HKA)$ olur.

3. $\square ABCD$ paralelkenarında $A(\triangle BCA)=A(\triangle DCA)$ olur.

4. $A(\triangle BCA)=A(\triangle EKA)+A(\triangle GCK)+A(\square BGKE)$

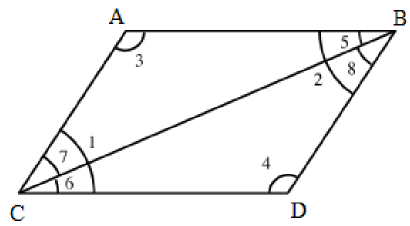
5. $A(\triangle DCA)=A(\triangle HKA)+A(\triangle FCK)+A(\square DFKH)$

6. $A(\triangle EKA)+A(\triangle GCK)+A(\square BGKE)=A(\triangle HKA)+A(\triangle FCK)+A(\square DFKH)$

7. $A(\square BGKE)=A(\square DFKH)$ bulunur.

Teorem 3.2.5.5: Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgenlerde karşılıklı açılar birbirine eşit olur. Köşegenler paralelkenar şeklindeki bölgenin alanını iki eşit alana ayırır. [16]

İspat:



Şekil 3.2.5.5

$[AB] \parallel [CD]$ ve $[AC] \parallel [BD]$ olduğundan

$|AB| = |CD|$ ve $|AC| = |BD|$ dir.

$m(\angle CAB) = m(\angle BDC)$ K.A.K eşlik teoreminden $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ bulunur.

1. $m(\angle ABC) = m(\angle DCB)$ (İç ters açılar)

2. $|BC| = |CB|$

3. $m(\angle ACB) = m(\angle DBC)$ (İç ters açılar)

4. $|AB| = |CD|$, $|AC| = |BD|$, $m(\angle BAC) = m(\angle CDB)$

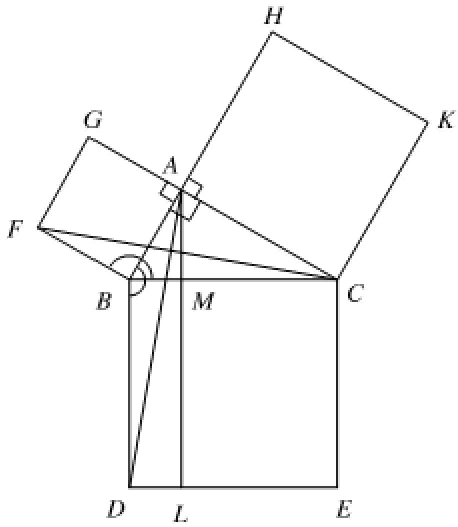
5. $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ olur.

6. $A(\triangle ABC) = A(\triangle DCB) = \frac{1}{2} \square ABDC$

3.3 Üçgenin Nötral Olmayan Geometrisi

3.3.1 Pisagor teoremi

Teorem 3.2.1.1: (Pisagor Teoremi) Bir dik üçgende dik açının karşısındaki kenarın oluşturduğu karenin alanı, diğer kenarların oluşturduğu karelerin alanları toplamına eşittir.[5],[8], [16],[21]



Şekil 3.3.1.1

İspat 1: A noktasından geçen $[BD]$ ve $[CE]$ kenarlarına paralel $[DE]$ yi L ve $[BC]$ yi M noktasında kesen bir doğru parçası alalım.

G, A, C doğrusal, $m(\angle GAB)+m(\angle BAC)=180^0$

B, A, H doğrusal, $m(\angle HAC)+m(\angle BAC)=180^0$

$\left.\begin{array}{l} |AB|=|FB| \\ m(\angle ABD)=m(\angle FBC) \\ |BD|=|BC| \end{array}\right\}$ olduğundan $\triangle ABD \cong \triangle FBC$ olur. (K.A.K. eşlik teoremi)

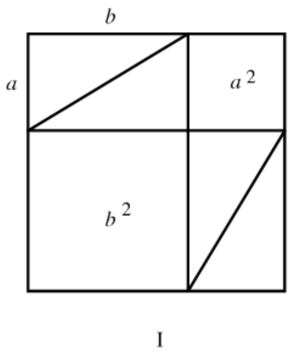
$A(\triangle ABD) = A(\triangle FBC)$

$\square BDLM = \square ABFG$

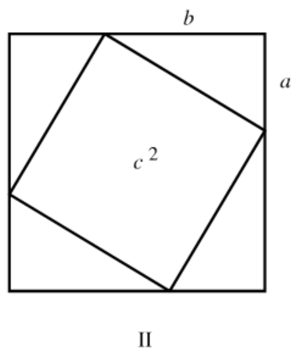
Benzer şekilde; $\square CELM = \square ACKH$

O halde $\square BCED = \square BDLM + \square CELM = \square ABFG + \square ACKH$

İspat 2:



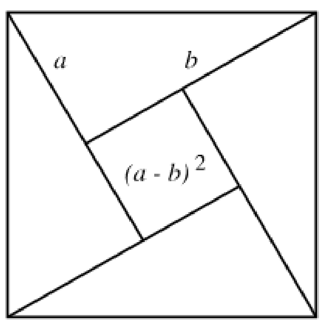
Şekil 3.3.1.2



Şekil 3.3.1.3

$$(a+b)^2 = 4.\frac{a.b}{2} + c^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

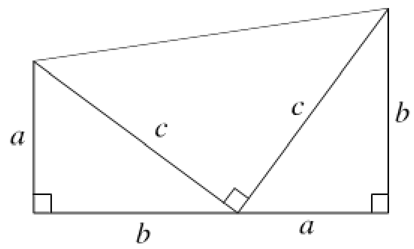
$a^2 + b^2 = c^2$ bulunur.



Şekil 3.3.1.4

$$c^2 = 4.\frac{a.b}{2} + (a-b)^2 = 2.a.b + a^2 - 2.a.b + b^2 = a^2 + b^2$$

İspat 3:



Şekil 3.3.1.5

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2}=2.\frac{a.b}{2}+\frac{c^2}{2}$$

$$\frac{a^2+2.a.b+b^2}{2}=a.b+\frac{c^2}{2}$$

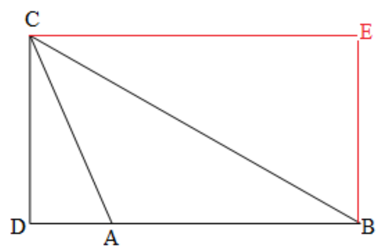
$$a^2+2.a.b+b^2=2a.b+c^2$$

$a^2+b^2=c^2$ bulunur.

3.3.2 Pisagor Teoreminin sonuçları

Teorem 3.3.2.1: Geniş açılı üçgenlerde geniş açının karşısındaki kenarın karesi, diğer kenarların kareleri toplamından büyüktür. [16]

İspat:



Şekil 3.3.2.1

$\triangle ABC$ üçgeni geniş açılı bir üçgen olsun. $m(\angle BAC)>90^0$ verilsin. $[AB]$ye dik olacak şekilde $[CD]$ alınırsa,

1. $\triangle BDC$ üçgeninde Pisagor teoreminden $|CD|^2+(|DA|+|AB|)^2=|BC|^2$ olur.

2. $|CD|^2+|DA|^2+2.|DA|.|AB|+|AB|^2=|BC|^2$

3. $\triangle ADC$ üçgeninde Pisagor teoreminden $|CD|^2+|DA|^2=|AC|^2$ olur.

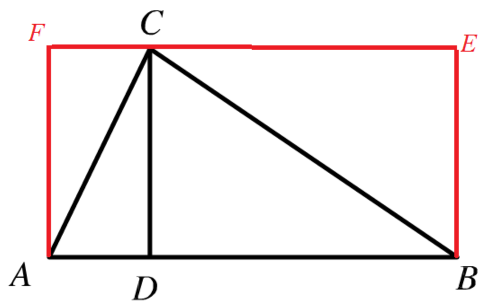
4. $|AC|^2+|AB|^2+2.|DA|.|AB|=|BC|^2$

5. $|BC|^2>|AC|^2+|AB|^2$ olduğu görülür.

SONUÇ: $A(\triangle BDC)=\frac{1}{2}A(\square DBEC)$ dir.

Teorem 3.3.2.2: Dar açılı üçgenlerde büyük açının karşısındaki kenarın karesi, diğer kenarların kareleri toplamından küçüktür. [4]

İspat:



Şekil 3.3.2.2

1. $\triangle BDC$ üçgeninde Pisagor teoreminden $|CD|^2+(|AB|-|DA|)^2=|BC|^2$ olur.

2. $|CD|^2+|AB|^2-2.|DA|.|AB|+|DA|^2=|BC|^2$

3. $\triangle ADC$ üçgeninde Pisagor teoreminden $|CD|^2+|DA|^2=|AC|^2$ olur.

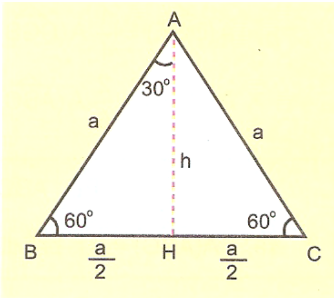
4. $|AC|^2+|AB|^2-2.|DA|.|AB|=|BC|^2$

5. $|BC|^2<|AC|^2+|AB|^2$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.2.3: *ABC* eşkenar üçgensel bölgesinin bir kenarının uzunluğu *a br* ise,

$A(\triangle ABC)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}br^2$ dir.[2]

İspat:



Şekil 3.3.2.3

$|AH|=h$ yüksekliğini çizelim. Eşkenar üçgende her yükseklik aynı zamanda kenarortay olduğundan, $|BH|=|HC|=\dfrac{a}{2}$ olur.

ABH dik üçgeninde Pisagor teoreminden,

$h^2=a^2-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{3a^2}{4}\Rightarrow|AH|=h=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}br$ olur.

$A(\triangle ABC)=\dfrac{1}{2}|BC|.|AH|=\dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}br^2$ olur.

3.3.3 Orantı ve Benzerlik

Bu bölümde oran ve orantının özellikleri verilerek benzerlik teoremleri incelenecektir.

Tanım 3.3.3.1: Aynı cins iki çokluğun bölme yoluyla karşılaştırılmasına *oran* denir. a nın b ye oranı $\frac{a}{b}$ olarak gösterilir.[13]

Tanım 3.3.3.2 : İki veya daha fazla oranın eşitliğine *orantı* denir.

$\frac{a}{b} = k$ ise k ya *orantı sabiti* denir.

$a, b, c, d, e, ...$ sayıları $a', b', c', d', e', ...$ sayıları ile oranlandığında

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \cdots$ sağlanır.

Teorem 3.3.3.1: $a, b, c, d, e, ...$ sayıları $a', b', c', d', e', ...$ sayıları ile orantılı ise;

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = ... = \frac{a+b+c+...}{a'+b'+c'+...}$$

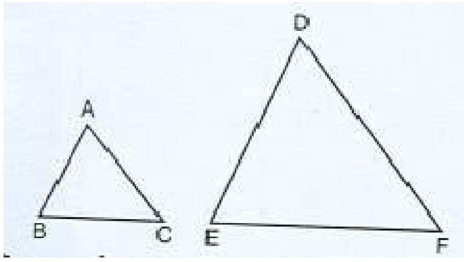
İspat:

1. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = ...$ ise $a = ka'$, $b = kb'$, $c = kc'$, ... şeklinde yazılabilir.
2. $a + b + c + ... = ka' + kb' + kc' + ... = k\left(a' + b' + c' + ...\right)$
3. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = ... = \frac{a+b+c+...}{a'+b'+c'+...} = \frac{ka'+kb'+kc'+...}{a'+b'+c'+...} = \frac{k\left(a'+b'+c'+...\right)}{a'+b'+c'+...} = k$

Benzer şekilde,

1. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$
2. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \quad \frac{a-a'}{a'} = \frac{b-b'}{b}$
3. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \quad \frac{a+a'}{a'} = \frac{b+b'}{b}$ olduğu gösterilebilir. [16]

Tanım 3.3.3.2: İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ve karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise bu üçgenlere *benzer üçgenler* denir.



Şekil 3.3.3.1

Şekildeki üçgenler arasında, $ABC \leftrightarrow DEF$ eşlemesi verilsin.

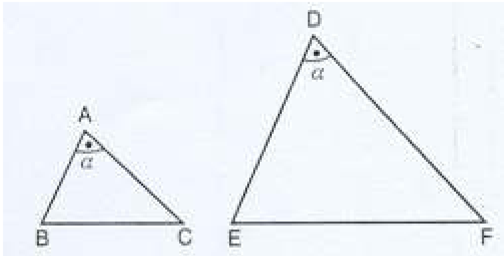
$$\left.\begin{array}{l} m(\angle A) = m(\angle D) \\ m(\angle B) = m(\angle E) \\ m(\angle C) = m(\angle F) \end{array}\right\} \text{ve } \frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|FE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$$

ise $\triangle ABC$ ile $\triangle DEF$ benzerdir ve bu benzerlik $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.3.3: Benzer iki üçgenin karşılıklı kenarlarının uzunlukları oranına *benzerlik oranı* denir. Benzerlik oranı pozitif bir k reel sayısıdır. Ayrıca eş üçgenler de benzerdirler ve benzerlik oranları 1 dir.

Sonuç: Birbirine eş olan iki üçgen her zaman benzerdirler, fakat birbirine benzer iki üçgen her zaman eş üçgenler olmayabilirler.

Aksiyom 3.3.3.1: İki üçgenin karşılıklı ikişer kenarlarının uzunlukları orantılı ve bu kenarların arasında kalan açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe *kenar açı kenar* (K.A.K.) benzerliği, bu aksiyoma da *K.A.K. benzerlik aksiyomu* denir.



Şekil 3.3.3.2

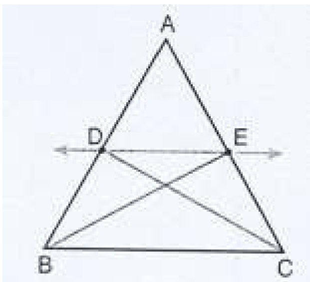
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = k \\ m(\angle A) = m(\angle D) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

Buradan $m(\angle B) = m(\angle E)$, $m(\angle C) = m(\angle F)$ ve $\dfrac{|BC|}{|FE|} = k$ diyebiliriz. [2]

Teorem 3.3.3.2: (Temel Orantı Teoremi) Bir üçgenin bir kenarına paralel olan ve diğer iki kenarını kesen bir doğru, kestiği kenarları orantılı parçalara ayırır. [4]

İspat: ABC bir üçgen ve $DE \parallel [BC]$ kabulümüz olmak üzere,

$\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.3.3.4

$[BE]$ ile $[CD]$ nı çizersek;

1. $\dfrac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle EDC)} = \dfrac{|AD|}{|DB|}$

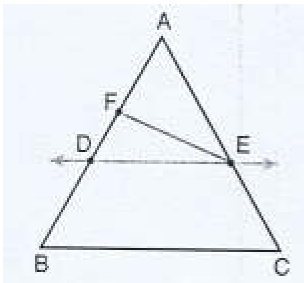
2. $\dfrac{A(\triangle ADE)}{A(\triangle EDC)} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$

3. $A(\triangle DEB) = A(\triangle EDC)$

4. $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$

Teorem 3.3.3.3 (Temel Orantı Teoreminin Karşıtı) Bir doğru bir üçgenin iki kenarını farklı noktalarda keser ve kenarlar üzerinde orantılı parçalar ayırırsa, bu durumda üçüncü kenara paralel olur. [18]

İspat: ABC üçgeninde $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$ kabul ediyoruz, bu takdirde $[DE] \parallel [BC]$ olduğunu göstermeliyiz.



Şekil 3.3.3.5

$[EF]$, E noktasından geçen ve $[BC]$ na paralel olan bir doğru parçası olsun.

1. $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AE|}{|EC|}$

2. $\dfrac{|AE|}{|EC|} = \dfrac{|AF|}{|FB|}$ (Teorem 3.3.3.2)

3. $\dfrac{|AD|}{|DB|} = \dfrac{|AF|}{|FB|}$

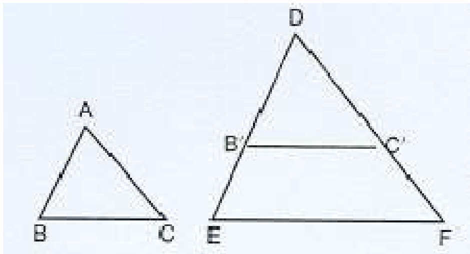
4. $|AF| = |AD|$

buradan *D* ile *F* noktaları çakışıktır.

5. $[DE] \parallel [BC]$

Teorem 3.3.3.4: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ise bu iki üçgen benzerdir. Bu benzerliğe *Açı Açı Açı (A.A.A.) benzerliği* denir.

İspat:



Şekil 3.3.3.6

$ABC \leftrightarrow DEF$,

$m(\angle A) = m(\angle D)$

$m(\angle B) = m(\angle E)$

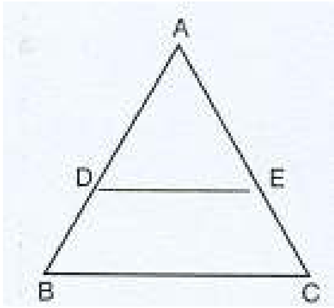
$m(\angle C) = m(\angle F)$ dir. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ olduğunu gösterelim;

DEF üçgeninde $[AB] \cong [DB']$ ve $[AC] \cong [DC']$ olacak şekilde $[B'C']$ nı çizelim.

1. $\triangle ABC \cong \triangle DB'C'$ (K.A.K. eşlik aksiyomu)
2. $m(\angle B) = m(\angle E) = m(\angle DB'C')$
3. $[B'C'] \parallel [EF]$ ve $[BC] \cong [B'C']$
4. $\dfrac{|DB'|}{|B'E|} = \dfrac{|DC'|}{|C'F|}$ veya $\dfrac{|DB'|}{|DE|} = \dfrac{|DC'|}{|DF|}$ (Temel orantı teoremi)
5. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|}$
6. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (K.A.K benzerlik aksiyomu)

Sonuç 1: Verilen herhangi iki üçgenin karşılıklı iki açısı eş ise bu üçgenler benzer üçgenlerdir. Dolayısıyla A.A.A. benzerlik teoremi, A.A. benzerlik teoremi olarak ifade edilebilir.

Sonuç 2:



Şekil 3.3.3.7

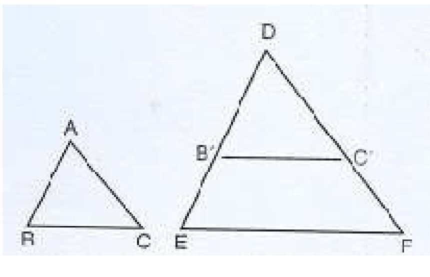
Bir üçgenin herhangi bir kenarına paralel olarak çizilen ve diğer kenarlarını kesen bir doğru parçası, bu üçgene benzer bir üçgen oluşturur.

$[DE] \parallel [BC] \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ dir.

Teorem 3.3.3.5: İki üçgen arasında yapılan bir eşlemede, karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu üçgenler benzerdir. Bu benzerliğe *Kenar Kenar Kenar (K.K.K.) benzerliği* denir.

İspat:

$ABC \leftrightarrow DEF$, $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|FE|} = \dfrac{|AC|}{|DF|} = k$ olsun, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ olduğunu göstermemiz gerekir.



Şekil 3.3.3.8

$[AB] \cong [DB']$ ve $[AC] \cong [DC']$ olacak şekilde $[B'C']$ nı çizelim.

1. $\dfrac{|DB'|}{|DE|}=\dfrac{|DC'|}{|DF|}$

2. $[B'C'] \parallel [EF]$

3. $m(\angle E)=m(\angle DB'C')$ (yöndeş açılar)

$m(\angle F)=m(\angle DC'B')$

4. $\triangle DB'C' \cong \triangle DEF$ (A.A.A. benzerlik teoremi)

5. $\dfrac{|DB'|}{|DE|}=\dfrac{|B'C'|}{|EF|} \Rightarrow |B'C'|=\dfrac{|DB'|.|EF|}{|DE|}$

6. $|B'C'|=\dfrac{|AB|.|EF|}{|DE|}$

7. $\dfrac{|AB|}{|DE|}=\dfrac{|BC|}{|EF|} \Rightarrow |BC|=\dfrac{|AB|.|EF|}{|DE|}$

8. $|BC|=|B'C'|$

9. $\triangle ABC \cong \triangle DB'C$ (K.K.K. eşlik teoremi)

10. $m(\angle DB'C')=m(\angle B)=m(\angle E)$

11. $m(\angle DC'B')=m(\angle C)=m(\angle F)$

12. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (A.A. benzerlik teoremi)

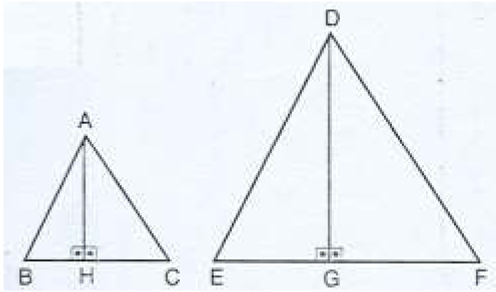
Teorem 3.3.3.6: Benzer iki üçgenin;

a. Karşılıklı yüksekliklerinin uzunlukları oranı,

b. Karşılıklı kenarortaylarının uzunlukları oranı,

c. Karşılıklı açıortaylarının uzunlukları oranı benzerlik oranına eşittir.

İspat :



Şekil 3.3.3.9

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ve $\dfrac{|AB|}{|DE|}=\dfrac{|BC|}{|FE|}=\dfrac{|AC|}{|DF|}=k$ olsun.

a. $[AH]$ ve $[DG]$ yüksekliklerini çizelim.

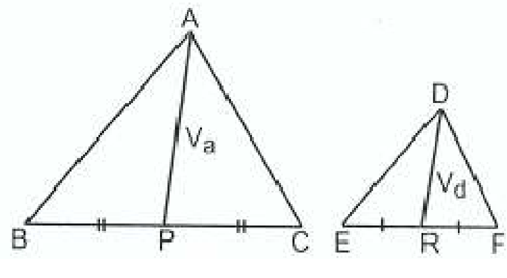
$m(\angle B)=m(\angle E)$

$m(\angle BHA)=m(\angle EGD)=90^0$

$\triangle ABH \sim \triangle DEG$ (A.A.A. benzerlik teoremi)

O hâlde, $\dfrac{|AB|}{|DE|}=\dfrac{|AH|}{|DG|}=k$ olur.

b.



Şekil 3.3.3.10

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ve $\dfrac{|BC|}{|FE|}=k$ olsun.

$[AP]$ ve $[DR]$ kenarortaylarını çizelim.

1. $m(\angle B) = m(\angle E)$ (üçgenlerin benzerliği)

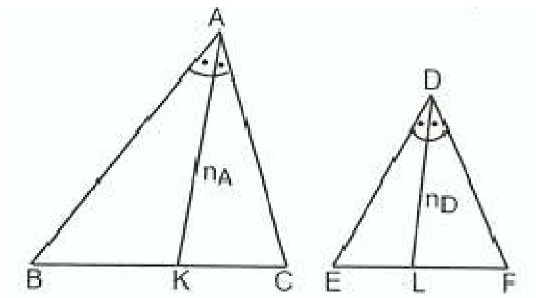
2. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|BC|}{|EF|} = \dfrac{2.|BP|}{2.|ER|} = \dfrac{|BP|}{|ER|}$ (kenarortay ve benzerlik)

1. , 2. ve K.A.K benzerlik aksiyomundan;

3. $\triangle ABP \sim \triangle DER$

4. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AP|}{|DR|} = \dfrac{V_a}{V_b} = k$

c.



Şekil 3.3.3.11

$[AK]$ ve $[DL]$ açıortaylarını çizelim.

1. $m(\angle B) = m(\angle E)$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$)

2. $\dfrac{1}{2} m(\angle BAC) = \dfrac{1}{2} m(\angle EDF)$ ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$)

3. $m(\angle BAK) = m(\angle EDL)$

4. $\triangle ABK \sim \triangle DEL$ (A.A benzerlik teoremi)

5. $\dfrac{|AB|}{|DE|} = \dfrac{|AK|}{|DL|} = \dfrac{n_A}{n_D} = k$

Sonuç: Benzer iki üçgenin karşılıklı tüm elemanlarının uzunlukları oranı, benzerlik oranına eşittir.

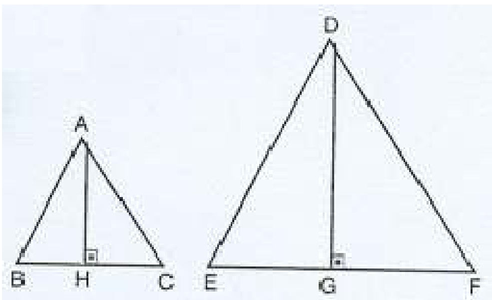
1. $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{e} = \dfrac{c}{f} = \dfrac{V_a}{V_d} = \dfrac{V_b}{V_e} = \dfrac{V_c}{V_f} = \dfrac{h_a}{h_d} = \dfrac{h_b}{h_e} = \dfrac{h_c}{h_f} = \dfrac{n_A}{n_D} = \dfrac{n_B}{n_E} = \dfrac{n_C}{n_F} = k$

Benzerlik oranı çevreleri oranına eşittir.

2. $\dfrac{a}{d}=\dfrac{b}{e}=\dfrac{c}{f}=\dfrac{a+b+c}{d+e+f}=\dfrac{Ç(\triangle ABC)}{Ç(\triangle DEF)}=k$

Teorem 3.3.3.7: Benzer iki üçgensel bölgenin alanlarının oranı, benzerlik oranının karesine eşittir.[2]

İspat: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ve $\dfrac{|BC|}{|EF|}=k$ olsun. $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)}=k^2$ olduğunu gösterelim.



Şekil 3.3.3.12

$[AH]\perp[BC]$ ve $[DG]\perp[EF]$ olacak şekilde $[AH]$ ve $[DG]$ yüksekliklerini çizelim.

1. $\dfrac{|BC|}{|EF|}=\dfrac{|AH|}{|DG|}=k$ (Teorem 3.3.3.6)

2. $\dfrac{A(\triangle ABC)}{A(\triangle DEF)}=\dfrac{\frac{|BC|.|AH|}{2}}{\frac{|EF|.|DG|}{2}}=\dfrac{|BC|}{|EF|}.\dfrac{AH}{DG}=k.k=k^2$

3.4 Çemberin Nötral Olmayan Geometrisi

3.4.1 Çevre açı ve teğet-kiriş açılar

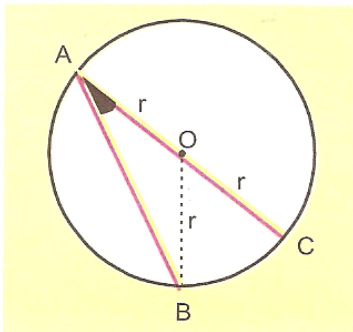
Tanım 3.4.1.1: Köşesi çember üzerinde olan açıya *çevre açı* denir.[11]

Teorem 3.4.1.1: Bir çevre açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısına eşittir.

İspat: *Ç(O,r)* çemberindeki *BAC* çevre açısı *BC* yayını görsün,

$m(\angle BAC)=\dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ olduğunu gösterelim.

a) Çevre açının bir kenarı merkezden geçiyorsa oluşan *ABO* ikizkenar üçgeninde;



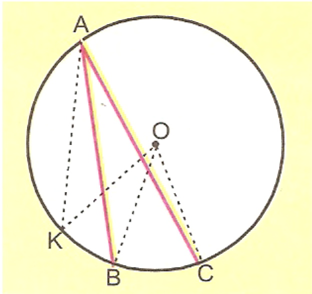
Şekil 3.4.1.1

$m(\angle BAC)=m(\angle ABO)$ ve $m(\angle BOC)=m(\angle BAC)+m(\angle ABO)$ (dış açıdan)

$m(\angle BOC)=2m(\angle BAC)\Rightarrow m(\angle BAC)=\dfrac{1}{2}m(\angle BOC)$ olur. Buradan,

$m(\angle BAC)=\dfrac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$ bulunur.

b) Çevre açının kenarları merkezden geçmiyorsa;



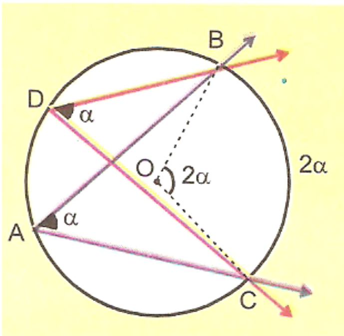
Şekil 3.4.1.2

$$m(\angle BAC)=m(\angle KAC)-m(\angle KAB)=\frac{1}{2}m(\angle KOC)-\frac{1}{2}m(\angle KOB)$$

$$\frac{1}{2}\left[m(\angle KOC)-m(\angle KOB)\right]=\frac{1}{2}m(\angle BOC)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BC}\right)$$ olur.

Sonuç 1: Bir çemberde aynı yayı gören çevre açıların ölçüleri eşittir.

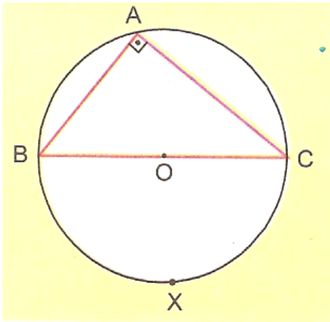
Sonuç 2: Bir çemberde çevre açının ölçüsü,aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.



Şekil 3.4.1.3

$$\left.\begin{array}{l} m\left(\widehat{A}\right)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BC}\right)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BOC}\right) \\ m\left(\widehat{D}\right)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BC}\right)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BOC}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{A}\right)=m\left(\widehat{D}\right)$$ dır.

Sonuç 3: Bir çemberde çapı gören çevre açının ölçüsü 90^0 dir.



Şekil 3.4.1.4

Ç(O,r) çemberinde, (Şekil 3.4.1.4)

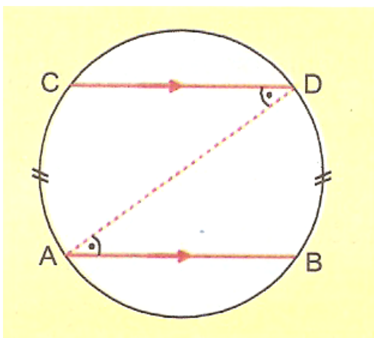
$m\left(\widehat{A}\right)=\frac{1}{2}m\left(\widehat{BXC}\right)=\frac{1}{2}.180^0=90^0$ olur.

Sonuç 4: Bir çemberde;

a) Eş yayları gören çevre açılar eştir.

b) Eş çevre açıların gördüğü yaylar eştir.

Sonuç 5: Bir çemberde, paralel iki kirişin arasında kalan yay parçaları eştir.



Şekil 3.4.1.5

$[AB]\parallel[CD]$ dır. A ile D noktaları birleştirilirse,

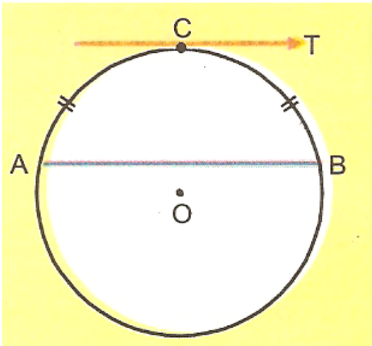
$m(\angle ADC)=m(\angle DAB)$ (İç ters açılar)

$\angle ADC \cong \angle DAB$ olur.

Eş çevre açıların gördükleri yaylar eş olduğundan,

$\overparen{AC} \cong \overparen{BD}$ veya $m\left(\overparen{AC}\right) = m\left(\overparen{BD}\right)$ olduğu görülür.

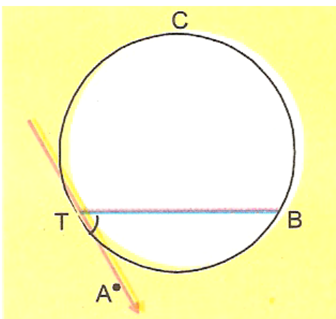
Sonuç 6: Bir çemberde, herhangi bir kiriş ile buna paralel bir teğet arasında kalan yay parçaları eştir.



Şekil 3.4.1.6

$[AB] \parallel [CT$ olduğundan, $m\left(\overparen{CA}\right) = m\left(\overparen{CB}\right)$ dır.

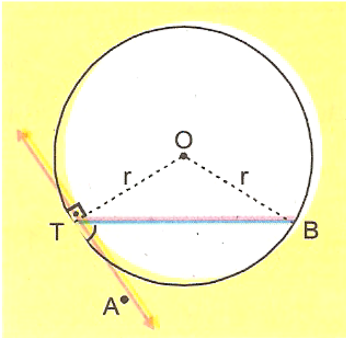
Tanım 3.4.1.2: Köşesi çember üzerinde, kenarlarından biri çemberin teğeti, diğeri çemberin kirişi olan açıya *teğet-kiriş açı* denir.



Şekil 3.4.1.7

Teorem 3.4.1.3: Bir teğet-kiriş açının ölçüsü, gördüğü yayın ölçüsünün yarısıdır.

İspat:



Şekil 3.4.1.8

Ç(O,r) çemberinde, ATB teğet kiriş açısının gördüğü yay $\overset{\frown}{TB}$ olsun.

$m(\angle ATB)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{TB}\right)$ olduğunu gösterelim.

AT doğrusu, çembere T noktasında teğet olduğundan, $[OT]\perp[AT]$dır.

Buna göre, $m(\angle ATB)+m(\angle BTO)=90^0$ dir.

OTB üçgeninde $|OT|=|OB|=r$ olduğundan, BTO ikizkenar üçgendir.

$m(\angle OTB)=m(\angle OBT)$ olur.

$m(\angle TOB)=180^0-2m(\angle OTB)$

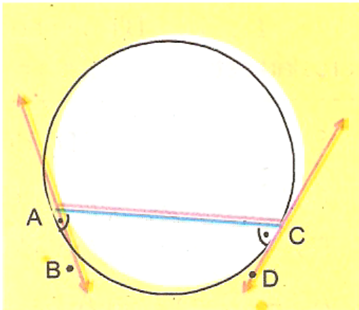
Bu eşitlikte, $m(\angle OTB)$ yerine eşiti olan $90^0-m(\angle ATB)$ yazılırsa;

$m(\angle TOB)=180^0-2\left[90^0-m(\angle ATB)\right]$

$m(\angle TOB)=2m(\angle ATB)$ ve $m(\angle TOB)=m\left(\overset{\frown}{TB}\right)$ olduğundan,

$m\left(\overset{\frown}{TB}\right)=2m(\angle ATB)\Rightarrow(\angle ATB)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{TB}\right)$ olur.

Sonuç 1: Bir çemberde aynı yayı gören teğet-kiriş açıların ölçüleri eşittir.



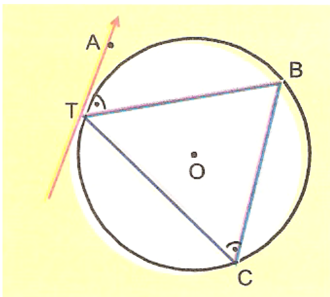
Şekil 3.4.1.9

BAC ile DCA teğet kiriş açıları, AC yayını gördüğünden;

$$\left.\begin{aligned}(\angle BAC) &= \frac{1}{2}m\left(\widehat{AC}\right)\\ (\angle ACD) &= \frac{1}{2}m\left(\widehat{AC}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow (\angle BAC) = (\angle ACD) \text{ olur.}$$

Sonuç 2: Teğet-kiriş açının ölçüsü, aynı yayı gören merkez açının ölçüsünün yarısına eşittir.

Sonuç 3: Bir çemberde, aynı yayı gören teğet-kiriş açıları ile çevre açıların ölçüleri birbirine eşittir.



Şekil 3.4.1.10

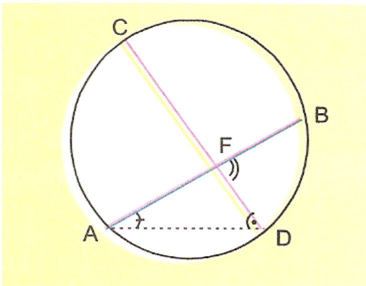
Şekildeki O merkezli çemberde, ATB ile TCB açıları aynı yayı gören teğet kiriş ve çevre açılardır.

$$\left.\begin{array}{l}(\angle ATB)=\dfrac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{TB}\right)\\ (\angle TCB)=\dfrac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{TB}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow(\angle ATB)=(\angle TCB)\ \text{olduğu görülür.}$$

Tanım 3.4.1.3: Bir çemberin iç bölgesinde kesişen iki kirişin oluşturduğu açıların her birine, *çemberin iç açısı* denir. [19]

Teorem 3.4.1.4: Bir çemberde bir iç açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçülerinin toplamının yarısına eşittir.

İspat:



Şekil 3.4.1.11

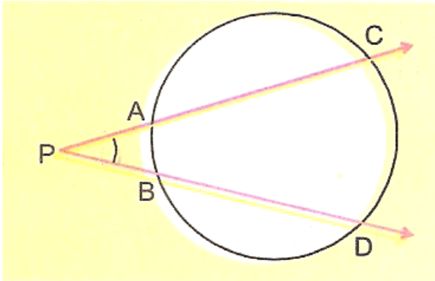
F çemberin içinde herhangi bir nokta,BFD iç açısının çemberden ayırdığı yaylar $\overset{\frown}{AC}$ ve $\overset{\frown}{BD}$ olsun. $m(\angle BFD)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{AC}\right)+m\left(\overset{\frown}{BD}\right)\right]$ olduğunu gösterelim.

A ve D noktalarını birleştirelim. FDA üçgeninde,

$$m(\angle BFD)=m(\angle FDA)+m(\angle FAD)$$

$$m(\angle BFD)=\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{AC}\right)+\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{BD}\right)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{AC}\right)+m\left(\overset{\frown}{BD}\right)\right]\ \text{bulunur.}$$

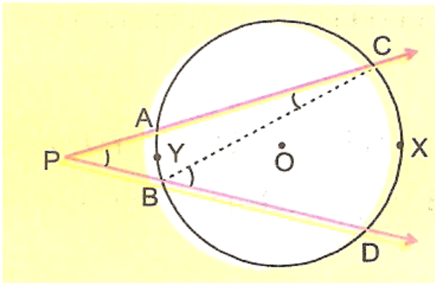
Tanım 3.4.1.4: Köşesi çemberin dış bölgesinde kenarları çemberin keseni veya teğeti olan açıya, *çemberin dış açısı* denir.



Şekil 3.4.1.12

DPC açısı çemberin dış açısıdır.

Teorem 3.4.1.5: Bir çemberde bir dış açının ölçüsü, gördüğü yayların ölçüleri farkının yarısına eşittir.



Şekil 3.4.1.13

Ç(O,r) çemberinde; *CPD* dış açı, $\overset{\frown}{DXB}$ büyük yay, $\overset{\frown}{AYB}$ küçük olsun. $m(\angle DPC)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{DXC}\right)-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]$ olduğunu gösterelim.

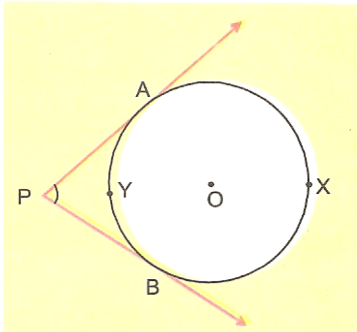
BC kirişini çizelim.

PBC üçgeninde, $m(\angle CBD)=m(\angle DPC)+m(\angle PCB)$ (Dış açı)

$$m(\angle DPC)=m(\angle PCB)-m(\angle CBD)\Rightarrow\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{DXC}\right)-\frac{1}{2}m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{DXC}\right)-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]$$

$m(\angle DPC)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{DXC}\right)-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]$ olur.

Sonuç: Bir dış açının iki kenarı bir çemberin iki teğeti ise, dış açı ile teğetlerin arasında kalan küçük yay parçasını ölçüleri toplamı 180^0 dir.



Şekil 3.4.1.14

Şekildeki *Ç(O,r)* çemberinin iki teğeti $[PA$ ve $[PB$ dir.

$$m(\angle P)=\frac{1}{2}\left[m\left(\overset{\frown}{AXB}\right)-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]\Rightarrow m(\angle P)=\frac{1}{2}\left[360^0-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]$$

$$m(\angle P)=\frac{1}{2}\left[360^0-2m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)\right]=180^0-m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)$$

$m(\angle P)+m\left(\overset{\frown}{AYB}\right)=180^0$ olur. [15]

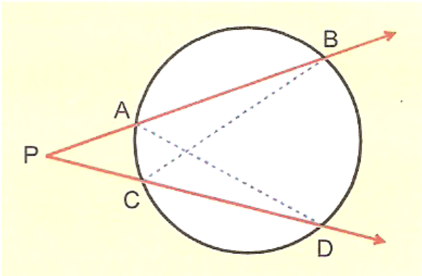
3.4.2 Bir noktanın bir çembere göre kuvveti

Tanım 3.4.2.1: Bir çember ile bu çemberin düzleminde bir *P* noktası verilsin. *P* noktasından geçen herhangi bir kesen, çemberi *A* ve *B* noktalarında kesiyorsa; $|PA|.|PB|$ sabitine *P* noktasının *çembere göre kuvveti* denir. *P* noktasının çembere göre kuvveti d^2-r^2 sayısına eşittir.

Teorem 3.4.2.1: Aynı düzlemde bir çember ve dışındaki bir *P* noktası verilsin. *P* den geçen herhangi iki kesen, çemberi sırasıyla *A,B,C* ve *D* noktalarında kesiyorsa,

$|PA|.|PB|=|PC|.|PD|$ dir.

İspat:



Şekil 3.4.2.1

P çemberin dışında bir nokta olsun. P noktasından çizilen kesenler çemberi sırasıyla A,B ,C ve D noktalarında kessin.

PDA ve PBC üçgenlerinde,

$m(\angle APD) = m(\angle CPB)$ (Ortak açı)

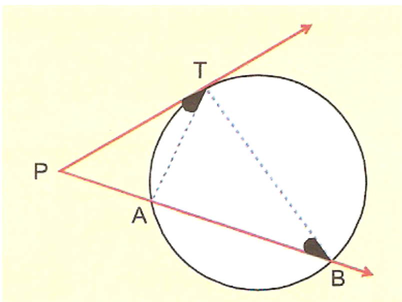
$m(\angle PDA) = m(\angle PBC)$ (Aynı yayı gören çevre açılar)

İki açısı eş olan üçgenlerin üçüncü açıları da eş olacağından,

$\triangle PDA \sim \triangle PBC$ (A.A. Benzerlik teoremi) dir. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar orantılı olduğundan $\dfrac{|PA|}{|PC|} = \dfrac{|PD|}{|PB|}$ ve buradan $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ elde edilir. [19]

Teorem 3.4.2.2: Aynı düzlemde bir çember ve dışında bir P noktası verilsin. $[PT$,T noktasında çembere teğet ve P den geçen bir kesen, çemberi A ve B noktalarından kesiyorsa, $|PT|^2 = |PA|.|PB|$ dir.

İspat:



Şekil 3.4.2.2

TA ve TB doğru parçalarını çizelim. PTA ve PBT üçgenlerinde P açısı ortak,

Aynı yayı gören teğet kiriş açı ve çevre açıların ölçüleri eşit olduğundan, $m(\angle PTA) = m(\angle PBT)$

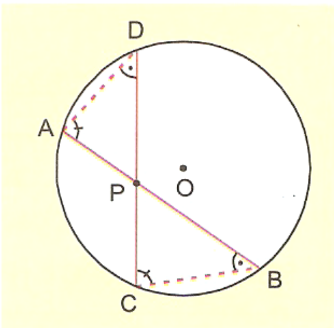
İki açısı eş olan üçgenlerin üçüncü açıları da eş olacağından,

$\triangle PTA \sim \triangle PBT$ (A.A. Benzerlik teoremi) dir. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar orantılı

$\dfrac{|PT|}{|PB|} = \dfrac{|PA|}{|PT|}$ ve buradan $|PT|^2 = |PA|.|PB|$ dir.

Teorem 3.4.2.3: P noktası *Ç(O,r)* çemberin iç bölgesinde herhangi bir nokta olsun. P den geçen herhangi iki kiriş, çemberi sırasıyla *A,B, C* ve D noktalarında kesiyorsa $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ dir.

İspat:



Şekil 3.4.2.3

$[AB]$ ve $[CD]$ kirişlerini çizelim. ADP ve CBP üçgenlerinde,

$m(\angle ADC) = m(\angle CBA)$ (Aynı yayı gören çevre açılar)

$m(\angle DAB) = m(\angle DCB)$ (Aynı yayı gören çevre açılar)

$m(\angle APD) = m(\angle CPB)$ (Ters açılar)

$\triangle ADP \sim \triangle CBP$ (A.A. Benzerlik teoremi) dir. Benzer üçgenlerde karşılıklı kenarlar orantılı olduğundan $\dfrac{|PA|}{|PC|} = \dfrac{|PD|}{|PB|}$ ve buradan $|PA|.|PB| = |PC|.|PD|$ elde edilir.

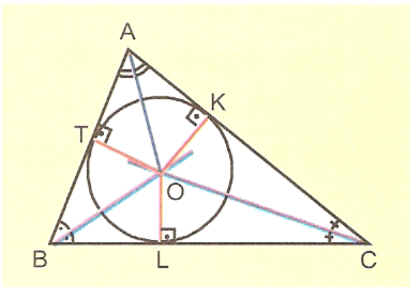
Sonuç: AB ve CD herhangi iki kesen olduğuna göre, $|PA|.|PB|$ çarpımı P noktasının çembere göre kuvvetidir. $|PA|.|PB| = |PC|.|PD| = d^2 - r^2$ dir.

P noktası çemberin üzerinde ise $d = r$ olduğundan, $d^2 - r^2 = 0$ olur. Bu nedenle kuvvet 0 dır. P noktası çemberin merkezinde ise $d=0$ olduğundan kuvvet $-r^2$ dir. [20]

3.4.3 Çemberde Üçgen ve Dörtgenler

Tanım 3.4.3.1: Bir üçgenin iç bölgesinde bulunan ve üçgenin kenarlarına teğet olan çembere, bu üçgenin *iç teğet çemberi* denir.

Bir üçgenin iç teğet çemberinin merkezi, üçgenin iç açıortaylarının kesim noktasıdır.

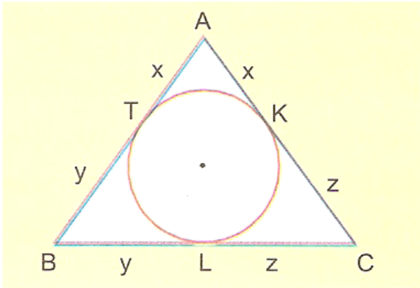


Şekil 3.4.3.1

Şekil 3.4.3.1 de ABC üçgeninde; $[AO$, $[BO$, $[CO$ iç açılarının açıortaylarıdır. Açıortay üzerinde alınan bir noktanın, açının kenarlarına olan uzaklığı eşit olduğunda $|OL| = |OK| = |OT|$ olup O noktası iç teğet çemberinin merkezidir. Üçgenin kenarları L, K, T noktalarında çembere teğettir. [19]

Teorem 3.4.3.1: ABC üçgeninde; $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ ve üçgenin çevresi $a + b + c = 2u$ ise; $|AT| = |AK| = u - a$, $|BT| = |BL| = u - b$, $|CK| = |CL| = u - c$ dir.[6]

İspat:



Şekil 3.4.3.2

$$\left.\begin{array}{l} |AT| = |AK| = x \\ |BT| = |BL| = y \\ |CK| = |CL| = z \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = x + y \\ b = x + z \\ c = x + y \end{array} \quad \text{olur.}$$

Buna göre ABC üçgeninin çevresi;

$a + b + c = 2u \Rightarrow x + y + z = u$ olur.

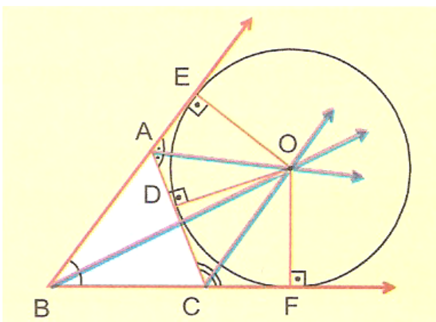
$y + z = a$ olduğundan , $x + a = u \Rightarrow x = u - a$

$x + z = b$ olduğundan , $y + b = u \Rightarrow y = u - b$

$x + y = c$ olduğundan , $z + c = u \Rightarrow z = u - c$ bulunur.

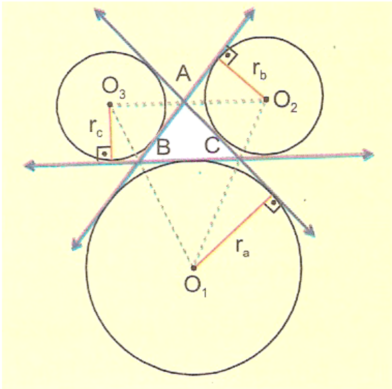
Tanım 3.4.3.2: Bir üçgenin dış bölgesinde bulunan ve üçgenin bir kenarı ile diğer iki kenarının uzantısı ile diğer iki kenarın uzantısına teğet olan çembere bu üçgenin *dış teğet çemberi* denir.[15]

Bir üçgende, bir köşeden çizilen iç açıortay, diğer köşeden çizilen dış açıortaylar bir köşede kesişir. Bu nokta üçgenin bir kenarı ile diğer iki kenarının uzantılarına teğet olan çemberin merkezidir.



Şekil 3.4.3.3

Şekilde $[BO$, B açısının iç açıortayı; $[AO$, A açısının dış açıortayı; $[CO$, C açısının dış açıortayıdır.



Şekil 3.4.3.4

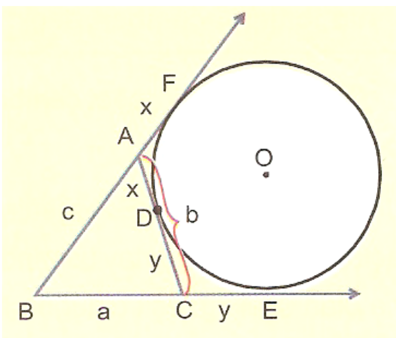
Bir ABC üçgeninin yarıçapları farklı üç dış teğet çemberi vardır. $r_a \neq r_b \neq r_c$ dir.

ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezleri olan O_1, O_2, O_3 noktaları birleştirilirse; ABC üçgeninin köşeleri, oluşan $O_1O_2O_3$ üçgeninin kenarları üzerindedir.

Teorem 3.4.3.2: ABC üçgeninde, O merkezli çember üçgenin dış teğet çemberi olduğuna göre; $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $a+b+c = 2u$ ise;

$|AD| = |AF| = u - c$, $|CE| = |CD| = u - a$, $|BE| = |BF| = u$ dur.

İspat:



Şekil 3.4.3.5

$|AD| = |AF| = x$, $|CE| = |CD| = y$ olsun.

$|BF| = |BE| \Rightarrow c + x = a + y$ yazılabilir.

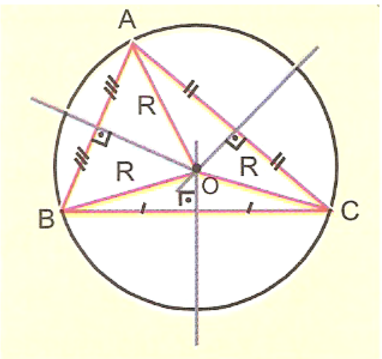
ABC üçgeninin çevresi $a + b + c = 2u \Rightarrow a + y + x + c = 2u$,

$a + y = x + c \Rightarrow 2(c + x) = 2u$ ve $a + y = c + x = u$ olur.

Buradan; $|AD| = |AF| = x = u - c$, $|CE| = |CD| = y = u - a$, $|BE| = |BF| = u$ olduğu bulunur.

Tanım 3.4.3.3: Bir üçgenin köşelerinden geçen çembere, bu üçgenin *çevrel çemberi* denir.

Üçgenin kenarları çemberin birer kirişi olduğundan, çevrel çemberin merkezi, kenar orta dikmelerinin kesişme noktasıdır.

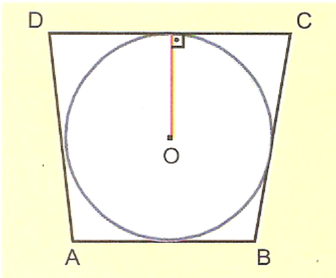


Şekil 3.4.3.6

Kirişin orta dikmesi çemberin merkezinden geçeceğinden, ABC üçgeninin $[AB]$, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarlarının orta dikmelerinin kesişme noktası, ABC üçgeninin çevrel çemberinin merkezi olan O noktasıdır. $|OA| = |OB| = |OC| = R$ dir.

Sonuç : $A(\triangle ABC) = \dfrac{a.h_a}{2}$ olduğundan, $A(\triangle ABC) = \dfrac{a.b.c}{4R}$ bulunur.

Tanım 3.4.3.4: Bütün kenarları bir çembere teğet olan dörtgene, *teğetler dörtgeni* denir.

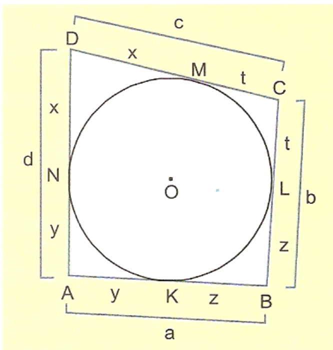


Şekil 3.4.3.7

Şekilde verilen $ABCD$ dörtgeninin bütün kenarları, O merkezli çembere teğet olduğundan, $ABCD$ teğetler dörtgenidir.

Teorem 3.4.3.3: Teğetler dörtgeninde karşılıklı kenarların uzunlukları toplamı birbirine eşittir.

İspat:



Şekil 3.4.3.8

K,L,M,N teğetlerin değme noktalarıdır. Çembere dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları eşit olduğundan;

$|AK| = |AN| = y$, $|ND| = |DM| = x$, $|KB| = |BL| = z$, $|LC| = |CM| = t$ alınırsa,

$|AB| + |DC| = y + z + x + t$

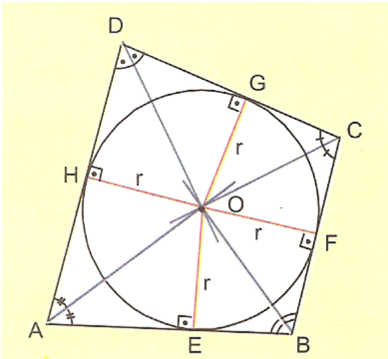
$|AD| + |BC| = y + x + z + t$ bulunur.

Her iki eşitlikte sağ taraflar eşit olduğundan, sol taraflarda eşittir.

$|AB|+|DC|=|AD|+|BC|$ veya $a+c=d+b$ olduğu görülür.

Teorem 3.4.3.4: Teğetler dörtgeninde iç açıortaylar, iç teğet çemberinin merkezinden geçer.[20]

İspat:



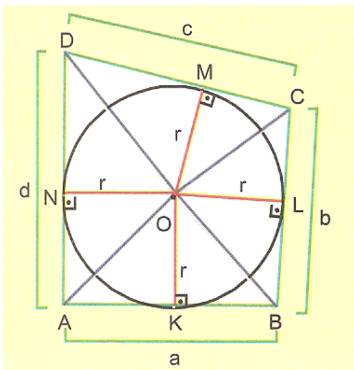
Şekil 3.4.3.9

E,F,G ve H teğetlerin teğetlerin değme noktaları olduğundan;

$[OE]\perp[AB]$, $[OF]\perp[BC]$, $[OG]\perp[CD]$, $[OH]\perp[AD]$ ve $|OG|=|OF|=r$ olduğundan; O noktası, C noktasının açıortayı üzerindedir. Aynı düşünce ile O noktası; D,A ve B açılarının da açıortayları üzerindedir. O halde, teğetler dörtgeninin iç açılarının açıortayları, çemberin merkezinde kesişirler.

Teorem 3.4.3.5: Teğetler dörtgeninin alanı, çevresinin uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçapı çarpımının yarısına eşittir.[19]

İspat:



Şekil 3.4.3.10

A,B,C,D noktalarını çemberin merkezine birleştirelim. Yarıçap teğete değme noktasında dik olacağından;

$$A(\triangle AOB)=\frac{1}{2}|AB|.|OK|=\frac{1}{2}.a.r$$

$$A(\triangle BOC)=\frac{1}{2}|BC|.|OL|=\frac{1}{2}.b.r$$

$$A(\triangle COD)=\frac{1}{2}|CD|.|OM|=\frac{1}{2}.c.r$$

$$A(\triangle AOD)=\frac{1}{2}|AD|.|ON|=\frac{1}{2}.d.r$$

$$A(ABCD)=A(\triangle AOB)+A(\triangle BOC)+A(\triangle COD)+A(\triangle AOD)$$

$$A(ABCD)=\frac{1}{2}.a.r+\frac{1}{2}.b.r+\frac{1}{2}.c.r+\frac{1}{2}.d.r$$

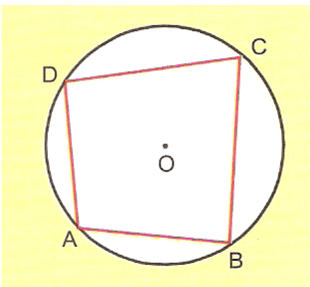
$$A(ABCD)=\frac{1}{2}.r(a+b+c+d)=\frac{1}{2}.r.Ç(ABCD)=\frac{r.Ç(ABCD)}{2}$$ olur.

$u=\dfrac{a+b+c+d}{2}$ alınırsa $A(ABCD)=u.r$ yazılabilir.

Sonuç 1: $ABCD$ teğetler dörtgeninde iç teğet çemberinin yarıçapı r ise, $A(ABCD)=r.(a+c)=r.(b+d)$ dir.

Sonuç 2: Bütün teğetler çokgenlerinin tüm alanları, çevrelerinin uzunluğu ile iç teğet çemberinin yarıçap uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.

Tanım 3.4.3.5: Köşeleri aynı çemberin üzerinde olan dörtgene, *kirişler dörtgeni* denir.



Şekil 3.4.3.11

Kirişler dörtgeni " kenarları aynı çemberin kirişleri olan dörtgen" olarak da tanımlanabilir.

Teorem 3.4.3.6: Bir kirişler dörtgeninde karşılıklı açılar bütünlerdir.

İspat: $ABCD$ kirişler dörtgeninde;

A açısı BCD yayını gördüğünden, $m(\angle A) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{BCD}\right)}{2}$ olur.

C açısı DAB yayını gördüğünden, $m(\angle C) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{DAB}\right)}{2}$ olur.

$$m(\angle A) + m(\angle C) = \frac{m\left(\overset{\frown}{BCD}\right)}{2} + \frac{m\left(\overset{\frown}{DAB}\right)}{2} = \frac{m\left(\overset{\frown}{BCD}\right) + m\left(\overset{\frown}{DAB}\right)}{2} = \frac{360^0}{2}$$

$m(\angle A) + m(\angle C) = 180^0$ elde edilir.

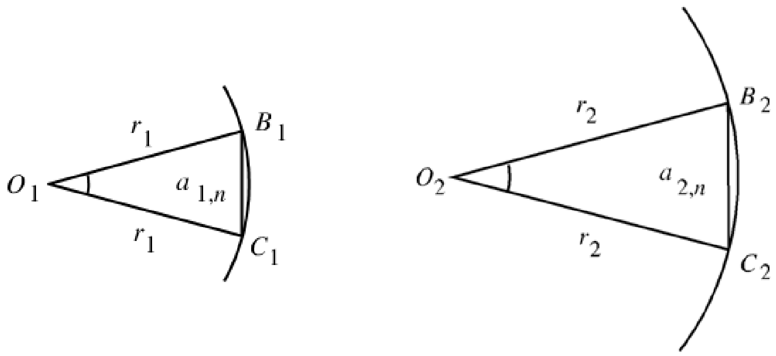
Benzer şekilde, $m(\angle B) + m(\angle D) = 180^0$ bulunur. [15]

3.4.4. Dairenin Çevresi ve Alanı

Tanım 3.4.4.1: Bir çember ile iç bölgesinin birleşim kümesine *daire* denir.[12]

Teorem3.4.4.1: Dairenin çevresi yarıçapıyla orantılıdır.

İspat: $p_1=(O_1;r_1)$ ve $p_2=(O_2;r_2)$ çemberlerinin çevreleri sırasıyla $Ç_1, Ç_2$ olsun.



Şekil 3.4.4.1

Verilen dairelerin her birinin içine düzgün altıgen çizmek mümkündür. Ard arda merkez açıları bölerek çokgenlerin kenarlarını artırabiliriz.

P_i dairelerinin içine bu çokgenleri çizmek mümkündür. i=1,2,…n,

$$\angle B_1O_1C_1 = \angle B_2O_2C_2 = \frac{360°}{n}$$

$\triangle B_1O_1C_1$ ve $\triangle B_2O_2C_2$ ikizkenar üçgenlerdir. İkizkenar olduğu için taban açıları eştir. K.A.K. benzerlik teoreminden $\triangle B_1O_1C_1 \sim \triangle B_2O_2C_2$ dir. Bu nedenle çokgenler eşit açılı ve benzer olmalıdırlar. Başka bir deyişle yazılı çokgenlerin kenarları yarıçaplarıyla orantılıdır. Daire ile çokgenin çevreleri arasındaki fark önemsenmez ise

$$\frac{Ç_1}{Ç_2} = \frac{n.a_{1,n}}{n.a_{2,n}} = \frac{a_{1,n}}{a_{2,n}} = \frac{r_1}{r_2} \text{ dir.}$$

Teorem 3.4.4.2: Dairenin alanı yarıçapının karesi ile orantılıdır.[19]

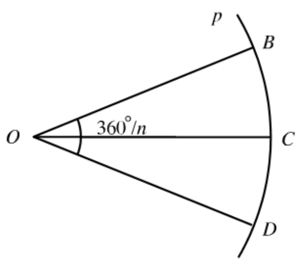
İspat: $p_1=(O_1;r_1)$ ve $p_2=(O_2;r_2)$ çemberlerinin çevreleri sırasıyla A_1, A_2 olsun. $\triangle B_1O_1C_1 \sim \triangle B_2O_2C_2$ olduğunu Teorem 3.4.4.1 de göstermiştik.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{n.A(\triangle B_1O_1C_1)}{n.A(\triangle B_2O_2C_2)}=\frac{A(\triangle B_1O_1C_1)}{A(\triangle B_2O_2C_2)}=\frac{r_1^2}{r_2^2}$$

A ve r herhangi bir dairenin yarıçapı ve alanıdır. Dairenin Alanı $A=\pi r^2$ dir. Dairenin çevresi $Ç=2\pi r$ dir.

Teorem 3.4.4.3: Bir dairenin alanı ve çevresinin orantılı sabitleri $a=2\pi$ ile ilişkilidir.[16]

İspat:



Şekil 3.4.4.2

p dairesini n eşit parçaya bölelim. Her bir merkez açı $\frac{360^0}{n}$ olur.

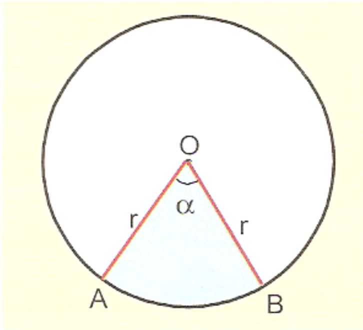
OBD kendine özgü bir daire dilimidir. *OBD, r* yükseklikli bir üçgen olsun. Bu üçgen

$$A=r.\frac{|\overset{\frown}{BD}|}{2}$$

alanına sahiptir. Dolayısıyla p dairesi

$$A=n.\frac{r}{2}.arc(\overset{\frown}{BD})=Ç.\frac{r}{2}=(2\pi.r).\frac{r}{2}=2\pi.\frac{r^2}{2}=\pi r^2 \text{ dir.}$$

Tanım 3.4.4.2: Bir dairenin iki yarıçapı ve bu yarıçapların belirttiği yay arasında kalan bölgeye, *daire dilimi* denir.



Şekil 3.4.4.3

Teorem 3.4.4.4: Yarıçapı r ve merkez açısının ölçüsü α olan daire diliminin alanı, $A_D = \dfrac{\pi . r^2 . \alpha}{360^0}$ dir.

İspat: 360^0 lik yaya karşılık gelen alan $\pi . r^2$ ise, ölçüsü α olan yaya karşılık gelen alan A_D dir.

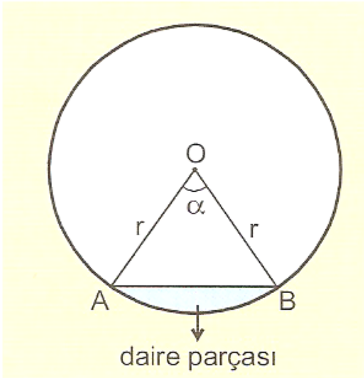
$A_D . 360^0 = \pi . r^2 . \alpha \Rightarrow A_D = \dfrac{\pi . r^2 . \alpha}{360^0}$ bulunur.

Sonuç: Merkez açısının ölçüsü α derece $= \theta$ radyan ise, $360^0 = 2\pi$ radyan olduğundan; $A_D = \dfrac{\pi . r^2 . \theta}{2\pi} = \dfrac{1}{2} r^2 . \theta$ olur.

Tanım 3.4.4.3: Bir kiriş ile daire yayının sınırladığı bölgeye, *daire parçası* denir.

Teorem 3.4.4.5: Yarıçapı r olan dairede ve α merkez açısı $\overset{\frown}{AB}$ yayını görüyorsa; $[AB]$ kirişinin çemberden ayırdığı daire parçasının alanı, $A_P = \dfrac{\pi . r^2 . \alpha}{360^0} - \dfrac{1}{2} r^2 . \sin\alpha$ dır.

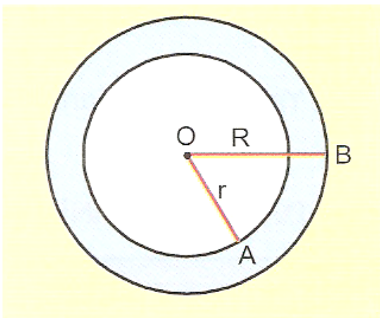
İspat:



Şekil 3.4.4.4

Daire diliminin alanı, $A_D = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360^0}$ ve AOB üçgeninin alanı, $A(\triangle AOB) = \frac{1}{2} r^2 . \sin\alpha$ olduğundan $A_P = A_D - A(\triangle AOB) = \frac{\pi . r^2 . \alpha}{360^0} - \frac{1}{2} r^2 . \sin\alpha$ olur.

Tanım 3.4.4.4: Merkezleri aynı ve yarıçapları farklı iki çemberle sınırlı bölgeye, *daire halkası* denir.



Şekil 3.4.4.5

Dıştaki çemberin yarıçapı $|OB| = R$ ve içteki çemberin yarıçapı $|OA| = r$ ise, daire halkasının alanı;

$A_H = \pi . R^2 - \pi . r^2 = \pi . \left(R^2 - r^2 \right) \ br^2$ olur.

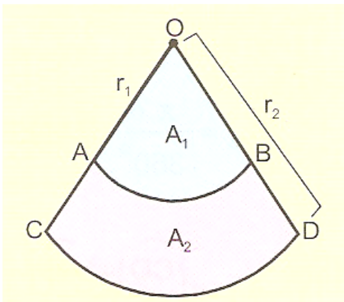
3.4.5. Çember ve Dairede benzerlik

Bütün çember ve daireler benzerdir. Benzerlik oranları ise yarıçaplarının oranına eşittir. Buna göre yarıçapları r_1 ve r_2 olan iki dairenin;

a) Çevreleri oranı $\dfrac{Ç_1}{Ç_2} = \dfrac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$

b) Alanlarının oranı $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \dfrac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.

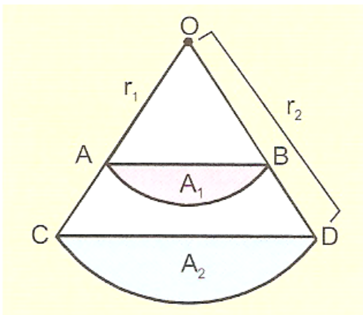
Sonuç olarak aşağıdaki özellikler yazılabilir.



Şekil 3.4.5.1

1. Şekildeki aynı merkezli, yarıçapları r_1 ve r_2 olan daire dilimleri için;

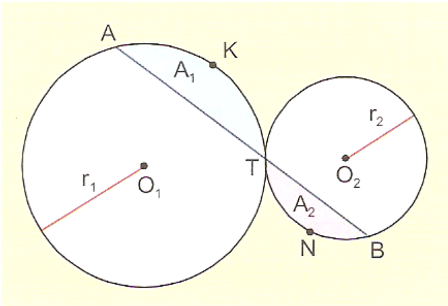
$$\frac{|OA|}{|OC|} = \frac{|OB|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|CD|} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{ve} \quad \frac{A_1}{A_1 + A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \text{ dir.}$$



Şekil 3.4.5.2

2. Şekildeki aynı merkezli, r_1 ve r_2 yarıçaplı çemberlerdeki A_1 ve A_2 daire parçaları için;

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \text{ dir.}$$



Şekil 3.4.5.3

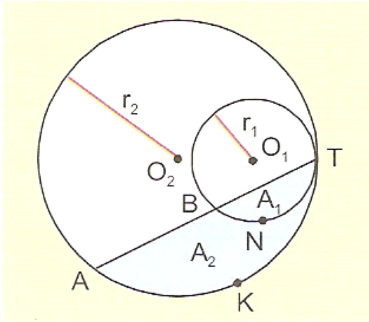
3. Şekilde, yarıçapları r_1 ve r_2 ve merkezleri O_1, O_2 olan çemberler T noktasından dıştan teğettir.

T, değme noktasından geçen $[AB]$nın sınırladığı AKT ve BNT daire parçaları benzerdir. Bu durumda;

a) $m(\angle AKT) = m(\angle BNT)$

b) $\frac{|AT|}{|TB|} = \frac{|\overset{\frown}{AKT}|}{|\overset{\frown}{BNT}|} = \frac{r_1}{r_2}$

c) $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.



Şekil 3.4.5.4

4. Şekilde merkezleri O_1, O_2 ve yarıçapları r_1 ve r_2 olan çemberler T noktasında içten teğettir.

A, B, T noktaları doğrusal olmak üzere;

a) $\dfrac{|BT|}{|AT|} = \dfrac{|\overset{\frown}{BNT}|}{|\overset{\frown}{AKT}|} = \dfrac{r_1}{r_2}$

b) $m(\angle AKT) = m(\angle BNT)$

c) BNT daire parçasının alanı A_1, AKT daire parçasının alanı $A_1 + A_2$ ise, $\dfrac{A_1}{A_1 + A_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2$ dir.[19]

KAYNAKLAR

[1] Baker, M., Powers, R. C., *A Stronger Triangle Inequality for Neutral Geometry,* Forum Geometricorum, Vol. 7 (2007) p. 25-29.

[2] Bilgiç, Ş.,Kıyak, Z.,Gökçen, J., *Geometri-1*, Ders Kitapları, Ankara,2007.

[3] Cangül, İ.N., *Matematik Tarihi,* Uludağ Üniversitesi, Bursa, 2006

[4] Çevik, G., *Öklid Geometride Üçgenler ve Temel Teoremler Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 2006.

[5] Fukagowa, H., Rothman, A., *Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry*, Princeton University 2008, syf 83

[6] Gürlü,Ö., *Meraklısına Geometri*, Zambak Yayınları, İstanbul,2008

[7] Hacısalihoğlu,H.H., Lise *Geometri-2*, Serhat Yayınları, İstanbul,2001.

[8] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml 21.11.2009

[9] http://www.math.niu.edu/~rusin/known-math/index/51-XX.html 24.11.2009

[10] http://www.math.uncc.edu/~droyster/math3181/notes/hyprgeom/node32.html 28.11.2009

[11] Komisyon, *Geometri I-II*, Fem Yayınları, İstanbul,2008

[12] Komisyon, *Öğretmen Klavuz Kitabı-6*, Devlet Kitapları, Ankara, 2006

[13] Komisyon, *Öğretmen Klavuz Kitabı-7,* Devlet Kitapları, Ankara, 2007

[14] Komisyon, *ÖSS Geometri*, Güvender Yayınları, İstanbul, 2005

[15] Özkan, F., *Lise Geometri*, Bem Koza Yayıncılık, Ankara, 2000.

[16] Stahl, S., *Geometry: From Euclid to Knots,* Pearson Education, inc., Upper Saddle River, New Jersey, 2002

[17] Stahl, S., *The Poincare Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry*, Boston:, Jones &Bartlett Publishers, 1993.

[18] Şahin,R., *Lise Geometri-1,* Zambak Yayınları, İstanbul,2005

[19] Tokerler, S., Sarıgül, Ö.E., Kılıçarslan, H., Yıldız, Y., Kavcar, M., *Geometri-2*, Devlet Kitapları, Ankara, 2005.

[20] Uysal,S., *Geometri-2*, Önde Yayıncılık, İstanbul, 1995.

[21] Yanney ,B. F. , Calderhead, J. A , *American Mathematical Monthly*, v.4, n 6/7, (1987), 168-170

[22] Yılgör, B.E., *Euclid Geometri ve Hiperbolik Geometrinin Matematik Eğitimindeki Yeri ve Önemi*, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir, 2007.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Rafet TÜRK

Doğum Yeri : Denizli

Doğum Tarihi : 27.11.1978

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Gümüşhane Anadolu Öğretmen Lisesi 1991-1996

Lisans : Marmara Üniversitesi, Atatürk Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği 2000

Yüksek Lisans:

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. 2000-2008 Çorlu Özel Zafer İlköğretim Okulu Matematik Öğretmeni
2. 2008-2009 Bursa Özel İlkbahar İlköğretim Okulu Müdür Yardımcısı
3. 2009-2010 İstanbul Özel Kasımoğlu Fen Lisesi Matematik Öğretmeni