AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİNEER DÜZLEMLER VE LİNEER UZAYLAR

Ayşe Gülsüm BAŞPINAR

DANIŞMAN
Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AFYONKARAHİSAR
MAYIS 2007

LİNEER DÜZLEMLER VE LİNEER UZAYLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşe Gülsüm Başpınar

DANIŞMAN

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MAYIS 2007

ONAY SAYFASI

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK'ün danışmanlığında
Ayşe Gülsüm BAŞPINAR tarafından hazırlanan
"LİNEER DÜZLEMLER VE LİNEER UZAYLAR"
başlıklı bu çalışma lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca
14/06/2007
tarihinde aşağıdaki jüri tarafından
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek lisans .tezi olarak oybirliği/oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

	Ünvanı, Adı, SOYADI	İmza
Başkan	Doç. Dr. Emine SOYTÜRK	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Erdoğan HALAT	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Derya SAĞLAM	

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
……./……/……. tarih ve
…………. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Emine SOYTÜRK
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER DÜZLEMLER VE LİNEER UZAYLAR

Ayşe Gülsüm BAŞPINAR

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Danışman: Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

Bu çalışmada Lineer Düzlemler ve Lineer Uzaylar incelenmiştir. Birinci bölümde Lineer Düzlem ve Lineer Uzay kavramlarının tarih içerisindeki gelişmeleri incelenmiştir. İkinci bölümde gerekli olan genel bilgiler anlatılmıştır. Üçüncü bölümde Yaklaşık Lineer Uzay tanımı ve bu uzaya örnekler verilmiştir. Ayrıca Yaklaşık Lineer Uzayın, üzerinde bulunma matrisinin nasıl oluşturulacağı ve Yaklaşık Lineer Uzayın doğrularını başka bir Yaklaşık Lineer Uzayın doğrularına dönüştüren lineer fonksiyonlar incelenmiştir.

Dördüncü bölümde Lineer Uzay tanımı yapılarak bu uzayların en iyi bilinen örnekleri olan Projektif Düzlemler ve Afin Düzlemlerle ilgili özellikler ve teoremler verilmiştir. Son bölümde ise Kısıtlı Lineer Uzaylar ve Kısıtlı Lineer Uzayların temel özellikleri incelenmiştir.

2007, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lineer Uzay, Yaklaşık Lineer Uzay, Kısıtlı Lineer Uzay

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

LINEAR PLANES AND LINEAR SPACES

Ayşe Gülsüm BAŞPINAR

Afyon Kocatepe University,
Institue for the Natural and Applied Sciences
Supervisor: Doç. Dr. Emine SOYTÜRK

In this work, Linear planes and Linear Spaces have been examined. In the entrance part, the historical development of Linear Planes and Linear Spaces have been explained. In the second chapter all the fundamental notions for this work are given.

In the third chapter, definition of nearly linear spaces and samples of these spaces are given. It's also explained how to establish the incident matrix of a nearly linear space and linear functions have been examined.

In the fourth chapter, Linear spaces have been described. The samples which are well known, of linear spaces, Projective planes and Affine planes have been examined. In the last chapter restricted Linear spaces and the basic features of restricted linear spaces are given.

2007, 70 pages
Key Words : Linear spaces, Nearly linear spaces, Restricted linear space.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve alakalarını benden esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Doç.Dr. Emine SOYTÜRK'e en içten teşekkürlerimle saygılar sunarım.
Tez çalışmalarım boyunca bana gösterdikleri sevgi ve alakadan dolayı sevgili annem Zeliha BAYRAM ve babam H. Hüseyin BAYRAM' a teşekkür ederim.

Ayşe Gülsüm BAŞPINAR
AFYONKARAHİSAR, Mayıs 2007

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{N}$	Noktalar Kümesi
$\mathcal{L}$	Doğrular Kümesi
o	Üzerinde bulunma bağıntısı
($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o)	Geometrik yapı
/A	Afin düzlem
IP	Projektif düzlem
U=($\mathcal{N}$,$\mathcal{L}$)	Yaklaşık lineer uzay
V=($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$)	Yaklaşık lineer uzayın duali
υ	Uzaydaki nokta sayısı
b	Uzaydaki doğru sayısı
<x>	x’in kapanışı
r_{ij}	N_i noktasının d_j doğrusu üzerinde bulunma değeri
s	U nun doğru düzenliliği
t	U nun nokta düzenliliği
$\mathcal{L}$	Kısıtlı lineer uzay
FSP3	Üçüncü tip sonlu semi afin düzlem

1. GİRİŞ

1639 yılında Fermat ve Descartes, Kartezyen geometriyi tanıtarak, geometriye cebir metotlarını kazandırmış ve matematik üzerinde çok geniş bir etki yapmıştır. 19. yüzyılın ortalarında, bu koordinat metotları ile ilgili bazı memnuniyetsizlikler vardı ve insanlar, serbest koordinatlanmış sentetik geometri metotları için araştırma yapmaya başlamışlardır.

19. yüzyılın başlarına doğru Bolzano'nun çalışmaları ile ilk olarak vektör kavramı kullanılmaya başlanmıştır. 1804'de basit geometrinin temelleri üzerine bir çalışma yayımlanmıştır. "Betrachtungen über einige Gegenstände der Elemantar Geometrie." Bolzano, bu çalışmada noktaları, doğruları ve düzlemleri tanımlanmamış elemanlar olarak almış ve işlemleri bunların üzerinde tanımlamıştır.

Geometrinin aksiyomlandırılması önemli bir adımdır ve lineer uzay kavramı için gerekli özete doğru bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır.

Koordinat geometriden uzaklaşmak, Poncelet ve Chasles'in ana görevi olmuştur. Poncelet ve Chasles sentetik geometriyi ilk bulanlardır. Analizdeki paralel gelişme, somut şeylerin uzaylarından (dizi uzayları gibi) soyut lineer uzaylara doğru olmuştur. Matrislerle tanımlanmış yerine koyma metodu yerine, soyut lineer operatörler soyut lineer uzaylar üzerinde tanımlanmalıdır.

1827'de Möbius "Der barycentrische Calcul a geometrical" kitabını yayımlamıştır. Möbius bu kitabında doğrular ve koniklerin dönüşümleri üzerine çalışmıştır. Verilen herhangi bir ABC üçgeninde a, b, c ağırlıkları belirtilen sıraya göre A, B, C üzerinde ise böylece ağırlık merkezi P noktası tespit edilir. Möbius, düzlemdeki her P noktasının homojen [a, b, c] koordinatları ile tanımlandığını göstermiştir.

P deki ağırlık merkezini vermesi için Ağırlıklar A, B ve C üzerinde olmalıdır.1837'de Möbius, statik üzerine, iki eksene göre belirtilen bir vektörün boyu fikrini açıkça belirttiği bir kitap yayımlamıştır.

Möbius'un bu iki çalışması arasında, Bellavitis'in vektör tipinde nicelikleri içeren geometrik bir çalışması 1832'de yayımlanmıştır. Bellavitis'in temel nesneleri AB doğru parçaları olup, AB ve BA yı iki ayrı nesne olarak düşünmüştür.

Eğer bu doğru parçaları eşit ve paralel ise bu iki doğru parçasını eş olarak tanımlar. Böylece modern gösterimde "iki doğru parçası aynı vektörü temsil ediyorsa eştir" şeklinde kullanılmıştır.

Daha sonra Bellavitis, "doğru parçalarının toplamını" tanımlayarak, bir vektör uzay kavramının oluşmasına yardımcı olmuştur.

1814'de, Argond düzlem üzerinde kompleks sayıları noktalar olarak göstermiştir. Bu, reel sayıların ikililer olarak sıralanmasıdır. Hamilton kompleks sayıları iki boyutlu reel vektör uzayı olarak göstermiştir.

Bununla beraber tabiî ki bunları genel soyut terimler olarak kullanmamıştır. Bu sonuçları bir çalışmada İrlanda Akademisine 1833 de göstermiştir. Hayatının sonraki 10 yılını Reel sayılar üzerinde 3 boyutlu vektör uzayın çarpma işlemini tanımlamaya çalışarak geçirmiştir.

Hamilton, 4 boyutlu vektör uzayının önemli bir örneği olan quaternionları 1843'te yayımlamıştır.

1857'de Cayley quaternionların, matrislerle gösterilebileceğini fark etmiştir.
1867'de Laguerre Hermite bir mektup yazarak, "Sur le calcul des systémes linéaires." indisli tek harflerle gösterilen lineer eşitliklerin bir sisteminden bahsetmiştir. Laguerre bu lineer sistemlerin toplamını, çıkarmasını ve çarpmasını tanımlamıştır. Bu çalışmada

Laguerre cebirsel sistemleri kompleks sayılar olarak birleştirmeyi amaçlamıştır. Hamilton'un quaternionları ve notları, Galois ve Cauchy tarafından tanıtılmıştır.

Laguerre'nin lineer sistemlerdeki çalışmasını Carvollonun 1891 deki çalışması takip etmiştir. Bu çalışmada vektör fonksiyonları üzerinde operatörler tanımlanmış ve matrislerle operatörler arasındaki açık fark ortaya çıkarılmıştır.

"Bir matris ve bir operatör arasındaki farkı anlamak için, şu ifadeyi söylemek yeterli olacaktır. Eğer koordinat sistemi değiştirilirse, aynı vektör fonksiyonunu aynı operatörle farklı bir matris yardımıyla elde edebiliriz."

Koordinatsız geometri üzerinde çalışan başka bir matematikçi de Grassmann idi. Grassmann'ın çalışması büyük ölçüde orjinaldi. Fakat barycentric koordinatlarının gösterimi Möbius tarafından tanıtılmıştır. Grassmann'ın yazısı "Die Ausdehnungslehre" çok farklı versiyonlarla görülmüştür. Bunlardan ilki 1844 yılına aittir. Fakat okumak için çok zor bir çalışma olduğundan açıkça matematikçiler tarafından ilgi görmemiştir.

Böylece 1862'de Grassmann daha okunabilir bir versiyon yazmayı denemiştir. Grassmann bu yeni versiyonda çalışmak için Clebsch'den ilham almıştır.

Grassmann, toplama, skalerle çarpma ve çarpmanın bir biçimsel işlemini tanımladığı elemanların sistemini düşünmüştür. "Basit nicelikler" diye anılan tanımlanmamış elemanlarla başlamış ve belirtilen kuralları kullanarak da kompleks nicelikler oluşturmuştur.

Grasmann'ın çalışması vektör uzayların bilinen önermelerini içerir. Fakat bir çarpma işlemi tanımlandığından beri, Grasmann'ın yapıları bugünkü adıyla Cebirin özelliklerini sağlar. Kesin yapılar şimdi Grassmann'ın cebiri olarak bilinir. Grassmann'ın çalışmasında Lineer bağımsız ve Lineer bağımlı kümelerin elemanları açıkça belirtilmiştir.

Grassmann'ın 1844 deki çalışmasında skaler sonuçta görülmüştür.

Grassmann'ın 1862 deki "Die Ausdehnungslehreé versiyonu teorisinin bir özetini verdiği uzun bir tanıtım idi. Bu tanıtımda bazı matematikçiler tarafından itiraz edilmiş formal metotlarını da savunmuştur.

Grassmann'ın savunması, aksiyomatik bir teori kurduğunu göstermektedir.

Cauchy ve Saint-Venant'ın, Grassmann'a benzer sistemler bulmak için bazı iddaları vardır. Venant'ın iddiası, 1845'de Grassmann'ın yayımlanan çalışmasından bu yana, doğru olan ilk çalışmadır. Bu çalışmada Venant, doğru parçalarını Grassmann'ınkine benzer bir yolla çarpmıştır.

Grassmann Saint – Venant'ın çalışmasını okuduğunda, 1844'deki çalışmasını Venant'ın okumadığını fark etmiş ve Cauchy'e çalışmasının ilgili yerlerinin iki kopyasını göndererek, bir kopyasını da Saint – Venant'a göndermesini istemiştir. Cauchy'nin daha tipik olarak 1853'de yayımladığı "Sur les clefs algebruque in Comptes Rendus" da Grassmann'ın metoduna uyan, formal bir sembolik Metod tanımlamıştır. (Grassmann'a başvurmadan.) Grassmann, Acadèmie des Sciences'e şikayet etmiştir. Çalışmasının Cauchy'ninkinden daha önce yapıldığını belirtmiştir. 1854'de bir komite kimin öncelikli olduğunu araştırmak için toplanmış ancak hala komiteden bir sonuç alınmamıştır.

Grassmann'ın çalışmasının önemini ilk gören Hankel, 1867'de "Theorie der complexen Zahlensysteme" adlı bir makale yazmıştır. Sembollerin birleşiminin soyut olarak tanımlandığı formal sistemler hakkında yazılmış bir çalışmadır. Çalışmasının temelinde verildiği gibi Grassmann'ın "Die Ausdehnungslehre" çalışmasına inanmıştır.
Reel lineer uzayın aksiyomatik tanımını ilk veren 1888 yılında Torino'da bir kitap yayımlayan Peano olmuştur. Leibnitz, Möbius'un 1827'deki çalışmasını, Grassmann'ın 1844'deki çalışmasını ve Hamilton'un quaternionlar üzerine çalışmasını, kendisine formal hesaplarında yol gösteren fikirler olarak görmüştür.

Peano’nun 1888’de yazdığı “Calcolo geometrica secondo l’Ausdehnunglehre di h.Grassmann preceduto dele operazioni della logica deduttiva” kitabı dikkate değerdir. İşlemler kümesinin basit hesaplarının modern notasyonlarını tanıtmıştır.
$\cap,\cup,\in$ sırasıyla kesişim, birleşim ve elemanıdır sembolleridir. Bu, notasyonların kabul edilmesinden pek çok yıl önce olmuştur.

Aslında Peano’nun kitabı, yıllar boyunca çok az etki görmüştür. Modern bir lineer uzay ve lineer cebir tanımına içerik açısından hemen hemen denktir.

Peano’nun kitabının 9. bölümünde lineer uzay için aksiyomlar verilmiştir. Peano’nun 1888’de çalışmasının devamını yazdığına inanmak zordur. Sanki 1988’de yazılmış gibidir. Bu aksiyomlardan ilki, elamanların eşitliği ile ilgilidir.

1- a = b ancak ve ancak b = a,

Eğer a = b ve b = *c* ise a = c’dir.

2- a ve b gibi iki elemanın toplamı a+b ile tanımlanır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

Eğer a = b ise $a + c = b + c$

$a + b = b + b$

$a + (b + c) = (a + b) + c$

Son eşitlik genel olarak $a + b + c$ ile gösterilir.

3- Eğer a sistemin bir elemanı ve m pozitif bir tamsayı ise, *ma* ile *m* tane *a* sayılarının toplamını anlayacağız. *a,b,…..* elemanların ve m, n pozitif tam sayıları için.

Eğer a = b ise $ma = mb$

$m.(a + b) = ma + mb$

$(m + n).a = ma + na$

$m.(na) = mna$

$1.a = a$

Herhangi bir reel sayı m için ma notasyonunun bir önceki eşitliklerdeki gibi bir anlamı olduğunu düşünebiliriz.
Peano, “0” ile gösterilen sıfır’ın varlığını belirterek devam etmiş ve $0.a = 0$ demiştir.

a - b demek a + (-b) demektir ve a - a = 0 ve 0 + a = 0 olduğunu göstermenin kolay olduğunu belirtmiştir.

Peano, lineer sistemi, onun dört koşulunu sağlayan herhangi bir sistem olarak tanımlamıştır. Bağımlı ve bağımsız nesneleri tanımlayarak, boyut kavramını vermiştir.

Sonlu boyutlu uzayların bir temeli olduğunu ispatlamış ve sonsuz boyutlu lineer uzayların örneklerini vermiştir.

Peano, x değişkenli f(x) tam fonksiyonunu düşünmüş, $f_1(x)$ ve $f_2(x)$’in toplamını tanımlamış ve f(x)’in sonucunu bir m reel sayısı ile göstermiştir.

Peano, lineer operatörleri lineer uzaylar üzerinde tanımlayarak, lineer operatörlerin sonucunu ve toplamını tanımlamıştır.

1890’da Pincherle, sonsuz boyutlu bir vektör uzay üzerinde lineer operatörlerin formal bir teorisi üzerine çalışmıştır. Her ne kadar çalışmalarında Peano’yu dikkate almasa da tersine d’Alembert ve Leibnitz’i soyut operatör teorisinde esas almıştır.

Bu alandaki pek çok çalışma gibi çok az bir etki yapmış ve Banach’a kadar aksiyomatik sonsuz boyutlu vektör uzaylar üzerine kimse çalışmamıştır.

Peano’nun ulaştığı seviyeye, hiç kimse yetişememesine rağmen, 1904’te Hilbert ve öğrencisi Schmidt fonksiyonların sonsuz boyutlu uzayları üzerine çalışmışlardır. Hilbert’in uzay teorisindeki geometrik dili tanıtan Schmidt, 1908’deki soyutlamalara doğru bir yaklaşım izlemiştir.

Tam aksiyomatik bir yaklaşım, 1920’deki Banach’ın doktora çalışmasında belirtilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: Elemanlarına noktalar denilen $\mathcal{N}$ kümesi ile, elemanlarına doğrular denilen $\mathcal{L}$ kümesi verilsin. $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ olmak üzere, $\mathcal{N} \times \mathcal{L}$ kümesi üzerinde tanımlı üzerinde bulunma bağıntısı o olmak üzere oluşturulan ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) sistemine (üçlüsüne) bir geometrik yapı denir.

Tanım2.2: $N_i \in \mathcal{N}$, $i = 1,2,3,\ldots$ noktaları verilsin. $N_i$od olacak biçimde bir $d \in \mathcal{L}$ doğrusu varsa N_1, N_2, N_3,…. noktaları doğrudaştır denir.
$\{N_i : N_i \in \mathcal{N}, N_i od, d \in \mathcal{L}\}$ kümesine de doğrudaş küme denir.

Tanım 2.3: $d_i \in \mathcal{L}$, $N o d_i$ olacak biçimde bir $N \in \mathcal{N}$ noktası varsa $d_1, d_2, \ldots$ doğruları noktadaştır denir.
$\{ d_i : d_i \in \mathcal{L}, N o d_i, N \in \mathcal{N}\}$ kümesine de noktadaş küme denir.

Tanım 2.4: $d_1, d_2 \in \mathcal{L}$, $d_1 \neq d_2$ olsun. $N o d_1$ ve $N o d_2$ olacak biçimde hiçbir $N \in \mathcal{N}$ noktası yoksa d_1 ve d_2 doğrularına paraleldir denir ve $d_1 \,//\, d_2$ ile gösterilir. d_1 doğrusu d_2 doğrusuna paralel değilse $d_1 \nparallel d_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.5: $\mathcal{N}$, elemanları noktalar, $\mathcal{L}$ elemanları doğrular olan küme olmak üzere $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ sistemine bir uzay denir.

Tanım 2.6: Aşağıdaki aksiyomları sağlayan $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ uzayına bir Yaklaşık Lineer Uzay veya Kısmî Düzlem denir.

YL1 : Herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır.
YL2 : İki nokta en çok bir doğru üzerindedir.

Örnek 2.1 : $\mathcal{N}$ noktalar kümesi Öklid 3- uzayının noktaları kümesi ve $\mathcal{L}$, alışılmış bütün doğruların kümesi ise U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) bir yaklaşık lineer uzaydır.

Tanım 2.7: Elemanlarına noktalar denilen $\mathcal{N}$ kümesi ve elemanlarına doğrular denilen $\mathcal{L}$ kümesi verilsin. $\mathcal{N} \cap \mathcal{L} = \emptyset$ olmak üzere, "o" da $\mathcal{N}$ x $\mathcal{L}$ kümesi üzerinde tanımlı bir üzerinde bulunma bağıntısı olmak üzere aşağıdaki A1, A2, A3 aksiyomlarını sağlayan ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$,o)geometrik yapısına Afin Düzlem denir. Bu Afin düzlem genellikle $\mathcal{A}$=($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) biçiminde gösterilir.

A1 : Her A,B$\in \mathcal{N}$, A $\neq$ B noktaları için Aod ve Bod olacak biçimde bir ve yalnız bir d$\in\mathcal{L}$ doğrusu vardır.

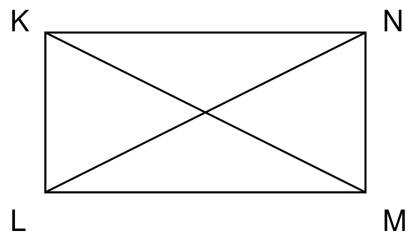
A2 : A $_{\emptyset}$ d olmak üzere, $\forall$ A$\in \mathcal{N}$ ve $\forall$ d $\in\mathcal{L}$ doğrusu için Aoc ve c // d olacak biçimde bir ve yalnız bir c$\in\mathcal{L}$ doğrusu vardır.

A3 : Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

Teorem 2.1 : Her sonlu $\mathcal{A}$ afin düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan n $\geq$ 2 özellikli bir n tam sayısı vardır. Bu tam sayıya ilgili afin düzlemin mertebesi denir.

1) $\mathcal{A}$ afin düzleminin her doğrusu üzerinde n tane nokta vardır.
2) $\mathcal{A}$ afin düzleminin her noktasından n+1 tane doğru geçer.
3) $\mathcal{A}$ afin düzlemindeki toplam nokta sayısı n^2 dir. $|\mathcal{N}| = n^2$
4) $\mathcal{A}$ afin düzlemindeki toplam doğru sayısı $n^2 + n$ dir. $|\mathcal{L}| = n^2 + n$

Örnek 2.2 : En Küçük Afin Düzlem
Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta K,L,M,N olsun.
$\mathcal{N}$= {K,L,M,N}
$\mathcal{L}$ = {KL,LM,MN,KN,LN,KM}



Şekil 2.1

($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) geometrik yapısının bir afin düzlem olduğunu gösterelim.

A1) K,M $\in$ $\mathcal{N}$, K$\neq$ M noktalarını alalım.

K V M = KM$\in\mathcal{L}$ olacak şekilde bir ve yalnız bir KM doğrusu vardır.

A2) KøLM olacak şekilde, K$\in$ $\mathcal{N}$ ve LM$\in\mathcal{L}$ ele alalım. K noktasından geçen ve LM ye paralel olan bir ve yalnız bir KN doğrusu vardır.

N ø KM, N$\in$ $\mathcal{N}$ ve KM$\in\mathcal{L}$ göz önüne alalım.

N den geçen ve KM ye paralel olan bir ve yalnız bir LN doğrusu vardır.

A3) K,L,M doğrudaş olmayan üç noktadır.

Tanım 2.8: Elemanlarına noktalar diyeceğimiz $\mathcal{N}$ kümesi ve elemanlarına doğrular diyeceğimiz $\mathcal{L}$ kümesi verilsin. $\mathcal{N} \cap \mathcal{L}$ = Ø olmak üzere o da $\mathcal{N}$ x $\mathcal{L}$ kümesi üzerinde tanımlı üzerinde bulunma bağıntısı olsun. Aşağıdaki P1, P2, P3 aksiyomlarını sağlayan ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) geometrik yapısına bir Projektif Düzlem denir ve bu düzlem genellikle

$\mathbb{P}$ = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$,o) ile gösterilir.

P1) $\forall$ M,N$\in$ $\mathcal{N}$, M$\neq$N için Mod ve Nod olacak biçimde bir ve yalnız bir d$\in\mathcal{L}$ doğrusu vardır.

P2) $\forall$ c,d$\in\mathcal{L}$ için Noc ve Nod olacak biçimde <u>en az</u> bir N$\in$ $\mathcal{N}$noktası vardır.

P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta vardır.

Teorem 2.2 : Her sonlu IP = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) projektif düzlemi için aşağıdaki koşullara uyan bir $n \geq 2$ özellikli n tam sayısı vardır. Bu tam sayıya ilgili projektif düzlemin mertebesi denir.

1) IP projektif düzleminin her doğrusu üzerinde n+1 tane nokta vardır.

2) IP projektif düzleminin her noktasından n+1 tane doğru geçer.

3) IP projektif düzlemindeki tüm noktaların sayısı n^2+n+1'dir.

4) IP projektif düzlemindeki tüm doğruların sayısı n^2+n+1'dir.

Örnek 2.3 : En küçük projektif düzlem 7 nokta ve 7 doğrudan oluşur.

$\mathcal{N}= \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\mathcal{L} = \{d_1,d_2, d_3,d_4,d_5,d_6,d_7\}$ ve

$d_1= \{1,2,3\}$, $d_2= \{1,4,5\}$, $d_3= \{1,6,7\}$

$d_4= \{2,5,6\}$, $d_5= \{3,4,6\}$, $d_6= \{3,5,7\}$

$d_7= \{2,4,7\}$

olmak üzere ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$, o) sisteminin bir projektif düzlem olduğu kolayca görülebilir.

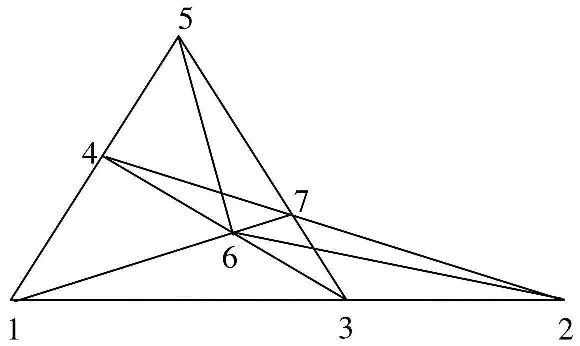
P1) $3 \neq 5$, $3, 5 \in \mathcal{N}$ alalım $3 \vee 5 = d_6$ olup $d_6 \in \mathcal{L}$ dir.

P2) $d_3 \neq d_7$, $d_3, d_7, \in \mathcal{L}$ alalım. $d_3 \wedge d_7=7$, $7 \in \mathcal{N}$ dir.

P3) 1, 3, 4, 7 herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 noktadır.

Yedi noktalı bu projektif düzleme Fano düzlemi denir.

Bu düzlem aşağıdaki şekille gösterilmiştir (Kaya 1992).



Şekil 2.2

V,K cismi üstünde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun.

Tanım 2.9 : $\mathcal{X}$ boş olmayan bir küme olmak üzere

$\varphi : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to V$

biçiminde, aşağıdaki iki önermeyi doğrulayan bir φ fonksiyonu varsa $\mathcal{X}$ kümesi V ye ilişkin bir afin uzaydır denir.

A ∪1 : $\mathcal{X}$ deki her P,Q,R noktaları için

$$\varphi(P,R) = \varphi(P,Q) + \varphi(Q,R) \text{ dir.}$$

A∪2 : $\mathcal{X}$ deki her bir P noktası ve V deki her bir α vektörü için $\varphi(P,Q) = \alpha$ olacak biçiminde $\mathcal{X}$ de bir ve yalnız bir Q noktası vardır.

$\mathcal{X}$ bir afin uzay ise $\varphi(P,Q)$ vektörü kısaca $\overrightarrow{PQ}$ biçiminde gösterilir. P ye bu vektörün başlangıç noktası, Q ya da bitim noktası denir. Bu gösterime göre yukarıdaki önermeleri şöyle verebiliriz.

A ∪1 : $\mathcal{X}$ deki her P,Q,R noktaları için $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ dir.

A ∪2: $\mathcal{X}$ deki her bir P noktası ve V deki her bir α vektörü için $\overrightarrow{PQ} = \alpha$ olacak biçimde $\mathcal{X}$ de bir ve yalnız bir Q noktası vardır.

$\mathcal{X}$, V ye ilişkin bir afin uzay ise V nin boyutuna $\mathcal{X}$ afin uzayının boyutu denir.

Örnek 2.4 : $V = K^n$ ve $X = K^n$ alalım. $K^n \times K^n \to K^n$

$$(P,Q) \to Q - P$$

biçiminde tanımlayalım. K^n kümesi K^n ye ilişik (birleştirilmiş) bir afin uzay olur.

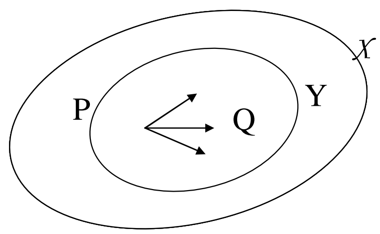
Bu afin uzaya n – boyutlu standart afin uzay denir.

$\mathcal{X}$, V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay olsun.

Tanım 2.10 : Y, $\mathcal{X}$ in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y nin en az bir P noktası için,

$$\{ \overrightarrow{PQ} : Q \in Y \}$$

kümesi V nin bir alt vektör uzayı ise Y kümesine $\mathcal{X}$ in bir afin alt uzayıdır denir.



Şekil 2.3

3. YAKLAŞIK LİNEER UZAYLAR

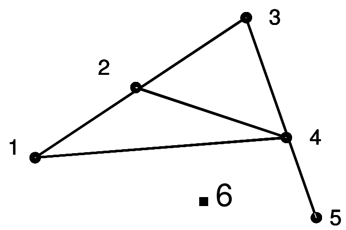
Tanım 3.1 : Aşağıdaki aksiyomları sağlayan U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) uzayına bir Yaklaşık Lineer Uzay demiştik.

YL 1 : Herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır.

YL 2 : İki nokta en çok bir doğru üzerindedir.

Örnek 3.1 : $\mathcal{N}$= { 1,2,3,4,5,6} ve

$\mathcal{L}$ = {{1,2,3},{2,4},{3,4,5},{1,4}}olsun. Bu uzayı şekil 3.1 ile gösterebiliriz.

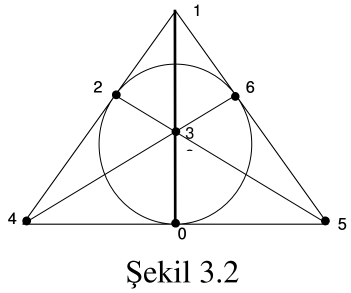


Şekil 3.1

Her iki aksiyomu da sağladığından, yaklaşık lineer uzay olur.

Örnek 3.2 : $\mathcal{N}$, öklid 3 – uzayının noktaları kümesi olsun. $\mathcal{L}$ ise öklit 3 – uzayının düzlemlerinin kümesi olsun. Bu durumda U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) yaklaşık lineer uzay mıdır? İki noktadan sonsuz tane düzlem geçtiğinden YL2 aksiyomu sağlanamaz. Dolayısıyla yaklaşık lineer uzay değildir.

Örnek 3.3:



Şekil 3.2

1) Yedi nokta ve yedi doğru vardır.
2) Her doğru üç noktaya sahiptir.
3) Her nokta üç doğru üzerindedir.

Şekil 3.2 de bu sistem tam olarak gösterilmektedir. Şayet noktalar 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6 ile gösterilirse, doğruları;

{1,2,4}, {2,3,5}, {3,4,6}, {0,4,5}, {1,5,6},{0,2,6} ve {0,1,3}kümeleri olur. Bu seçim keyfi olarak yapılabilir. Bu seçimin özelliği 7 ile bölümünden kalanı kullanmak ve i, 0 ile 6 arasında değerler olmak üzere her doğru {1+i,2+i,4+i}biçimindedir. Yani {1+5,2+5,4+5}= {6,7,9}kümesi {6,0,2}doğrusudur. Bu yaklaşık lineer uzaya Fano düzlemi denir.

Yaklaşık Lineer Uzay tanımı noktaların varlığını gerektirmez. Hiç doğrunun bulunmadığı bu durumda yaklaşık lineer uzay Ø ile gösterilir. Eğer noktalar bulunuyorsa bile tanım doğruların varlığını gerektirmez.

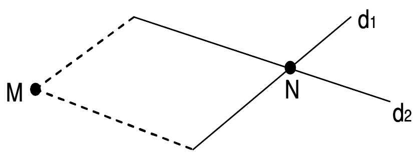
Tanım 3.2 : Bir X kümesinin eleman sayısına bu kümenin mertebesi denir ve $|X|$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 3.1 : Bir Yaklaşık Lineer Uzayın iki farklı doğrusu en çok bir noktada kesişir.

İspat : d_1 , $d_2 \in \mathscr{L}$ ve $d_1 \neq d_2$ olsun. Eğer $d_1 // d_2$ ise paralellik tanımı gereğince Nod_1 ve Nod_2 olacak şekilde bir $N \in \mathscr{N}$ noktası yoktur.

$d_1 \not\parallel d_2$ ise Nod_1 ve Nod_2 olacak biçimde bir $N \in \mathscr{N}$ noktası vardır.

Kabul edelim ki Mod_1 ve Mod_2 olacak biçimde $M \neq N$ bir $M \in \mathscr{N}$ noktası bulunsun.



$$\left.\begin{array}{l} Mod_1 \text{ ve } Nod_1 \text{ olduğundan } MVN = d_1 \\ Mod_2 \text{ ve } Nod_2 \text{ olduğundan } MVN = d_2 \end{array}\right\} d_1 = d_2 \text{ dir}$$

Şekil 3.3

Bu durum $d_1 \neq d_2$ olmasıyla çelişir. Buna göre M = N dir.

Yardımcı Teorem 3.2 : d_1 ve d_2 doğruları $d_1 \subseteq d_2$ olacak biçimde ise bu durumda $d_1 = d_2$ dir.

İspat : YL1 aksiyomuna göre yani herhangi bir doğrunun en az iki noktası vardır, ifadesine göre d_1 en az iki noktaya sahiptir.
$d_1 \subseteq d_2$ olduğundan ve YL2 aksiyomuna göre yani iki nokta en çok bir doğru üzerinde olduğundan $d_1 = d_2$ olur.

Bir yaklaşık – lineer uzaydaki toplam nokta sayısını υ, toplam doğru sayısını da b ile gösterelim. Bu durumda bir d doğrusu üzerindeki nokta sayısı $\upsilon(d)$, bir N noktasından geçen doğru sayısını da b(N) ile gösterelim.

Bir yaklaşık lineer uzay U = $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ olsun. $\mathcal{N}$ nin herhangi bir alt kümesine $\mathcal{N}'$ diyelim. $\mathcal{L}$ nin en az iki noktası $\mathcal{N}'$ de olan d doğrularının $d \cap \mathcal{N}'$ kesişimleri yeni doğrular olarak tanımlansın. Bu yeni doğruların kümesi $\mathcal{L}'$ ile gösterilsin. Bu durumda K=$(\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ yaklaşık lineer uzay olur ve bu uzaya U nun kısıtlanmışı denir.

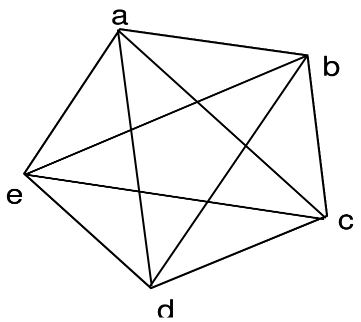
Örnek 3.4 : Öklid 2- uzayının (düzlem) noktalarının kümesi $\mathcal{N}$ ve alışılmış doğruların kümesi de $\mathcal{L}$ olsun. $\mathcal{N}$ nin orijin merkezli birim çemberinin iç noktalarının kümesine $\mathcal{N}'$ diyelim. $\mathcal{L}$ deki doğruların birim çemberdeki kısıtlanmışını da $\mathcal{L}'$ nün elemanları olarak tanımlayalım. Böylece bulunan K= $(\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ uzayı öklid- 2 uzayının kısıtlanmışıdır.

Doğru ve çember, düzlemde birbirine göre üç halde bulunabilir. Doğru çemberi keser, doğru çembere teğettir, doğru çemberin hiçbir noktasını kapsamaz.

Burada doğrular birim çemberi keser. Ayrıca doğru çemberin üzerinde olmayan en az iki noktaya sahiptir. Bundan dolayı doğrulardan her biri sonsuz sayıda nokta kapsar. Yani YL1 ve YL2 aksiyomları sağlanır.

Örnek 3.5 : $\mathcal{N}$ = {a,b,c,d,e} ve $\mathcal{L}$ = {{a,d},{b,c},{a,b,e}}olsun. Eğer $\mathcal{N}^1$ = {b,c,d} ise $\mathcal{L}$ ' = {{b,c}} olur.

Örnek 3.6 : $\mathcal{N}$ = {a,b,c,d,e}ve her bir nokta ikilisi bir doğru olarak tanımlansın.



Sekil 3.4

Buradaki farklı kısıtlamalar Ø, bir nokta, bir doğru, bir üçgen köşegenleri dahil bir kare ve bu uzayın tümüdür.

Tanım 3.3 : U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) bir yaklaşık - lineer uzay olsun. Her doğru bir nokta ve U nun belli bir noktasından geçen en az iki noktayı içeren bütün doğruların kümesi bir doğru olarak tanımlansın. Buradaki yeni nokta ve doğruların kümesi sırasıyla $\mathcal{N}'$ ve $\mathcal{L}'$ olmak üzere R = ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$) uzayına U nun dual yaklaşık-lineer uzayı denir.

$\mathcal{L}$ ' = {{N_1,N_2,…,N_m }: $N_i \in \mathcal{N}'$,m≥2 ve N_1 ,…. N_m U nun belli bir noktasından geçen doğruların tümüdür}

Şekil 3.1 e göre d_1 = {1,2,3}, d_2 = {3,4,5},

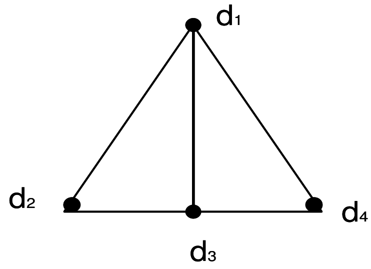
d_3 = {1,4}, d_4 = {2,4}

ile gösterilen yaklaşık lineer uzaydır.

Bu durumda $\mathcal{N}'$ = {d_1,d_2,d_3,d_4}olur.

En az iki doğru üzerinde olan her nokta için $\mathcal{L}'$ nün bir doğrusu elde edilir. Bu doğruların kümesi;

$\mathcal{L}'$ = {{d_1,d_3},{d_1,d_4},{d_1,d_2},{d_2,d_4,d_3}}dir.



Şekil 3.5

Yardımcı Teorem 3.3 : Yaklaşık – lineer uzayın dual uzayı da yaklaşık lineer uzaydır.

İspat : Dual uzayın tanımından, dual uzayda bir doğru üzerinde en az iki nokta olduğunu biliyoruz. Buna göre YL1 aksiyomu sağlanır.

Şimdi dual uzayda iki noktayı ele alalım. U= ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) yaklaşık lineer uzayının bu noktalara eşlenen doğruları d_1 ve d_2 olsun. d_1 ve d_2 yi dual uzayda birleştiren her bir doğru U uzayında d_1 ve d_2 nin kesişim noktası olur ve "yaklaşık lineer uzayın iki farklı doğrusu en çok bir noktada kesişir" yardımcı teoreminden en çok bir kesişim noktası vardır. Bundan dolayı dual uzayda d_1 ve d_2 den geçen en çok bir doğru vardır.

Tanım 3.4 : Eğer bir yaklaşık lineer uzayın her bir doğrusu üzerinde tam olarak iki nokta varsa bu yaklaşık lineer uzaya grafik denir.

Şekil 3.4 ün gösterdiği lineer uzay bir grafik olur.

Bir yaklaşık - lineer uzaydan dual uzayın elde ediliş yolunun hemen aynısıyla bir grafik elde edilebilir.

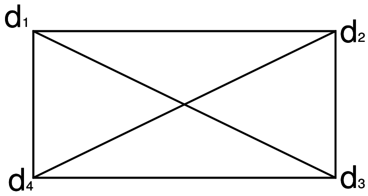
Tanım 3.5 : Lineer uzay olan bir grafiğe tam grafik denir.

Örnek 3.7 : Sonlu bir tam grafikte $2b + \upsilon = \upsilon^2$ dir. υ uzaydaki noktaların sayısını, b doğruların sayısını gösterir.

$\binom{\upsilon}{2}$ adet farklı nokta ikilileri elde edilebilir. Her doğru üzerinde iki nokta olduğundan $\binom{\upsilon}{2} = \text{b}$ olur.

$$\frac{\upsilon!}{2!.(\upsilon-2)!} = \frac{\upsilon(\upsilon-1)}{2} = \text{b} \Rightarrow \upsilon^2 - \upsilon = 2\text{b ise } \upsilon^2 = 2\text{b} + \upsilon \text{ dir.}$$

Şekil 3.1 in grafiği



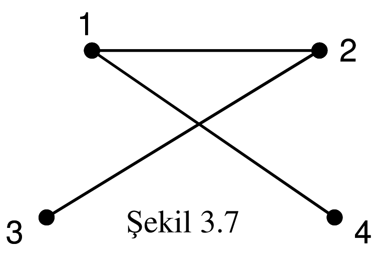
Şekil 3.6

$\mathscr{L}' = \{\{d_1,d_3\},\{d_1,d_4\},\{d_1,d_2\},\{d_2,d_3\},\{d_2,d_4\},\{d_3,d_4\}\}$ler yeni doğrulardır.

Noktalar kümesi $\mathscr{N}' = \{d_1,d_2,d_3,d_4\}$dür.

Tanım 3.6: Bir $(\mathscr{N}, \mathscr{L})$ yaklaşık –lineer uzayının $\mathscr{N}$ noktaları kümesinin "r ve s X'in, rs, $\mathscr{L}$ nin bir doğrusu olacak biçimdeki noktaları iken rs nin tamamı X dedir" özelliğine sahip bir X alt kümesine $(\mathscr{N}, \mathscr{L})$ yaklaşık- lineer uzayının bir alt uzayı denir.

Boş küme, herhangi bir nokta, herhangi bir doğru, uzayın kendisi bir uzayın alt uzaylarıdır.



Şekil 3.7

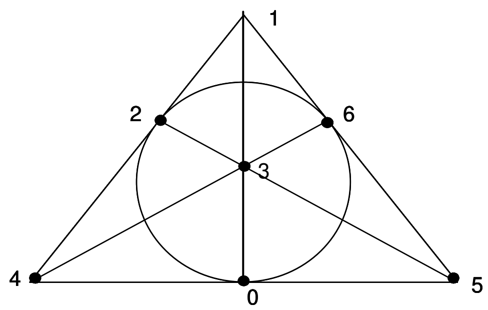
Şekil 3.7 deki uzayın diğer alt uzayları {1,2,3} , {1,2,4} , {1,3} , {2,4} , {3,4} , {1,3,4}, {2,3,4}tür.

Yardımcı Teorem 3.4: Bir uzayın herhangi sayıdaki alt uzaylarının ara kesiti de bir alt uzaydır.

İspat: Herhangi sayıdaki alt uzayların ara kesitini X ile gösterelim. Bu durumda r ve s, X in noktaları iken ve bunlar bir rs doğrusu üzerinde iken rs $\subseteq$ X olduğunu göstermek gerekir. Ancak X i kapsayan herhangi bir alt uzay r ve s yi de kapsar. Bu yüzden tanım gereğince rs yi de kapsar. Dolayısıyla rs doğrusu X in arakesiti olduğu bütün alt uzayların içindedir. Bu yüzden rs, X in bir alt kümesidir (Keyif 1994).

Tanım 3.7 : X bir U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) uzayının noktaları kümesinin bir alt kümesi olsun. X i kapsayan ancak X in üzerindeki hiçbir alt uzayı has olarak kapsamayan bir alt uzaya X in kapanışı denir ve < X > ile gösterilir.

Örnek 3.8 : Fano düzlemi;



Şekil 3.2

Yedi nokta ve yedi doğrudan oluşmaktadır.

Her doğru üzerinde 3 nokta vardır. Her noktadan 3 doğru geçer.

Bu uzayda; <{5,6}> = {1,5,6}

<{0,3,4}> = {0,3,1,4,2,5,6} = U biçimindedir.

Yardımcı Teorem 3.5 : U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) yaklaşık lineer uzay, X,Y $\subseteq$ $\mathcal{N}$ ve n$\in\mathcal{N}$ olsun. $<\emptyset> = \emptyset$, X $\subseteq$ < X >, <X> = <<X>> , <n>={n}, <U> = U ve X $\subseteq$ Y ise $< X > \subseteq < Y >$

İspat : Ø de hiç nokta bulunmadığından kapanışı kendisidir. <Ø> = Ø dir.
<X> kümesi X in bütün noktalarını kapsadığından X $\subseteq$ <X> dir. <X>, U nun bir alt uzayı olduğundan kendisini kapsayan en küçük alt uzay kendisidir. Yani <<X>> = <X> dir.

Aynı düşünceyle <U> = U ve <n> = {n} dir.
X $\subseteq$Y olsun. $\forall$ x $\in$ <X> için x $\in$ X ve dolayısıyla x $\in$Y dir. Bu x $\in$ <Y> olmasını gerektirir. Ayrıca X$\in$ mn olacak şekilde m,n $\in$ X noktaları vardır. m,n $\in$ Y olduğundan mn, <Y> alt uzayında bir doğrudur ve x $\in$ <Y> dir. Böylece $\forall$ x $\in$ <X> için x $\in$<Y> ve dolayısıyla <X> $\subseteq$ <Y> dir.
Yardımcı Teorem 3.6 : Bir X kümesinin kapanışı X üzerindeki bütün alt uzayların arakesitidir.

İspat : "Bir uzayın herhangi sayıdaki alt uzaylarının arakesiti de bir alt uzaydır" yardımcı teoremi gereğince bu arakesitin kendisi bir alt uzaydır. Bunun X üzerindeki en küçük alt uzay olduğunu görmek kolaydır. Çünkü arakesit alındığında X üzerindeki her uzay alınır. Dolayısıyla X i kapsayan en küçük alt uzay arakesit olacaktır (Keyif 1994).

X kendi kapanışını gerer denir. Tersine olarak bir V alt uzay verildiğinde eğer <X> = V ise X in V kümesi için bir Üretme = Germe kümesi olduğu söylenir. Öyleki aynı zamanda X, V'yi gerer.

Tanım 3.8 : Kendi kapanışını üretmek için yeter nokta kapsayan bir kümeye bağımsız küme denir. Bir bağımsız X kümesi her x $\in$ X için x$\notin$< X \ {x}> özelliğinde bir kümedir.

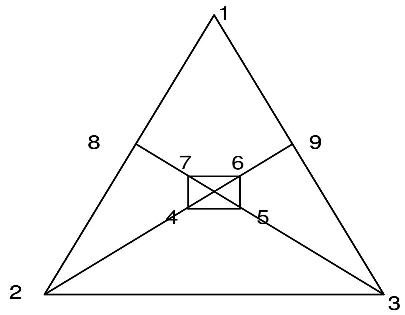
Örnek 3.9 : Fano düzlemindeki yaklaşık – lineer uzayda X = {1,5,6} kümesi bağımsız küme değildir. Çünkü kendi kapanışını üretmek için gerekenden fazla nokta kapsar, 1 ve 5 yeterlidir.
$6 \in \langle X \setminus \{6\} \rangle$ dır. Böyle bir kümeye bağımlıdır denir. X = {1,5}kümesi bağımsızdır.

Boş küme gereğinden fazla eleman kapsamadığından bağımsız kümedir. Bir tek noktadan oluşan küme bağımsız kümedir. Herhangi bir nokta ikilisinden oluşan küme bağımsız kümedir.

Tanım 3.9 : Bir U yaklaşık – lineer uzayının noktalarının U'yu üreten bir bağımsız alt kümesine U nun bir bazı denir.

Örnek 3.10 : Fano düzlemi bir yaklaşık-lineer uzay idi. Bu uzayın iki bazı {1,2,0},{3,5,6} dır.

Bir uzayın bütün bazlarının eleman sayısının aynı olması gerekmez.
Örnek 3.11 :



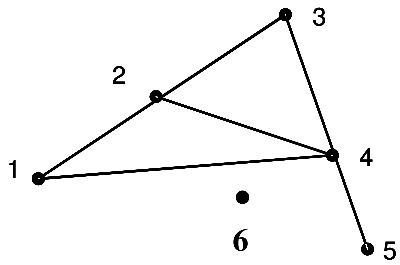
Şekil 3.8

Şekildeki yaklaşık-lineer uzay için {4,5,6,7},{1,8,3},{1,2,3} birer bazdır ve bu bazların eleman sayıları farklıdır.

Tanım 3.10 : U yaklaşık-lineer uzay olsun.
min {|B| :B, U nun bir bazıdır}sayısının bir eksiğine U yaklaşık-lineer uzayının boyutu denir.
Bir doğru, bir nokta, Ø den oluşan uzayların boyutları sıra ile 1,0,-1 dir.

Herhangi bir ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) uzayı bir matris ile gösterilebilir. Her nokta bu matrisin bir satırına ve her doğru bir sütununa eşlenir. Matriste (i,j) inci yere eğer N_i noktası d_j doğrusu üzerinde ise 1, değil ise 0 yazılır. Bu şekilde yaklaşık lineer uzay için bir matris şu şekilde oluşturulur;

$\mathcal{N}$= {1,2,3,4,5,6} ve $\mathcal{L}$ = {{1,2,3},{2,4},{3,4,5},{1,4}} olsun.



Şimdi yaklaşık –lineer uzayın üzerinde bulunma matrisini oluşturalım

$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Burada nokta ve doğruların farklı işaretlenmesiyle farklı matris elde edilir. Bu işaretlemelerin değiştirilmesi aslında matrisin satır veya sütunlarının değiştirilmesiyle sonuçlanır. Bu seçimi bir dereceye kadar kısıtlamak için şu şartlar konulabilir.

$\upsilon(d_1) \geq \upsilon(d_2) \geq \upsilon(d_3) \geq ... \geq \upsilon(d_6)$ olacak şekilde $d_1, d_2, d_3, \ldots\ldots d_6$ olarak işaretlenmelidir.

Benzer olarak noktalar da $b(N_1) \geq b(N_2) \geq b(N_3) \geq \ldots\ldots b(N_\upsilon)$ olacak şekilde işaretlenmelidir.

Bu durumda;

$d_1 = \{1,2,3\}$ $d_2 = \{3,4,5\}$ $d_3 = \{1,4\}$ $d_4 = \{2,4\}$ olarak alınabilir. Ancak noktalar matriste bu kritere uygun değildir. Bunun için matriste 1 ve 4 noktalarının yerini değiştirmek yeterlidir.

$\upsilon_i = \upsilon(d_i)$ ve $b_i = b(N_i)$ olarak tanımlansın.

$$r_{ij} = r(N_i, d_j) = \begin{cases} 0, & N_i \notin d_j \\ 1, & N_i \in d_j \end{cases}$$

Tanım 3.11 : r_{ij} değerine N_i noktasının d_j doğrusu üzerinde bulunma değeri, matrise de üzerinde bulunma matrisi denir.

Bu matrise bakıldığında uzay hakkında bazı bilgiler elde edilebilir. Örneğin; satırda görülen 1 lerin sayısı bu satıra eşlenen noktadan geçen doğru sayısıdır.

Bir sütunda görülen 1 lerin sayısı ona eşlenen doğru üzerindeki nokta sayısıdır.

Eğer her sütundaki 1 ler toplanıp sütun sütuna eklenirse $\sum_{i=1}^{b} \upsilon_i$ elde edilir. Eğer satırdaki 1 ler toplanır ve satır satıra eklenirse $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i$ elde edilir.

Aşikar olarak iki değişik yoldan aynı sayıda 1 sayılır. Bu yüzden ;

$$\sum_{i=1}^{\upsilon} r_{ij} = \upsilon_j \qquad \sum_{i=1}^{b} r_{ij} = b_i \text{ ve}$$

$$\sum_{j=1}^{b} v_j = \sum_{j=1}^{b} \sum_{i=1}^{\upsilon} r_{ij} = \sum_{i=1}^{\upsilon} \sum_{j=1}^{b} r_{ij} = \sum_{i=1}^{\upsilon} b_i$$ denklemi elde edilir.

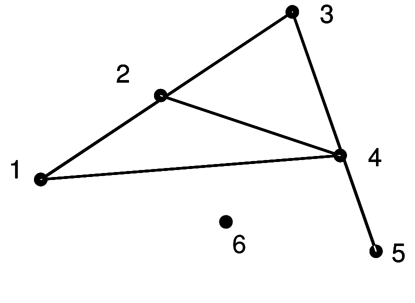
0 ve 1 lerden oluşan herhangi bir matris ne zaman yaklaşık-lineer uzay gösterir?

YL1 ve YL2 aksiyomlarının sağlanıp sağlanmadığına bakılır. Bunun için her sütunda en az iki tane 1 olmalıdır ki YL1 sağlansın. Farklı i ve j için r_{ik} ve r_{jk} nın her ikisi birlikte 1 olacak şekilde en çok bir tane k sayısı varsa da YL2 sağlanır.

$U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir yaklaşık-lineer uzay ve $V = (\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ onun dual yaklaşık-lineer uzayı olsun.

Bu iki uzayın üzerinde bulunma matrisleri birbiriyle nasıl karşılaştırılabilir?

U nun doğruları $\mathcal{N}'$ nün noktaları olur. Fakat $\mathcal{L}'$ nün doğruları yalnızca $\mathcal{N}$ nin öyle noktalarına eşlenir ki herhangi birinin üzerinde en az iki nokta bulunur. Bu yüzden;



Şeklindeki 5 ve 6 noktaları elenir.

Dual uzayın matrisi

$$\begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

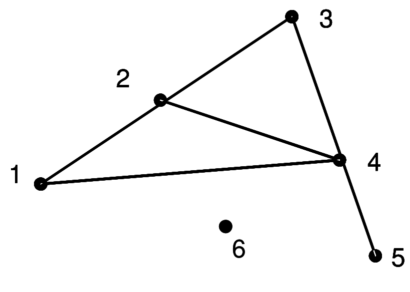
olarak elde edilir.

Bu matris, önceki matrisin 5. ve 6. satırları hariç tutulursa transpozudur. Yani bu matrisdeki r_{ji} değerleri ilk matrisdeki r_{ij} değerleridir. Birinci matrisin satır ve sütunları burada sırayla sütun ve satır olmuştur.

Yardımcı Teorem 3.7 : Eğer bir yaklaşık-lineer uzayın her noktası en az iki doğru üzerinde ise, bu durumda nokta ve doğruların sayısı dual uzayın sırasıyla doğru ve noktalarının sayısıdır. Üstelik bir M matrisi için $(M^t)^t = M$ olduğundan U nun dualinin duali yine U olur.

Dual uzayda elde edilen doğru ve noktaların daha önce belirtilen tarzda düzenlenmesinin şart olmadığı belirtilmelidir.

Burada belirtildiği gibi yaklaşık-lineer uzayın herhangi bir alt uzayının kendisi bir alt uzaydır. Ayrıca tüm uzaydaki noktalar ve doğrular yukarıdaki gibi düzenlenirse bu durumda alt uzaydaki üzerinde bulunma düzenlenmesi de istenen tipten olur. Bu yüzden alt uzayın özel düzenlenmiş üzerinde bulunma matrisi sadece satırları alt uzayın noktalarına eşlenerek sütunları alt uzayda en az iki noktaya sahip olacak şekilde seçilerek elde edilmiştir.



Uzayının {3,4,5}alt uzayından $\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} d_2 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$ matrisi elde edilir.

{1,2,3,4,5}alt uzayından da

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilir.

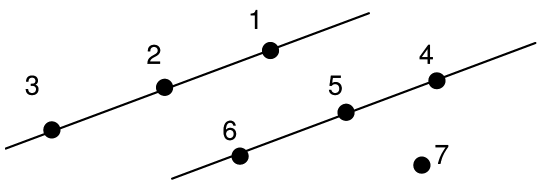
Yardımcı Teorem 3.8 : U nun doğru düzenliliği (regülerliği) s ve nokta düzenliliği t olsun. Bu durumda $\upsilon t = bs$ dir.

İspat : Üzerinde bulunma matrisi göz önüne alınarak ispat hemen görülür. Bütün satırdaki toplam 1 sayısı = Bütün sütunlardaki toplam 1 sayısıdır.

Böylece υ noktalı ve b doğrulu bir yaklaşık-lineer uzay hem nokta hem doğru regüler iken, nokta regülerliği doğru regülerliğini gerektirir ve tersi de doğrudur.

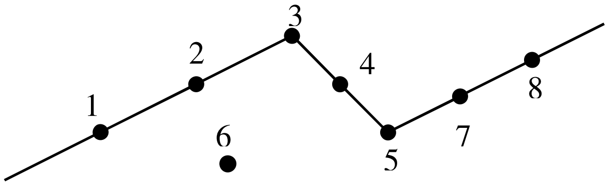
Tanım 3.12 : k tane noktası olan bir doğruya bir k- doğru denir. Benzer olarak k tane doğrunun geçtiği bir noktaya da bir k-nokta denir.

Yardımcı Teorem 3.9 : Bir yaklaşık-lineer uzayda doğru regülerliği nokta regülerliğini gerektirmediği gibi, nokta regülerliği de doğru regülerliğini gerektirmez.



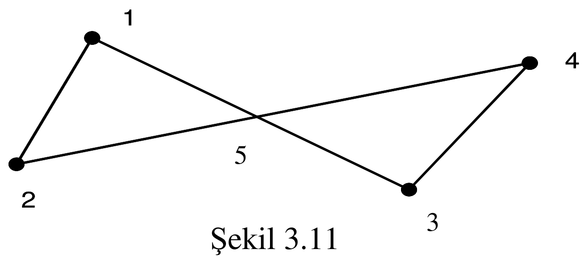
Şekil 3.9

Yaklaşık lineer uzayı doğru regülerdir. Ancak 7 noktasından bir doğru geçmediğinden, nokta regüler değildir.



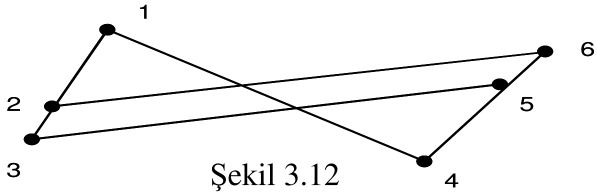
Şekil 3.10

Şekil 3.10 daki yaklaşık lineer uzayı doğru regülerdir. Ancak nokta regüler değildir. Çünkü 1,2,4,7,8 den birer doğru geçtiği halde 6 dan hiçbir doğru geçmez.



Şekil 3.11

Şekil 3.11 deki yaklaşık lineer uzayda her noktadan iki doğru geçtiğinden nokta regülerdir. Fakat bazı doğruların üzerinde iki, bazılarının üzerinde üç nokta olduğundan doğru regüler değildir.



Şekil 3.12

Şekil 3.12 deki yaklaşık lineer uzayda nokta regüler olduğu halde doğru regüler değildir.

Tanım 3.13 : U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) ve U' = ($\mathcal{N}'$,$\mathcal{L}'$) iki yaklaşık-lineer uzay olsun. f,$\mathcal{N}$ kümesinden $\mathcal{N}^{'}$ kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her d$\in\mathcal{L}$ için f(d)$\in$ $\mathcal{L}'$ ise f ye U dan U' ye bir lineer fonksiyon denir.

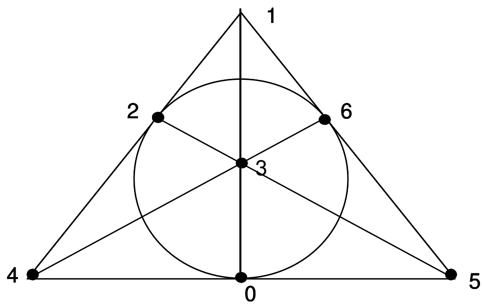
$\mathcal{N}$den $\mathcal{N}'$ ye bir fonksiyon bire bir ve örten ise bu lineer fonksiyon bire bir ve örtendir.

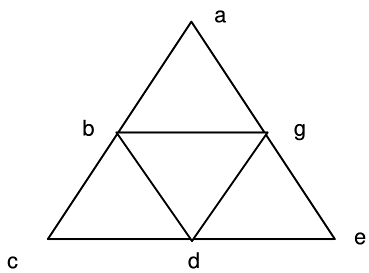
$\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}'$ ye bir fonksiyon bire bir veya örten ise bu lineer fonksiyon bire bir veya örtendir.

d$\in\mathcal{L}$ doğrusu sonlu ve f(d) $\in$ $\mathcal{L}'$ ise bu durumda $\upsilon(d) \geq \upsilon(f(d))$ olduğuna dikkat edilir.

Bu yüzden doğrular daha kısa doğrulara dönüştürülebilir ancak daha uzun doğrulara dönüştürülemez.

U fano düzlemi olan yaklaşık-lineer uzay olsun. U$^{'}$ de Şekil 3.13 deki yaklaşık lineer uzay olsun.





(Şekil 3.13)

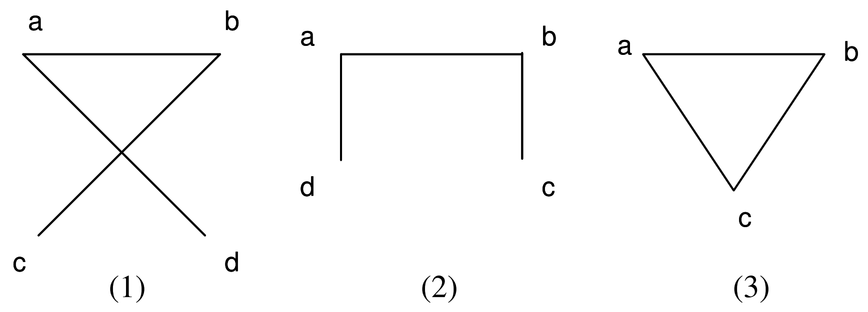
f aşağıdaki gibi tanımlansın.

f : $0 \to d$	böylece f : $\{1,2,4\}\to\{b,d\}$
$1 \to b$	$\{0,4,5\}\to\{d,g\}$
$2 \to b$	$\{1,,5,6\}\to\{b,g\}$
$3 \to b$	$\{0,1,3\}\to\{b,d\}$
$4 \to d$	$\{2,3,5\}\to\{b,g\}$
$5 \to g$	$\{3,4,6\}\to\{b,d\}$
$6 \to b$	$\{0,2,6\}\to\{b,d\}$

Böylece f lineer bir fonksiyondur. Bire bir ve örten olmadığı aşikardır.

Tanım 3.14 : U ve U' iki yaklaşık lineer uzay olsun. U dan U' ye bire bir, örten ve lineer f fonksiyonu var ve f^{-1}de lineer fonksiyon ise U ve U' uzaylarına izomorf uzaylar denir. f ye de izomorfizm denir.

İki uzayın aynı olması izomorf olmaları olarak anlaşılır.



Buradaki (1) ve (2) deki uzaylar izomorftur yani aynıdır. Çünkü bu uzaylar arasında bir izomorfizm tanımlanabilir.

Örneğin; f(a) = a, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d olsun. Bunlar arasındaki özdeşlik dönüşümü bir izomorfizmdir.

f lineer, bire bir ve örtendir. Sonlu iki uzay izomorf ise ikisi aynı sayıda elemana sahiptir. Bu nedenle (3) ün (1) e izomorf olmadığı görülür.

Yardımcı Teorem 3.10 : U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) den U' = ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$) ye f lineer fonksiyonu bire bir ise bu durumda bütün d ler için $\upsilon(d) = \upsilon(f(d))$ dir.

İspat : Eğer f fonksiyonu bire bir- ise $\forall x,y \in d$, $x \neq y$ için $f(x) \neq f(y)$ olacaktır. Dolayısıyla $\upsilon(f(d)) \geq \upsilon(d)$ d nin $\forall$ x elemanı f(d) nin farklı bir elemanına dönüştüğü için $\forall$ f lineer fonksiyon için $\upsilon(d) \geq \upsilon(f(d))$ olduğundan $\upsilon(d) = \upsilon(f(d))$ olur.

Yardımcı Teorem 3.11 : Eğer f, U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) den U' =($\mathcal{N}'$,$\mathcal{L}'$)ye bir izomorfizm ise bütün d ve N ler için $\upsilon(d) = \upsilon(f(d))$ ve $b(N) = b(f(N))$ dir.

İspat : $\upsilon(d) = \upsilon(f(d))$ olduğu yardımcı teorem 3.10 den bilinmektedir. Çünkü izomorfizm olduğundan bire bir dir.

N $\in$ d olsun. Lineer fonksiyon tanımından f(N)$\in$f(d) dir. Dolayısıyla b(f(N)) $\geq$b(N) olur. f^{-1} U^{l} den U ya f ile benzer özellikleri taşıyan bir fonksiyon olduğundan

b(f^{-1}(f(N))) $\geq$ b(f(N)) dir ve dolayısıyla

b(N) $\geq$ b(f(N)) olur.

Sonuç olarak b(N) = b(f(N)) dir. Yani bir izomorfizm varsa bir doğru üzerindeki nokta sayısı ve bir noktadan geçen doğru sayısı sabit kalır.

Tanım 3.15 : U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) uzayının kendi üzerinde bir izomorfizmine otomorfizm denir. Geometride buna kolinasyon denir.

Şekil 3.2. deki yaklaşık lineer uzayın 168 tane kolinasyonu vardır. Bunların bir kısmı

f_1: (1,2,4,0,5,6,3)$\rightarrow$ (1,2,4,0,5,6,3) (i inci nokta i inci noktaya dönüşür.)

f_2: (1,2,4,0,5,6,3)$\rightarrow$ (1,6,5,0,4,2,3)

f_3: (1,2,4,0,5,6,3)$\rightarrow$ (4,0,5,6,1,2,3) tür.

Şekil 3.13 deki yaklaşık- lineer uzayın bütün kolinasyonlarını bulmak için şu yol takip edilir.

Yardımcı teorem 3.11 e göre bir kolinasyon {a,c,e}kümesini kendisine ve {b,d,g}kümesini de kendisine dönüştürmek zorundadır. Eğer f:a$\rightarrow$a ya ise iki olasılık vardır. c$\rightarrow$e ve e$\rightarrow$c veya c$\rightarrow$c ve e$\rightarrow$e f lineer olduğundan b,d,g,… sabit kalır. Böylece aşağıdaki şekilde f_1 elde edilir.

f_1: a$\rightarrow$a	f_2 : a$\rightarrow$a
b$\rightarrow$b	b$\rightarrow$g
c$\rightarrow$c	c$\rightarrow$e
d$\rightarrow$d	d$\rightarrow$d
e$\rightarrow$e	e$\rightarrow$c
g$\rightarrow$g	g$\rightarrow$b
f_3: a$\rightarrow$c	f_4: a$\rightarrow$c
b$\rightarrow$b	b$\rightarrow$d
c$\rightarrow$a	c$\rightarrow$e
d$\rightarrow$g	d$\rightarrow$g
e$\rightarrow$e	e$\rightarrow$a
g$\rightarrow$d	g$\rightarrow$b
f_5 :a$\rightarrow$e	f_6 : a$\rightarrow$e

$b \to g$	$b \to b$
$c \to a$	$c \to c$
$d \to b$	$d \to b$
$e \to c$	$e \to a$
$g \to d$	$g \to g$

Şekil 3.14

Eğer $c \to e$ ve $e \to c$ denirse f nin şekil 3.14 deki $f = f_2$ nin lineer kuvveti olduğu görülür. Kabul edelim ki f, a yı hareket ettirsin. İki seçim vardır.

f: $a \to c$ olsun. Eğer $c \to a$ ise bu durumda $e \to e$ ve f nin lineerliği f nin şekil 3.14 deki $f = f_3$ olmasını gerektirir. Eğer $c \to e$ ise bu durumda $e \to a$ ve f, $f = f_4$ ün lineer kuvveti olur. Son olarak f : $a \to e$ olsun. $c \to a$ durumunda $e \to c$ ve f de f_5 olmak zorundadır. Eğer f : $c \to c$ ise bu durumda $e \to a$ ve f, f_6 olur. Bunlar U nun kolinasyonlarının mümkün olan bütün olasılıklarıdır.

Bütün $X \in \mathcal{N}$ ler için $f(X) = X$ özdeşlik dönüşümünün $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ nin her zaman bir kolinasyon olduğuna dikkat edilmelidir.

Yardımcı Teorem 3.12 : f ve g, $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$nin kolinasyonları ise bu durumda f^{-1} ve fog de U nun kolinasyonlarıdır.

İspat : f^{-1} ve fog nın $\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}$ ye bire bir ve örten olduğunu ve f^{-1}in lineer olduğunu biliyoruz. fog nin lineer olduğunu göstermek yeterlidir. g lineer olduğundan $d \in \mathcal{L}$ olup, f nin de lineer olduğu kullanılırsa $f(g(d)) \in \mathcal{L}$ elde edilir. Dolayısıyla fog nin lineer olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 3.13 : Bir yaklaşık lineer uzayın bütün kolinasyonları kümesi fonksiyon bileşimi altında bir gruptur.

İspat : $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ uzayının bütün kolinasyonlarının kümesi G ile gösterilsin. $f, g \in G$ iken Yardımcı Teorem 3.12 gereğince f^{-1}, fog $\in G$. Yani G kümesi fonksiyon bileşimi işlemine göre kapalıdır.

Fonksiyonlar genel olarak fonksiyon bileşimi işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir. I özdeşlik dönüşümü bu fonksiyonun etkisiz elemanıdır. $\forall\ f \in G$ için $f^{-1} \in G$ dir ve $fof^{-1} = f^{-1}of = I$ dir. Yani grup aksiyomları sağlanır (Keyif 1994).

4. LİNEER UZAYLAR

Tanım 4.1 :

L1 : Her doğrunun en az iki noktası vardır.

L2 : İki nokta tam olarak bir doğru üzerindedir.

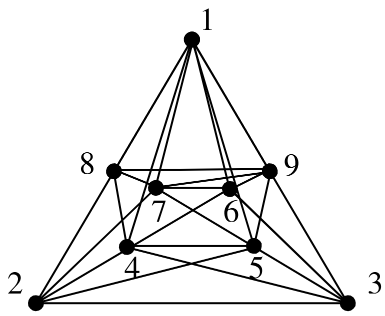
aksiyomlarını sağlayan bir U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) uzayına lineer uzay denir.

Yaklaşık lineer uzaydaki P ve Q gibi farklı iki noktadan geçen doğru PQ ile gösterilir.

$r_{ij} = 0$ aşikar olarak $c_{ij} = \upsilon_j$ ve $b_i = \upsilon_j$ olmasını gerektirir. $b \leq 1$ özelliğini sağlayan bir lineer uzaya aşikar lineer uzay denir.

Bir yaklaşık-lineer uzayı, lineer uzaya dönüştürmek için yaklaşık-lineer uzayda bir doğruyla birleştirilemeyen bütün nokta çiftlerini birer doğru olarak eklemek yeterlidir.

Şekil 3.8 deki uzay şekil 4.1 e dönüşür.



Şekil 4.1

{1,2,3} ve {4,5,6,7}bu uzayın birer bazıdır.

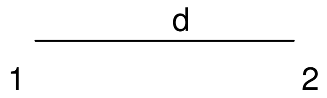
Örnek 4.1 : R^2 öklid düzlemini göz önüne alalım. R^2 nin her bir noktası reel sayıların bir sıralı (x,y) ikilisidir. R^2 düzleminin her doğrusu a,b,c $\in$ R olmak üzere

y = ax + b veya x = c biçimindedir. Bu bir lineer uzaydır. Lineer uzayın iki aksiyomunu da sağlar.

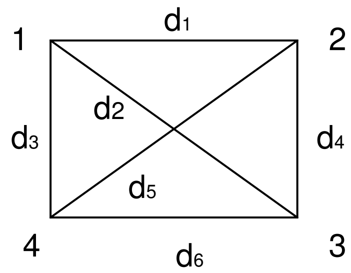
$\mathcal{N}'=\{(x,y): x^2 + y^2 < 1\}$olsun. Yani $\mathcal{N}'$ birim çemberin iç noktalarının kümesi olsun. $\mathcal{L}'$ nün elemanları da öklid düzleminin doğrularının $\mathcal{N}'$ ye kısıtlanmışı olarak alınsın. Bu durumda $x^2 + y^2 = 1$ çemberine teğet olan doğrular $\mathcal{N}'$ nün hiçbir noktasını içermediğinden $\mathcal{N}'$ nün her doğrusu üzerinde en az iki nokta (gerçekte sonsuz sayıda nokta) vardır.

Böylece L1aksiyomu sağlanır. L2 aksiyomunun da sağlandığı açıktır. Bu durumda $(\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ sistemi bir lineer uzay olur.

Lineer uzayın duali lineer uzay olmak zorunda değildir. Örneğin $\mathcal{N} = \{1,2\}$ $\mathcal{L}=\{\{1,2\}\}$ olmak üzere $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir Lineer Uzaydır. Fakat bu uzayın duali $\mathcal{N}'= \{d\}$ ve $\mathcal{L}' =\{\ \}$olmak üzere $U' = (\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ olur ve bu uzay bir Lineer Uzay değildir.



Şekil 4.2 (a)



Şekil 4.2 (b)

Yine şekil 4.2 (b) $\mathcal{N}=\{1,2,3,4\}$

$\mathcal{L} = \{ d_1 =\{1,2\}, d_2 =\{1,3\}, d_3 =\{1,4\}, d_4 =\{2,3\}, d_5 =\{2,4\}, d_6=\{3,4\}\}$olmak üzere

$U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir lineer uzaydır. Fakat $U' = (\mathcal{N}', \mathcal{L}')$

$N' = \mathcal{L} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$

$\mathcal{L}' = \{\{ d_1, d_2, d_3\},\{d_1, d_4, d_5\},\{d_2, d_4, d_6\},\{d_3, d_5, d_6\}\}$olur.

$d_1, d_6 \in \mathcal{N}'$ olur ve bu iki noktadan geçen bir doğru yoktur.

Yardımcı Teorem 4.1 : Bir lineer uzayın kısıtlanmışı da daima bir lineer uzaydır.

İspat : $U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ bir lineer uzay olsun. $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ olsun. U nun $\mathcal{N}'$ ye kısıtlanmışı olan uzay U' ile gösterilsin. U' nün $\mathcal{L}'$ doğruları kümesi, kısıtlanmış uzay tanımı gereği aşağıdaki biçimdedir.

$\mathcal{L}' = \{d \cap \mathcal{N}' : d \in \mathcal{L}, i \neq j, \exists N_i, N_j \in \mathcal{N}', N_i \in d, N_j \in d\}$

$U^{I} = (\mathcal{N}', \mathcal{L}')$ nün lineer uzay olduğunu göstereceğiz. Yani $N_m, N_K \in \mathcal{N}^{I}$ için N_m ve N_K dan geçen d^{I} doğrusunun varlığı gösterilecektir.

$N_m, N_K \in \mathcal{N}^{I} \Rightarrow N_m, N_K \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow d = N_m N_K \in \mathcal{L}$

$\Rightarrow d^{I} = d \cap \mathcal{N}^{I}$ olup $d \in \mathcal{L}$ dir.

$\exists N_m, N_K \in \mathcal{N}^{I}$ dir ve $N_m \in d$, $N_K \in d$ olduğundan $d^{I} \in \mathcal{L}^{I}$ olup bu da U^{I} nün lineer uzay olduğunu gösterir.

Bir lineer uzayın boyutu sonlu olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 4.2 : $\mathcal{N} = \{(x,y) : (x,y)$ çember üzerinde bir nokta$\}$

$\mathcal{L} = \{d: d, R^2$ de çemberi 2 farklı noktada kesen doğru$\}$

$U = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ sonsuz boyutlu bir lineer uzaydır. Çünkü bu uzayın hiçbir noktası diğerlerinden elde edilemez.

Öklid düzleminin $(\mathcal{N}, \mathcal{L})$ durumunu yeniden inceleyelim. Herhangi bir d doğrusu için d nin kendisi de dahil d ye paralel bütün doğruların kümesi [d] olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

Yardımcı Teorem 4.2 :

a) $d^{I} \in [d]$ ise $[d^{I}] = [d]$ dir.

b) Eğer $d^{I} \notin [d]$ ise $[d^{I}] \cap [d] = \emptyset$ dir.

İspat : (a)

$\forall x \in [d^{I}]$ için ya $x = d^{I}$ yada $x \,//\, d^{I}$ dür. $d^{I} \in d$ gereğince de ya $d^{I} = d$ yada $d^{I} \,//\, d$ dir. Bunlar göz önüne alınacak olursa ya $x = d$ yada $x \,//\, d$ dir. Bundan dolayı $x \in [d]$ olur. Yani $[d^{I}] \subseteq [d]$ dir. $[d] \subseteq [d^{I}]$ oluşu da benzer yolla gösterilebilir. Böylece $[d] = [d^{I}]$ olur.

(b)

$\forall y \in [d]$ için ya $y = d$ yada $y \,//\, d$ dir. $d^{I} \in [d]$ için $d^{I} = d$ yada $d^{I} \,//\, d$ dir.

$y = d^{I}$ yada $y \,//\, d^{I} \Rightarrow y \in [d^{I}] \Rightarrow [d] \subseteq [d^{I}]$

$[d^{'}] \cap [d] \neq \emptyset$ olsaydı $x \in [d^{'}] \cap [d]$ olurdu

$x \in [d^{'}]$ ise (a) dan $[x] = [d^{'}]$ ve $x \in [d] \Rightarrow [x] = [d]$ elde edilirdi. $[d^{'}] = [d]$ $d^{'} \in [d^{'}]$ olduğundan dolayı $d^{'} \in [d]$ çelişkisi oluşurdu.

O halde $[d^{'}] \cap [d] = \emptyset$ dir.

Yeni bir $(\mathcal{N}^{'}, \mathcal{L}^{'})$ sistemi de aşağıdaki gibi oluşturulsun.

$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{[d] : d \in \mathcal{L}\}$

$\mathcal{L}' = \{\{d \cup [d] : d \in \mathcal{L}, \{[d] : d \in \mathcal{L}\}\}$

$\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}$ nin noktaları ile [d] paralel denklik sınıflarından oluşmuştur. Paralel denklik sınıflarına sonsuzdaki nokta denir. $\mathcal{L}$ nin her doğrusu da kendisine, içinde bulunduğu denklik sınıfı eklenerek genişletilmiştir. Yani $\mathcal{L}$ nin her d doğrusuna sonsuzdaki [d] noktası eklenmiştir. Böylece $\mathcal{L}'$ nün doğrusu şekline dönüştürülmüştür. Ayrıca sonsuzdaki tüm noktaları kapsayan ve sonsuz doğrusu denilen yeni bir doğru da doğrular kümesine eklenmiştir. Aşikar olarak $\mathcal{L}'$ nün her doğrusu üzerinde en az iki nokta vardır. (En az 2 farklı denklik sınıfı vardır.) L2 nin de sağlandığını gösterelim. $X, Y \in \mathcal{N}$ için X,Y den geçen tek doğru XY nin genişletilmişidir.

Şayet noktalardan biri $\mathcal{N}^{'}$ nün N noktası diğeri sonsuzdaki bir [d] noktası ise bu takdirde N ve [d] yi birleştiren tek doğru N nin [d] den geçen tek elemanıdır. Eğer noktaların ikisi de sonsuzdaki [d] ve [c] gibi iki nokta ise bu noktalardan geçen tek doğru sonsuz doğrusudur. Böylece L2 aksiyomunun sağlandığı görülür. Bu durumda $(\mathcal{N}^{'}, \mathscr{L})$ bir Lineer Uzaydır. Buna genişletilmiş reel düzlem yada projektif düzlem denir.

Bir lineer uzayın toplam nokta sayısı υ ile toplam doğru sayısı b arasında bağıntılar kurulacaktır. Lineer uzayda hiçbir doğru bulunmaması veya bir tek doğrunun var olması hali dışında şimdiye kadar incelenen lineer uzay örneklerinde $b \geq \upsilon$ olmaktadır.

Yardımcı Teorem 4.3 : Bir yaklaşık lineer uzayda $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i (b_i - 1) \leq b\,(b-1)$ dir.

İspat : Bir yaklaşık-lineer uzayın sonlu b tane doğrusu olduğunu kabul edelim. Bu uzayın sabit bir N_i noktasından geçen doğrularla oluşturulacak sıralı ikili sayısı $b_i\,(b_i - 1)$ dir. Bütün noktalar için bunlarla kesişen doğrularla oluşturulan sıralı ikililer üzerinden toplam alınırsa $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i(b_i - 1)$ olur. Bunlar kesişen doğrulardan oluşturulan sıralı ikili sayısıdır. YL2 den dolayı bir sıralı ikilinin burada birden fazla geçmesi söz konusu değildir. Bu uzayda kurulabilecek sıralı doğru ikili sayısı tam olarak b(b-1) dir. (Kesişen doğrulardan oluşan sıralı ikili sayısı ≤ bütün uzaydaki sıralı ikili sayısı)

$\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i(b_i - 1) \leq$ b(b-1) dir.

Sonuç : Bir yaklaşık lineer uzayda tüm doğruların kesişmesi için gerek ve yeter koşul

$\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i(b_i - 1) = b(b-1)$ olmasıdır.

Teorem 4.4 : (De Bruijn-Erdös)

b>1 özelliğinde herhangi sonlu lineer uzay U olsun. Bu durumda

i) b≥ υ dir.

ii) Eğer b = υ ise herhangi iki doğru bir noktada kesişir.

ii) durumunda bir doğru üzerinde ya υ-1 nokta, diğerleri üzerinde ikişer nokta vardır yada her doğru k+1 noktalıdır ve her noktadan k+1 doğru geçer.

İspat : (i) m = min $\{b_i : 1 \leq i \leq \upsilon\}$olsun.

M kendisinden m tane doğru geçen noktalardan biri olup bu doğrular $d_1, d_2, \ldots, d_m$ ile gösterilsin. 1≤ i ≤ m ve $N_i \neq M$ olmak üzere $N_i \in d_i$ olsun. L2 aksiyomu gereğince N_1 noktası ile d_2 doğrusu üzerindeki her noktada bir doğru oluşturur. Dolayısıyla N_1den geçen doğru sayısı d_2 den geçen nokta sayısından büyüktür. Yani $b_1 \geq \upsilon_2$ dir.

Aynı yolla 1≤ i ≤ m-1 iken $b_i \geq \upsilon_{i+1}$ ve $b_m \geq \upsilon_1$ olduğu görülür. Buradan

$\sum_{i=1}^{m} \upsilon_i \leq \sum_{i=1}^{m} b_i$ olur.

M den geçmeyen her d doğrusu için b(M)≥ υ(d) olduğu gibi her N_i noktası için $b(N_i) \geq$ $b(M) \geq \upsilon(d)$ dir. Dolayısıyla her N_i noktası için $m+1 \leq j \leq b$ olmak üzere $b_i \geq \upsilon_j$ olur. Eğer $b \leq \upsilon$ ise

$\upsilon_1 \leq b_m$

$\upsilon_1 \leq b_1$

.

.

.

$\upsilon_m \leq b_{m-1}$

$\upsilon_{m+1} \leq b_{m+1}$

$\upsilon_b \leq b_b$

demektir. Toplam alınarak $\sum_{i=1}^{b} \upsilon_i \leq \sum_{i=1}^{b} b_i$ elde edilir.

$b \leq \upsilon$ ise $\sum_{i=1}^{b} b_i \leq \sum_{j=1}^{b} b_j$ olacağı aşikardır.

Yaklaşık- lineer uzaylarda $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i = \sum_{j=1}^{b} \upsilon_j$ olduğunu görmüştük. Böylece

$\sum_{i=1}^{v} b_i = \sum_{j=1}^{b} \upsilon_j \leq \sum_{i=1}^{b} b_i$ elde edilir.

$b < \upsilon$ ise $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i = \sum_{i=1}^{b} b_i + \sum_{i=b+1}^{\upsilon} b_i$ yazılabileceği için yukarıdaki eşitsizlik mümkün değildir. Ayrıca m>1 dir. Aksi halde b=1 olur ki bu b>1 oluşu ile çelişir. Bu sebeple bir noktadan en az iki doğru geçer. Yukarıdaki $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i \leq \sum_{i=1}^{\upsilon} b_i$ çelişkisinden kurtulabilmek için $b \geq \upsilon$ olmalıdır.

ii) $b = \upsilon$ olsun.

$1 \leq i \leq m-1$ için $\upsilon_i + 1 = b_i$, $b_m = \upsilon_1$

$m+1 \leq j \leq b$ için $\upsilon_j = b_j$ dir.

“U = ($\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$) υ noktalı bir sonlu yaklaşık-lineer uzay olsun. Bu takdirde U nun bir lineer uzay olması için gerek ve yeter şart $\sum_{j=1}^{b} \upsilon_j(\upsilon_j - 1) \geq \upsilon(\upsilon - 1)$ olmasıdır.” teoremi gereğince $\sum_{j=1}^{b} \upsilon_j(\upsilon_j - 1) = \upsilon(\upsilon - 1)$ dır. Bu eşitliğin sol tarafı $\sum_{j=1}^{b} b_j(b_j - 1) = b(b-1)$ dir.

Böylece yardımcı teorem 4.3 gereğince bütün doğrular kesişir. Tüm doğruların kesişmesiyle iki durum oluşur.

I. Durum:

Bütün noktalar d_i ve d_j gibi iki doğrunun üzerinde olsun. N bu doğruların kesişim noktası olsun. d_i üzerinde N den farklı bir X_i noktası d_j üzerinde X_j noktası alınsın. ($X_i \in d_i \setminus \{N\}, X_j \in d_j \setminus \{N\}$) olsun. Bu durumda X_iX_J doğrusu bu iki nokta dışında başka nokta kapsayamaz. Yani iki noktalıdır. d_i üzerinde üçüncü nokta Y_i ve d_j üzerinde üçüncü nokta Y_j noktalarının varolduğu kabul edilsin. Y_iY_j doğrusu iki noktalı bir doğrudur ve X_iX_j ile Y_iY_j doğrularının ortak noktaları yoktur.

Bu ikinci durumdaki bütün doğruların kesişmesi ile çelişir. O halde doğruların her ikisi üzerinde üçüncü noktaları almaya hakkımız yoktur. Bu yüzden de d_i doğrusu 2 noktalı d_j doğrusu da υ-1 noktalı olmak zorundadır. Bu durumdaki Lineer Uzaya bir yaklaşık demet denir. Burada bir doğru υ-1 noktalı diğer bütün doğrular iki noktalıdır.

II. Durum :

d_i ve d_j doğruları dışında bir N noktasının olduğu farzedilsin. Bu durumda her $X \in d_i$ için $\varnothing(X) = NX \cap d_j = X'$ dönüşümü $\varnothing: d_i \to d_j$ şeklinde alınıp bire bir ve örten dönüşümdür.

$\varnothing(d_i \cap d_j) = d_i \cap d_j$ Her $\tilde{X} \in d_j$ için $\varnothing(\tilde{X} N \Lambda d_i) = \tilde{X}$ olup $\varnothing$

d_j’yi örter. Yani örten dönüşümdür.

$X, Y \in d_1$, $X \neq Y$ için $NX \neq NY$ dir. $NX \Lambda d_j \neq NY \Lambda d_j$ L2 aksiyomu gereğince $\varnothing(X) \neq \varnothing(Y)$ olduğundan $\varnothing$, bire bir dir.

Bu durumda d_i ve d_j doğrularının nokta sayısı eşittir. d_i doğrusu üzerindeki nokta sayısı k+1 ise bütün doğruların nokta sayısı da k+1 olur.

İkinci durumda bütün doğrular kesişeceği için N den geçen doğru sayısı d üzerindeki nokta sayısına eşit olur. Dolayısıyla bir N noktasından k+1 doğru geçer. k=2 için bu uzay üçgen olur. Bütün noktalar iki doğrunun üzerinde olduğu için bu aslında 1. durumdur. Dolayısıyla $k \geq 2$ diyebiliriz.

L2 aksiyomu nokta ve doğru sayısı ile ilgili bazı sonuçlar çıkarmamızı sağlayacaktır. υ (dolayısıyla b) sonlu bir sayı olarak kabul edilmektedir.

Yardımcı Teorem 4.5 : Belli bir N_i noktası için $\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j - 1)r_{ij} = \upsilon - 1$ dir.

İspat : Herhangi bir N_i noktası seçildiğinde uzayın diğer noktaları bu N_i noktasından geçen doğrular arasında bulunabilir.

Her nokta N_i noktasından geçen bir doğru üzerindedir. N_i den geçen d_j doğrusu üzerinde N_i hariç υ_j-1 tane nokta vardır. Böylece N_i noktası hariç uzayda toplam olarak

$$\sum_{d_j \in N_i}(\upsilon_j - 1) = (\upsilon - 1)$$

$$\sum_{d_j \in N_i}(\upsilon_j - 1).1 + \sum_{d_j \in N_i}(\upsilon_j - 1).0 = \upsilon - 1$$

$\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j - 1)r_{ij} = \upsilon - 1$ bulunur.

Yardımcı Teorem 4.6 : Bir lineer uzayda

$\sum_{j=1}^{b}\upsilon_j(\upsilon_j - 1) = \upsilon.(\upsilon - 1)$ dir.

İspat : $\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j - 1)r_{ij} = \upsilon - 1$ yazılır.

N_1 için υ-1=$\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j - 1)\, r_{1j}$

N_2 için υ-1=$\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j - 1)\, r_{2j}$

.

.

.

N_{υ} için υ-1=$\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\,r_{\upsilon j}$ yazılabilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{\upsilon}(\upsilon-1)=\sum_{i=1}^{\upsilon}\ \sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\,r_{ij}$$

$$\upsilon.(\upsilon-1)=\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1).\sum_{i=1}^{\upsilon}r_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\upsilon_j \text{ elde edilir.}$$

Yaklaşık lineer uzaylardan da bilindiği gibi $1\leq$ i, j $\leq$ υ için $b_i = b_j$, $b_1 = b_{\upsilon}$ olması nokta regülerliğini gerektirir.

$1\leq$ i, j $\leq$ b için $\upsilon_i = \upsilon_j$ $\upsilon_1 = \upsilon_b$ ise doğru regülerliğini gerektirir.

Yardımcı Teorem 4.7 : Eğer bir lineer uzay doğru regüler ise bu durumda nokta regülerdir.

İspat : U doğru regüler bir lineer uzay olup doğru regülerliği k+1 olsun. Herhangi bir N_i noktası için yardımcı teorem 4.5 gereğince

$\upsilon-1=\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\,r_{ij}$ = k.b_i olduğu bilinmektedir.

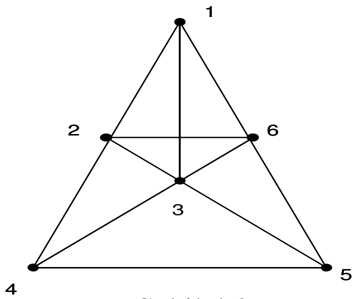
N_i den geçen her bir doğru üzerinde N_i noktası hariç k tane nokta vardır.

υ-1 =k.b_i $\Rightarrow$ $b_i = \dfrac{\upsilon-1}{k}$

Bu ifade N_i nin seçiminden bağımsızdır. Her nokta için geçerlidir. Dolayısıyla her N noktası için

$\dfrac{\upsilon-1}{k}$ = b_i yazılabilir.

Lineer uzayın doğru regüer iken nokta regüler olduğu görülmüştü. Bunun tersinin doğru olup olmadığı düşünülebilir. Yani bir lineer uzay nokta regüler iken doğru regüler olmalı mıdır? Bu doğru değildir. Şekil 3.2 deki lineer uzayı düşünelim. Bu uzaydan bir nokta çıkarılsın ve uzayın doğruları da ona göre kısaltılsın. Elde edilen şekle delinmiş Fano Düzlemi denir. 0 noktasının atıldığı düşünülsün. Delinmiş Fano düzlemi aşağıdaki gibi olur. Bu uzayın her noktasından 3 tane doğru geçer yani nokta regülerdir. Ancak doğru regüler değildir. Çünkü bazı doğrular3, bazıları 2 noktalıdır.



Şekil 4.3

Yardımcı Teorem 4.8 : $k \geq 1$ olmak üzere bir lineer uzayın k+1 doğru ve nokta regülerliğine sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda bütün doğrular kesişir ve
$b = \upsilon = k^2 + k + 1$ dir.

İspat : Bu uzayı U ile gösterelim ve bu uzayın iki doğrusu b ve c olsun. N, b doğrusu üzerinde bir nokta olsun. $N \in c$ ise b ve c kesişir. Eğer $N \notin c$ ise c nin üzerinde k+1 nokta vardır ve N noktasından k+1 doğru geçer. Dolayısıyla N'den geçen doğrular ile c üzerindeki noktalar arasında bire-bir bir eşleme vardır.
Yani N den geçen bütün doğrular c yi keserler.
Bu bütün doğruların kesiştiğini gösterir. Herhangi bir N noktası için Yardımcı
Teorem 4.7 gereğince $b(N) = \frac{\upsilon - 1}{k} = k + 1$ dir.
Böylece $\upsilon - 1 = k^2 + k$ ya da $\upsilon = k^2 + k + 1$ dir.
Noktaların $\upsilon(k+1)$ sayısı, her noktadan geçen doğru sayısıyla çarpılsın. Her doğru k +1 kez tekrarlandığından $b = \frac{\upsilon(k+1)}{k+1} = \upsilon$ dir.

Yardımcı teorem 4.9: Eğer $b \geq 1$ özelliğindeki bir U lineer uzayı $k \geq 1$ olmak üzere k+1 düzenliliğine sahipse ve eğer $b_1 \leq k+1$ ise bu durumda U ya 1 veya k + 1 nokta regülerliğine sahiptir.

İspat: U bir Lineer uzay ve $k \geq 1$ olmak üzere U uzayı k + 1 doğru düzenliliğine sahipse ve eğer $b_1 \leq k+1$ ise yardımcı teorem 4.7 gereğince U nokta regülerdir ve nokta regülerliği $\frac{\upsilon - 1}{k} \leq k+1$ olur.

Şayet U uzayında bir d doğrusunun dışında bir N noktası varsa $b(N) \geq k + 1$ dir. Böylece $b(N) = k + 1$ dir. Bu hal d doğrusunun üzerinde olmayan her N noktası için doğrudur. Ayrıca d doğrusu üzerindeki her M noktası için de aynı düşünce doğrudur. Çünkü M den geçmeyen bir d_i doğrusu vardır. Böylece U uzayının en az iki doğrusu varsa U nokta regülerdir ve nokta regülerliği k+1 dir. Eğer U uzayında yalnızca bir doğru varsa yine regülerdir. Nokta regülerliği aşikar olarak 1 dir (Keyif 1994).

Yardımcı Teorem 4.10: Eğer bir U Lineer uzayında bütün doğrular kesişiyorsa ya

i) U aşikardır ya,

ii) U bir yaklaşık demettir ya da,

iii) U nokta ve doğru regülerdir, $k \geq 2$ olmak üzere bu regülerlik k + 1 ile gösterilir. Bu durumda $\upsilon = b = k^2 + k + 1$ dir.

İspat: Teorem 4.4 ve Yardımcı Teorem 4.8 te bütün doğruların kesişeceği koşullar belirlenmektedir. Bir lineer uzayda bütün doğrular kesişiyorsa $b>1$ olduğunda, Teorem 4.4 ün ii) kısmında bahsedilen iki tip uzaydan birinin elde edileceği görülebilir. Bu da teoremimizin ii) ve iii) bölümlerinde belirtilenlerdir.

Bir aşikar uzayda birden fazla doğru bulunmadığından iki doğrunun kesişmemesi mümkün değildir.

Lineer uzayların en iyi bilinen örnekleri projektif düzlemler ile afin düzlemlerdir. Bu düzlemlerle ilgili geniş bir bilgi için (Kaya 1992), (Stevenson 1972) kaynaklarına bakılabilir. Buradaki tanım ve önermelerimizde (Batten 1986) yı esas alıyoruz.

Projektif Düzlemler

Tanım 4.2:
P1: Herhangi iki doğrunun bir ortak noktası vardır.
P2: Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta vardır.
aksiyomlarını sağlayan bir lineer uzaya projektif düzlem denir.

Yardımcı Teorem 4.11: Eğer bir lineer uzay P2 aksiyomu sağlıyorsa ve her P_i noktası ile d_j doğrusu için $r_{ij} = 0$ iken $c_{ij} = b_i$ özelliğine sahipse bu uzay bir projektif düzlemdir.

İspat: $r_{ij} = 0$ iken $c_{ij} = b_i$ olduğundan bütün doğrular kesişir.
Bir IP projektif düzleminde toplam nokta sayısını υ ve toplam doğru sayısını b ile göstereceğiz. Burada projektif düzlemler için υ ve b sayılarının sonlu olduğunu düşüneceğiz.
Aşağıdaki önermelerin ispatı için Batten'e bakılabilir.

Yardımcı Teorem 4.12: Bir IP projektif düzlemi nokta ve doğru regüler olup $k \geq 2$ olmak üzere $\upsilon = b = k^2 + k + 1$'dir.

Yardımcı Teorem 4.13: Mertebesi 2 olan bir tek projektif düzlem vardır.

Tanım 4.3: $\mathcal{N}$ den $\mathcal{N}'$ ye ve $\mathcal{L}$ den $\mathcal{L}'$ ye bire bir olan ve "$N \in d$ olması için gerek ve yeter koşul $f(N) \in f(d)$ olmasıdır" şartını sağlayan bir f fonksiyonuna U=($\mathcal{N}$,$\mathcal{L}$) yaklaşık-lineer uzayının U'=($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$) yaklaşık-lineer uzayına gömülmesi denir.

Teorem 4.14: Herhangi üçü doğrudaş olmayan dört nokta kapsayan bir U yaklaşık-lineer uzayı bir projektif düzlem içine gömülebilir.

İspat: Bu projektif düzlem yaklaşık-lineer uzaya gerekli olan nokta ve doğruları ekleyerek inşa edilir. Hipotez gereği P2 geçerlidir. İki noktanın bir tek doğru üzerinde olduğu, iki doğrunun bir tek noktada kesiştiği ve doğruların en az ikişer noktaya sahip olduğuna emin olunmalıdır.

U nun bir doğru üzerinde olmayan bütün nokta çiftlerini düşünelim. Bu durumda U yu bir lineer uzaya götürmek için gerekli olan bütün 2-noktalı doğrular eklensin ve kesişmeyen doğrular düşünülsün. Bu şekildeki her doğru çiftine bir yeni nokta eklenir. Bir doğruyla birleştirilmeyen noktalar tekrar edilsin. Dolayısıyla 2 noktalı doğrular tekrar eklensin.

Yöntem açıktır. Bu şekilde devam edilecek ve her adımda bulunan yaklaşık lineer uzayların birleşimi alınarak bir projektif düzlem elde edilecektir. Gömme fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir.

U nun her noktası kendisine dönüşür. U nun her d doğrusu bazı yeni noktaları ve d yi kapsayan bir doğruya dönüşür.

Tanım 4.4: Bir IP projektif düzlem, IP' de noktalarının kümesi IP nin noktaları kümesinin bir alt kümesi olan bir projektif düzlem olsun. Bu durumda IP' ye IP projektif düzleminin bir alt düzlemi denir.

Teorem 4.15: Eğer IP' sonlu bir IP projektif düzleminin bir alt düzlemi ise, eğer IP ile IP' nin mertebeleri n ve m ise bu durumda IP≠IP' $n = m^2$ veya $m^2 + m \leq n$ dir.

Eğer IP' mertebesi $n = m^2$ olan bir sonlu IP projektif düzleminin mertebesi m olan bir alt düzlemi ise bu durumda IP nin her doğrusunun IP' nün en az bir noktasını içerdiği görülür (Bruck 1963).

Teorem 4.15 bazı projektif düzlemlerin başka projektif düzlemler içinde olması bazı önemli kısıtlamalar verir. Örneğin mertebesi 3 olan projektif düzlem Fano düzlemini kapsamaz çünkü $3 \neq 2^2$ ve $3 \geq 2^2 + 2$ dir.

Mertebesi 9 olan bir projektif düzlem yalnızca mertebesi 2 veya 3 olan projektif düzlemler kapsayabilir. Mertebesi 9 olan bir projektif düzlemin bu mertebeden projektif düzlemleri kapsamak zorunda olduğunun gösterilmediğine dikkat edilmelidir.

Tanım 4.5: Bir IP projektif düzleminin her noktası bir IP' alt düzleminin bir doğrusu üzerinde ise ve IP nin her doğrusu IP' yi en az bir noktada kesiyorsa IP' ye IP nin bir Bear alt düzlemi denir.

Yardımcı Teorem 4.16: Eğer IP^1, IP nin mertebesi m olan bir Bear alt düzlemi ise ve IP nin mertebesi n ise bu durumda $n = m$ veya $n = m^2$ dir.

Projektif Uzaylar

Tanım 4.6: Herhangi bir iki-boyutlu alt uzayı bir projektif düzlem olan bir U lineer uzayına bir projektif uzay denir.

Yardımcı Teorem 4.17: Bir projektif uzayın herhangi bir alt uzayı da bir projektif uzaydır.
Ø, bir nokta, bir doğru aşikar projektif uzay örneklerdir.

Yardımcı Teorem 4.18: Herhangi bir projektif uzayın iki doğrusu aynı sayıda nokta kapsar.

İspat: d ve d' farklı doğrular olsunlar. Eğer bunlar aynı düzlemde iseler sonuç aşikardır. Eğer değillerse $P \in d$, $P' \in d'$ olsun. $h=PP^1$ olsun. Bu durumda d ve h düzlemdaş olur. Yani aynı sayıda nokta kapsar.
Doğruların nokta sayısı sonlu ve bu sayı k+1 olsun. Bu durumda U nun mertebesi k dir. k nın U daki bir projektif düzlemde mertebe olduğu aşikardır (Keyif 1994).

Yardımcı Teorem 4.19: U projektif uzayının, herhangi bir alt uzayı V ve $p \notin V$ olsun. Bu durumda $<V \cup \{p\}>$ alt uzayı $q \in V$ olmak üzere bütün pq doğruları üzerindeki noktaların kümesidir.

İspat: X, p den geçen ve V yi kesen doğruların içerdiği noktaların kümesi olsun. X in bir alt uzayı olduğunu gösterelim. X'in V ve p üzerindeki en küçük alt uzay olduğu aşikar olduğundan sonuç çıkar. $V \neq Ø$ olsun q ve r, X in noktaları olsunlar. $qr \subseteq X$ olduğunu göstermeliyiz. Eğer p, q ve r doğrudaş ise X in tanımından $qr = pq \subseteq X$ dir. p, q ve r nin doğrudaş olmadığını kabul edelim.

$pq \cap V = q^1$ ve $pr \cap V = r^1$ olsun. (p=q' veya r=r' hallerinin mümkün olduğuna dikkat edilmelidir.)

Şimdi IP=$\langle\{p\}\cup\{q\}\cup\{r\}\rangle$ farklı olan q' ve r' noktalarını kapsayan bir düzlemdir. Yani q^1r^1 doğrusu IP dedir. Aynı zamanda V dedir. S, qr nin bir noktası olsun. ps doğrusu IP dedir. IP bir projektif düzlem olup ps doğrusu q'r' doğrusunu s' noktasında keser. Yani $s^1 \in V$ olur ve böylece $s \in X$ dir.

Yardımcı Teorem 4.20: Bir U projektif uzayı değişme özelliğini sağlar.

İspat: x ile y nin U nun noktaları olduğunu ve x in U nun noktalarının bir $x \notin < X >$, $x \in < X \cup \{y\} >$ olduğu kabul edilsin. <X>=X bir alt uzaydır kabulünü yapabiliriz. Yardımcı Teorem 4.19 gereği $x \in < X \cup \{y\} >$ x in $p \in X$ olmak üzere bir yp doğrusu üzerinde olmasını gerektirir ve açık olarak x ≠ p kabul edilmelidir. Böylece y, xp doğrusu üzerindedir. Buna göre $y \in < X \cup \{x\} >$ dir.

Sonuç 1: Sonlu boyutlu U projektif uzayının boyutu n ise bu durumda U nun hepsi aynı bir (n-1)-boyutlu alt uzayda olmayan (n+1) tane noktasının kümesi U nun bir bazını oluşturur.

Sonuç 2: n-boyutlu bir projektif uzayın hiper düzemleri tam olarak (n-1)-boyutlu alt uzaylardır.

Yardımcı Teorem 4.21: Mertebesi k olan n-boyutlu bir projektif uzayın noktalarının sayısı n≥0 olmak üzere $k^n + k^{n-1} + \ldots\ldots.. + k + 1$ dir.

İspat: n = 0 ve n = 1 hallerinde ispatın açık olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 4.22: Bir U projektif uzayın bir H has alt uzayının bir hiper düzlem olması için gerek ve yeter şart U nun her doğrusunun H yi en az bir noktada kesmesidir.

İspat: Her doğrunun H yi kestiği kabul edilsin ve $p \notin H$ olsun. Bu durumda q ≠ p ler için hipotez gereği pq doğrusu H yi keser. Bundan dolayı herhangi bir $p \notin H$ için $U \subseteq < HU\{p\} >$ veya U = <HU{p}> dir.

Eğer H bir hiper düzlem olmasaydı $H \subseteq V \subseteq U$ olacak biçimde bir V alt uzayı bulunurdu. Bu durumda $p \in V \setminus H$ seçersek $< HU\{p\} \subseteq V \subseteq U$ elde edilir ki bu söylediklerimizle çelişir. Bu yüzden H bir hiper düzlemdir.

H nin bir hiper düzlem olduğu kabul edilsin. Yardımcı Teorem 4.19 gereği p, H de olmayan belli bir nokta ve $q \in H$ olmak üzere pq formundaki doğrular üzerinde olan noktaların kümesi bir alt uzay olmasını gerektirir. H bir hiper düzlem olduğundan $< HU\{p\} >= U$ dur. Dolayısıyla bütün doğrular H yi keser.

Yardımcı Teorem 4.23: Bir U projektif 3-uzayının herhangi iki düzlemi bir doğru boyunca kesişir.

İspat: IP ve IP' ,U nun farklı düzlemleri olsunlar. p, IP \ IP' nün bir noktası ve d_1 ile d_2 IP nin p den geçen doğruları olsunlar. IP' yardımcı teorem 4.20 in ikinci sonucu gereği U nun bir hiper düzlemidir. Yardımcı teorem 4.22 gereğince d_1 ile d_2 IP' yi keser. Arakesit noktaları farklı olmalıdır. Bu durumda bir doğru üretir ki bu doğru IP ile IP' nün her ikisindedir.

Afin Düzlemler ve Afin Uzaylar

Tanım 4.7: A1: Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel çizilir.

A2: Doğrudaş olmayan üç nokta vardır.

aksiyomlarını sağlayan bir lineer uzaya bir Afin Düzlem denir.

Eğer d ve d^1 afin düzlemin doğruları ve d=d' veya d ile d' kesişmiyorsa bu doğrular paraleldir denir ve $d//d^1$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 4.24: Eğer U birden fazla doğruya sahip bir lineer uzay ve her $p_i \notin d_j$ için $c_{ij} = b_i - 1$ ise bu durumda U bir afin düzlemdir.

Yardımcı Teorem 4.25: Her doğrunun en az üç noktalı olduğu bir $\mathcal{A}$ afin düzleminin boyutu 2 dir (Batten 1986).

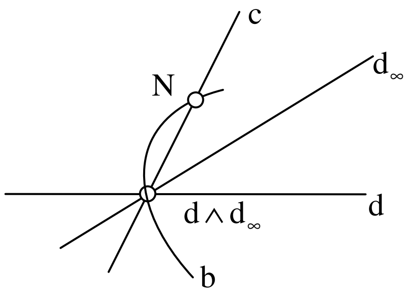
Teorem 4.26: Bir $\mathcal{A}$ afin düzlemi bir IP projektif düzlemi içine $\mathcal{A}$ nın noktaları; d, IP nin bir doğrusu olmak üzere IP / d nin noktaları olacak biçimde yerleştirilebilir. Eğer $\mathcal{A}$ nın mertebesi k ise bu durumda IP nin mertebesi de k dır (Batten 1986).

Teorem 4.27: Bir projektif düzlemden herhangi bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunan tüm noktalar çıkarılırsa geriye kalan geometrik yapı bir afin düzlemdir.

İspat: IP=($\mathcal{N}$,$\mathcal{L}$,o) bir projektif düzlem olsun. Bu düzlemde keyfi bir $x \in \mathcal{L}$ doğrusu seçerek $x = d_\infty$ diyelim. d_∞ doğrusu ve onun üzerindeki noktalar atılarak $\mathcal{N}' = \{N: N \in \mathcal{N}, N ø d_\infty\}$, $\mathcal{L}' = \{d: d \in \mathcal{L}, d \neq d_\infty\}$ ve o' de o nun $\mathcal{N}' \times \mathcal{L}'$ ye kısıtlanmışı olmak üzere bir ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$, o') sistemini düşünelim.

P1 $\Rightarrow$ A1, çünkü M, N $\in \mathcal{N}'$ ve M $\neq$ N için M ø d_∞ ve N ø d_∞ olduğundan MN$\neq d_\infty$ dolayısıyla da MN$\in \mathcal{L}'$ olur.

A2 aksiyomu için N $\in \mathcal{N}'$, d $\in \mathcal{L}'$ ve N ø' d olacak şekilde bir nokta ve bir doğru düşünelim. IP de c = Nvdd_∞ doğrusu için Noc olduğunu göz önüne alalım. ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$, o') de c için c $\in \mathcal{L}'$ ve yine N ø d dir. Üstelik cdod_∞ olduğundan c // d dir.



Şekil 4.4

c nin tekliğini göstermek için N o' b, b // d olacak şekilde bir b$\in \mathcal{L}'$ olsun. Burada bdod_∞ dir. çünkü bdød_∞ olsa bd$\in \mathcal{N}'$ olurdu ki bu b // d ile çelişir. Dolayısıyla bd=dd_∞ ve b = Nvbd = Nvdd_∞ =c bulunur. Bu A2 nin geçerli olduğunu gösterir.

Kolayca gösterilebilir ki IP de her doğrunun dışında doğrudaş olmayan üç nokta vardır. Bu IP den hangi doğru atılırsa atılsın ($\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}'$, o') nin A3 aksiyomunun sağlandığını gösterir (Kaya 1992).

Tanım 4.8: Bir hiper düzlemi atılan bir projektif uzaya afin uzay denir.

Yardımcı Teorem 4.28: Bir afin uzayda bütün doğrular aynı sayıda nokta kapsar (Batten 1986).

Yardımcı Teorem 4.29: n-boyutlu k mertebeli bir projektif uzaydan elde edilen A afin uzayının toplam nokta sayısı k^n dir (Batten 1986).

Yardımcı Teorem 4.30: Eğer A afin uzayı n-boyutlu bir U projektif uzayından elde edilmişse ve eğer U nun mertebesi 2 değilse bu durumda A nın boyutu n dir (Batten 1986).

Teorem 4.31: Mertebesi 2 olmayan bir A afin uzayının iki-boyutlu her uzayı bir afin düzlemdir.

İspat: A nın doğrudaş olmayan üç noktası alınsın.
A= U \ H olsun. Bu üç nokta U da bir IP projektif düzlemi üretir. d ve d' bu üç noktadan oluşturulan üçgenin iki kenarını oluşturan farklı doğrular olsun.
p=[d] ve q=[d'] IP nin noktaları olsun. IP de $d_\infty = pq$ olsun. bu üç noktanın IP$\setminus d_\infty$ u ürettiği gösterilsin. X bu kümenin üçgenin kenarları üzerinde olmayan bir noktası olsun. A nın mertebesi 2 den büyük olduğundan IP de x den geçen en az dört doğru vardır. x ve $d \cap d'$ den geçen doğru çıkarıldığında –x ve [d] den geçen doğru ile x ve [d'] den geçen doğru –x den geçen bunlardan farklı herhangi bir doğru d ve d' yu farklı noktalarda keser. Bundan dolayı A da $x \in < d \cap d' >$ dur. Yani iki boyutlu uzay gerçekte IP$\setminus d_\infty$ dur. İspatın geri kalanı kolayca çıkarılır. (Batten 1986).

Teorem 4.32: L aşağıdaki özellikleri sağlayan bir lineer uzay olsun.

1) L nin her düzlemi bir afin düzlemdir.
2) L de doğrudaş olmayan en az üç nokta vardır.
3) L nin her doğrusunun en az dört noktası vardır.

Bu durumda L bir afin uzaydır (Buckenhaut 1969 a).

Böylece mertebesi en az dört olan afin uzaylar yukarıdaki gibi karakterize edilebilir.

5. KISITLI LİNEER UZAYLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

Tanım 5.1: $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, υ noktalı ve b doğrulu sonlu lineer uzay olsun. Eğer $\mathcal{L}$ de,

$$(b-\upsilon)^2 \leq \upsilon$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{L}$ ye kısıtlı lineer uzay denir. Eğer kısıtlı lineer uzayda

$$n^2 \leq \upsilon < (n+1)^2$$

olacak şekilde bir $n \in N^+$ varsa bu uzay n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzaydır.

İki noktalı lineer uzay 1. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzaydır.

Teorem 5.1 (P1): $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ aşikar olmayan, υ noktalı, b doğrulu bir lineer uzay olsun. bu takdirde

$$\sum_{j=1}^{b} \upsilon_j = \sum_{i=1}^{\upsilon} b_i$$

dir.

İspat: $\mathcal{L}$ bir lineer uzay olduğundan üzerinde bulunma matrisinde bütün satırlardaki 1 lerin toplamı $\sum_{i=1}^{\upsilon} b_i$ dir ve bütün sütunlardaki 1 lerin toplamı $\sum_{j=1}^{b} \upsilon_j$ dir.

Ancak üzerinde bulunma matrisindeki toplam 1 lerin sayısı hem her bir satırdaki 1 lerin toplam sayısına hem de her bir sütundaki 1 lerin toplam sayısına eşit olduğundan istenen eşitlik sağlanmış olur.

Teorem 5.2 (P2): Belli bir P_i noktası için,

(i) $\sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{ij} = \upsilon - 1$

(ii) $\sum_{j=1}^{b} \upsilon_j (\upsilon_j - 1) = \upsilon(\upsilon - 1)$

dir.

İspat: (i) Herhangi bir P_i noktası seçip uzayın diğer noktalarını bu P_i noktasından geçen doğrular üzerinde buluruz.

Her nokta P_i den geçen bir doğru üzerindedir ve P_i den geçen ℓ_i doğrusu üzerinde P_i noktası hariç $(\upsilon_j - 1)$ nokta vardır. Böylece P_i noktası hariç uzayda toplam $\sum_{\ell_i o p_i} (\upsilon_j - 1)$ nokta vardır. Her P_i noktası bu ℓ_j doğrularının tam olarak biri üzerindedir. Yani,

$$\sum_{\ell_i o p_i} (\upsilon_j - 1) = \upsilon - 1$$

$$\upsilon - 1 = \sum_{p_i \in \ell_i} (\upsilon_j - 1).1 + \sum_{p_i \notin \ell_i} (\upsilon_j - 1).0$$

$$= \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{ij}$$

dir. $P_i o \ell_j$ ise $r_{ij}=1$ ve $P_i \not{o} \ell_j$ ise $r_{ij}=0$ olduğunu göz önüne alarak,

$$\upsilon - 1 = \sum_{p_i \in \ell_i} (\upsilon_j - 1).1 + \sum_{p_i \notin \ell_i} (\upsilon_j - 1).0$$

$$= \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{ij} \text{ bulunur.}$$

(ii) Böylece her P_i noktası için,

$$\sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{ij} = \upsilon - 1$$

yazılabilir.

Her bir $P_1, P_2, \ldots, P_\upsilon$ noktaları için,

P_1 için $(\upsilon\text{-}1) = \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{1j}$

P_2 için $(\upsilon\text{-}1) = \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{2j}$

:

:

P_υ için $(\upsilon\text{-}1) = \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{\upsilon j}$

yazılır. Böylece ,

$$\sum_{i=1}^{\upsilon} (\upsilon - 1) = \sum_{i=1}^{\upsilon} \sum_{j=1}^{b} (\upsilon_j - 1) r_{ij}$$

$$\upsilon(\upsilon-1)=\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\sum_{i=1}^{\upsilon} r_{ij}$$

$$=\sum_{j=1}^{b}(\upsilon_j-1)\upsilon_j$$

dir.

Teorem 5.3 (P3): $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathscr{L})$ aşikar olmayan υ noktalı, b doğrulu lineer uzay ise $P_i \notin \ell_j$ olan bütün (υ_i, ℓ_i) çiftleri için $b_i \geq \upsilon_j$ dir. Ayrıca $\mathscr{L}$ nin tüm doğrularını ikişerli kesiyorsa $b_i = \upsilon_j$ dir.

İspat: $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathscr{L})$ lineer uzay, $P_i \notin \ell_j$ olsun. $\mathcal{L}$ lineer uzay olduğundan $\forall q_i \in \ell_j$ için P_i ve q_i den bir tek doğru geçer. Dolayısıyla P_i den geçip ℓ_j yi kesen doğruların sayısı υ_j tanedir. Fakat P_i den geçen ve ℓ_j yi kesemeyen doğrularda olabileceğinden $b_i \geq \upsilon_j$ dir. Eğer tüm doğrular kesişirse P_i den geçen ℓ_j ye paralel doğru olmadığından $b_i = \upsilon_j$ dir.

Teorem 5.4 (P4): $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathscr{L})$ υ noktalı, b doğrulu aşikar olmayan sonlu lineer uzay olsun. $\ell_j \in \mathscr{L}$ doğrusu için ℓ_j ye paralel doğruların sayısı S_j olsun. O zaman

$$\mathrm{b}-1=\mathrm{S_j}+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\upsilon}(\mathrm{b_i}-1)\mathrm{r_{ij}}$$

dir.

İspat: $\ell_j \in \mathscr{L}$ için $\upsilon(\ell_j)=\upsilon_j$ olduğundan her $\upsilon_i \in \ell_j$ noktasından geçen ℓ_j hariç tüm doğruların sayısı b_i - 1 dir. Bu işlem ℓ_j nin her bir noktası için uygulanırsa ℓ_j yi kesen toplam doğru sayısı

$$\sum_{i=1}^{\upsilon_i}(b_i-1)=\sum_{i=1}^{\upsilon}(b_i-1)r_{ij}$$

dir. Hipotez gereği ℓ_j ye paralel doğruların sayısı S_j ve uzayın toplam doğru sayısı ℓ_j kesenlerle ℓ_j ye paralel olanların toplam doğru sayısının 1 fazlası olduğundan

$$b-1=S_j+\sum_{i=1}^{\upsilon}(b_i-1)r_{ij}$$

dir.

Teorem 5.5 (P5): υ noktalı, b doğrulu her geniş lineer uzayda $b \geq \upsilon_1.\upsilon_2 + 2$ dir.

İspat: $\mathcal{L} = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ geniş lineer uzay olsun.

$\forall i < j$ için $\upsilon_j < \upsilon_i$ olduğundan $\upsilon_1 \geq \upsilon_2 \geq \ldots\ldots\ldots\ldots \geq \upsilon_b$ dir. $\mathcal{L}$ geniş lineer uzay olduğu için maksimum dereceli herhangi iki farklı ℓ_i, ℓ_j doğruları paralel olsun. Genelliği bozmadan i=1, j=2 seçebiliriz. l_1 ve l_2 doğrularının her ikisinide kesen toplam doğru sayısı $\upsilon_1.\upsilon_2$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{L}$ nin en az $\upsilon_1.\upsilon_2+2$ tane doğrusu vardır. O halde $b \geq \upsilon_1.\upsilon_2+2$ dir.

Teorem 5.6 (P6): υ noktalı, b doğrulu herhangi bir dar lineer uzayda $\ell_1 \wedge \ell_2 = W$ olmak üzere

$$b \geq (\upsilon_1-1).(\upsilon_2-1)+b(W)$$

dir.

İspat: $\ell_1 \wedge \ell_2 = W$, $\upsilon(\ell_1)=\upsilon_1$ ve $\upsilon(\ell_2)=\upsilon_2$ olduğundan ℓ_1 ve ℓ_2 yi aynı anda kesen toplam doğru sayısı

$$(\upsilon_1-1).(\upsilon_2-1)+b(W)$$

dir.

Ayrıca $\mathcal{L}$ de ℓ_1 veya ℓ_2 ye paralel doğrular olabileceği için $b \geq (\upsilon_1-1).(\upsilon_2-1)+b(W)$ dir.

Teorem 5.7 (P7): υ noktalı, b doğrulu bir lineer uzayda $\upsilon \geq \upsilon_1+k$, $k \in \mathbf{Z}$ $k \geq 0$ ise

$$b \geq 1+\frac{1}{2}k.(2\upsilon_1+1-k) = 1+k\upsilon_1-\binom{k}{2}$$

dir.

İspat: $\mathcal{L}$ aşikar ise b = 1, $\upsilon = \upsilon_1$ dir. k = 0 dır. Bu durumda istenen eşitsizlik sağlanır. ℓ_1 doğrusunun dışında en az k tane nokta vardır. Ayrıca $\mathcal{L}$ ancak tüm doğruların ℓ_1 i kesmesi durumunda en az sayıda doğru kapsar. Bu taktirde her $\upsilon_i \in \ell_1$ için ℓ_1 i kesen toplam υ_1.k tane doğru vardır. Bundan dolayı $\mathcal{L}$ en az

$$\upsilon_1.k + 1 - \binom{k}{2} = 1 + k.(2\upsilon_1 - (k-1))$$

kadar doğru kapsar. Buna göre

$$b \geq 1 + \frac{1}{2}k.(2\upsilon_1 - k + 1)$$

dir.

Teorem 5.8: ℓ_1 ve ℓ_2 $\mathcal{L}$ nin maksimum dereceli farklı iki doğrusu olsun. $\upsilon(\ell_1)=\upsilon_1$, $\upsilon(\ell_2)=\upsilon_2$ olsun.

P8) Eğer $\upsilon \geq 2\upsilon_1$ ise $\upsilon_2(\upsilon_2-1) \geq 2\upsilon - b - 1$

P9) $U_\alpha \notin \ell_1$ ise $b_\alpha \geq 1 + \dfrac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon_2 - 1}$

$U_\alpha \in \ell_1$ ise $b_\alpha \geq \dfrac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon_2 - 1}$

dir (Mertsöz 2003).

Teorem 5.9 (T1): $\mathcal{L}$, $2\upsilon_1 > \upsilon$ koşulunu sağlayan bir kısıtlı lineer uzay olsun. $\mathcal{L}$ ya bir yaklaşık demet ya iki noktası atılmış fano düzlemi ya da Lin's Cross dur.

İspat: Yaklaşık demetler, Lin's Cross ve iki noktası atılmış fano düzlemlerinin $2\upsilon_1 > \upsilon$ koşulunu sağlayan kısıtlı lineer uzay olduğu açıktır. Bu teoremin geri kalan ispatı De Witte'nin doktora tezinde mevcuttur.

Teorem 5.10 (T2): Sonlu afin düzlem olmayan her n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzayda $\upsilon_1 \geq n + 1$ dir.

Teorem 5.11 (T3): $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay ve $\upsilon = n^2$ ise o zaman $\mathcal{L}$ ya bir yaklaşık demet ya bir sonlu afin düzlem ya da III tip delinmiş sonlu yarı afin düzlemdir.

Teorem 5.12: Eğer $\mathcal{L}$ n.mertebeden karesel bir kısıtlı lineer uzay ise o zaman $\mathcal{L}$ ya bir yaklaşık demet ya da $\upsilon_2>n$ dir.

İspat: $\mathcal{L}$, yaklaşık demetten farklı n.mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. $n \leq 2$ için ispat aşikardır.

O halde $n \geq 3$ olduğunu düşünelim. Bu durumda Teorem 5.9 dan dolayı $\upsilon \geq 2\upsilon_1$ ise $\upsilon_2.(\upsilon_2-1) \geq 2\upsilon - b - 1$ olmasından dolayı $\upsilon_2.(\upsilon_2-1) \geq \upsilon - n - 1$ elde edilir.

Böylece $\upsilon_2 \geq n$ dir.

Teorem 5.13: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. Eğer $\upsilon_2 \leq n+1$ ise $\upsilon \leq n^2+\upsilon_1$ dir.

İspat: $\mathcal{L}$, $\upsilon_2 \leq n+1$ koşulunu sağlayan bir n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. $\upsilon \geq n^2 + \upsilon_1 + 1$ olsun. Teorem 4.3 den dolayı $U_\alpha o x_\sigma$ için

$$b_\alpha \geq 1 + \frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon_2 - 1} \text{ dir.}$$

$$b_\alpha \geq 1 + \frac{n^2 + \upsilon_1 + 1 - \upsilon_1}{n+1-1} = 1 + \frac{n^2+1}{n} = n + 1 + \frac{1}{n}$$

$\forall n \in \mathcal{N}$ için $1 + \frac{1}{n} \leq 2$ dir. Her U_α noktası için

$$\sum_\alpha b_\alpha \geq \upsilon(n+2) \text{ dir.}$$

Fakat $\mathcal{L}$ bir kısıtlı lineer uzay olduğu için

$$\upsilon(n+2) \leq \sum_\alpha b_\alpha = \sum_\alpha \upsilon_\alpha \leq \upsilon_1 + (b-1)\upsilon_2$$

$$(b-\upsilon) < n+1$$

$$(b-1) \leq n + \upsilon - 1$$

Karesel ve kısıtlı olduğundan $b - 1 \leq \upsilon + n - 1$ dir.

Bu eşitsizlikten;

$$\upsilon(n+2) \leq \upsilon_1 + (b-1)\upsilon_2 \leq \upsilon_1 + (\upsilon+n-1).(n+1)$$

Buradan;

$$\upsilon(n+1) + \upsilon \leq \upsilon_1 + \upsilon(n+1) + n^2-1$$

$$\Rightarrow \upsilon \leq \upsilon_1 + n^2-1$$

elde edilir.

Bu durumda P1 den dolayı

$$\upsilon_1 + n^2 - 1 \geq b \geq \upsilon_1 + n^2 + 1$$

elde ederiz. Buradan -1 > 1 bulunur ki bu sonuç anlamsızdır. Böylece kabulümüz yanlış olup

$$\upsilon \leq n^2 + \upsilon_1$$

dir.

Teorem 5.14: n. mertebeden karesel her geniş kısıtlı lineer uzay ya sonlu afin düzlem ya da $\upsilon_2 \geq n + 1$ dir.

İspat: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel geniş kısıtlı lineer uzay olsun. Sonlu afin düzlemlerin n. mertebeden karesel geniş kısıtlı lineer uzay olduğu aşikardır. O halde $\mathcal{L}$ nin afin düzlem olmadığını düşünelim. $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel geniş kısıtlı lineer uzay olduğundan Teorem 5.12 ye göre $\upsilon_2 \geq n$ dir.

Burada $\upsilon_2 \neq n$ olduğunu gösteremeyiz. Kabul edelim ki $\upsilon_2 = n$ T3 den dolayı $\upsilon \geq n^2 + 1$ dir.

P9 dan dolayı eğer $U_\alpha \notin \ell_1$ ise $b_\alpha \geq n+1$

$\mathcal{L}$ geniş olduğundan eğer $U_\alpha \in \ell_1$ ise P3 den $b_\alpha \geq \upsilon_2 + 1 = n + 1$ dir. Böylece;

$$\sum_\alpha b_\alpha \geq (\upsilon - \upsilon_1)(n+2) + \upsilon_1(n+1) = \upsilon(n+2) - \upsilon_1$$

Ancak;

$$\sum_r \upsilon_r \leq \upsilon_1 + (b-1)\upsilon_2 \leq \upsilon_1 + (\upsilon + n - 1)n$$

olduğu için P1 den

$$2\upsilon \leq 2\upsilon_1 + n^2 - n > 2\upsilon_1 + \upsilon$$

dir. Bu da T1 ile çelişir. Yani $\upsilon_2 \geq n + 1$ dir.

Teorem 5.15 : Eğer $\mathcal{L}$ geniş kısıtlı lineer uzay ise $\mathcal{L}$ bir sonlu afin düzlemdir.

İspat: Her sonlu afin düzlemin bir kısıtlı lineer uzay olduğu açıktır. Kabul edelim ki n. mertebeden geniş kısıtlı lineer uzay bir sonlu afin düzlem olmasın. Teorem 5.14 den sonlu afin düzlemlerden farklı n. mertebeden her karesel kısıtlı geniş lineer uzayda $\upsilon_2 \geq n + 1$ dir. Yani

$$\upsilon_1 \geq \upsilon_2 \geq n + 1$$

dir ve P5 den

$$\upsilon \geq b - n \geq \upsilon_1\upsilon_2 + 2 - n \geq n^2 + \upsilon_1 + 2$$

dir. Teorem 5.14 den dolayı $\upsilon_1 \geq \upsilon_2 \geq n + 1$ ve buradan

$$\upsilon \geq \upsilon_1\upsilon_2 + 2 - n \geq n^2 + 3n + 6 > (n+1)^2$$

dir. n nin tanımından dolayı bu bir çelişkidir.

Teorem 5.16: Her n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzayda $\upsilon_2 \leq n + 1$ dir.

İspat: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel bir kısıtlı lineer uzay olduğu için;

$$b - n \leq \upsilon \leq n^2 + 2n$$

dir.

$$\upsilon + n \geq b \geq \upsilon_1.\upsilon_2 + 2 \geq n^2 + 4n + 6 \geq \upsilon + 2n + 6$$

olur. Bu imkansızdır. Bu durumda $\mathcal{L}$ dar olmalıdır. $\mathcal{L}$ dar olduğunda x_1 ve x_2 nin arakesitinin W olduğunu göstermeliyiz.

P6 dan;

$$\upsilon \geq b - n \geq (\upsilon_1-1)(\upsilon_2-1) + b(W) - n$$

ve $\upsilon_2 \geq n+2$ olduğu için

$$\upsilon \geq (\upsilon_1-1)(n+1) + b(W) - n$$

elde edilir.

$\mathcal{L}$ dar n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olduğu için

$$n^2 \leq \upsilon < (n+1)^2$$

dir. O halde

$$(n+1)^2 > \upsilon \geq \upsilon_1(n+1) - (n+1) + b(W) - n$$

eşitsizliği düzenlenirse

$$(n+1)^2 \geq \upsilon_1(n+1) - (n+1) + b(W) - n$$

eşitsizliğinin her iki tarafı (n+1)'e bölünürse,

$$(n+1) \geq v_1 - 1 + \frac{b(W)}{n+1} - \frac{n}{n+1}$$

$\mathcal{L}$ dar n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay b(W) < n+1 olduğundan $\upsilon_1 \leq n+2$ olur.

$\mathcal{L}$ nin mertebesi artarak monoton olarak sıralandığından

$$\upsilon_1 \geq \upsilon_2 \geq n+2$$

idi. Yani

$$\upsilon_1 \geq n+2$$

dir. Dolayısıyla

$$\upsilon_1 = \upsilon_2 = n+2$$

dir. $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olduğundan

$$(n+1)^2 > \upsilon \geq n^2 + n + 1 + b(W)$$

dır. Buradan;

$$n > b(W)$$

elde edilir. O halde $b(W) \leq n-1$ dir.

Ayrıca W noktası $\mathcal{L}$ de x_1 ve x_2 doğrularının kesim noktası olduğundan ve $\mathcal{L}$ nin dar n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olduğundan

$$2 \leq b(W) \leq n-1$$

dir.

Bu durumda

$$\upsilon \geq n^2+n+1+b(W) \text{ ve } b(W) \geq 2$$

olduğundan

$$\upsilon \geq n^2 + n + 3$$

bulunur. P9 dan dolayı

$$b(W) \geq n + 1$$

dir. Oysa ki

$$b(W) \leq n - 1$$

bulunmuş idi. O halde kabulümüz yanlış olup

$$\upsilon_2 \leq n + 1$$

dir.

Sonuç: n. mertebeden karesel kısıtlı $\mathcal{L}$ lineer uzayında

$$\upsilon \leq n^2 + \upsilon_1$$

dir.

İspat: Teorem 5.16 ile her n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzayda $\upsilon_2 \leq n + 1$ olduğunu göstermiştik. Bundan dolayı Teorem 5.16 dan da $\upsilon \leq n^2 + v_1$ dir.

Teorem 5.17: Eğer $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay ise bu durumda

(i) $\mathcal{L}$ bir yaklaşık demet ise $\upsilon_2=2$

(ii) $\mathcal{L}$ bir sonlu afin düzlem ise $\upsilon_2=n$

(iii) Diğer durumlar için $\upsilon_2=n+1$

dır.

İspat: Teorem 5.17 de; $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzayda Teorem 5.12 nin ispatından $\mathcal{L}$ bir yaklaşık demet ise yaklaşık demetle n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olup υ noktalı bir yaklaşık demette $\upsilon_2 = 2$ dir.

Sonlu afin düzlemde bütün doğrular n. dereceden doğrular olduğu için $\upsilon_2=n$ olur.

Diğer durumlarda ifadesinden de anladığımız $\mathcal{L}$ nin bir yaklaşık demet ya da sonlu bir afin düzlem olmamasıdır. O zaman $\mathcal{L}$ ne bir yaklaşık demet ne de sonlu bir düzlem olsun. Bu nedenle $n \geq 2$ dir. Teorem 5.10 (T2) den $\mathcal{L}$ bir sonlu afin düzlem değilse $\upsilon_2 \geq n+1$ dir. Teorem 5.14 ve Teorem 5.15 den

$$\upsilon_2=n+1$$

dir.

Teorem 5.18: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun.

a) $\mathcal{L}$ bir yaklaşık demet ise $\upsilon_1=\upsilon-1$

b) $\mathcal{L}$ bir Linn's Cross ise $\upsilon_1=n+2$

c) $\mathcal{L}$ bir sonlu afin düzlemse $\upsilon_1=n$

d) Diğer durumda ise $\upsilon_1=n+1$

dir.

İspat: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. Teoremin ifadesindeki ilk üç sonuç açıktır. O halde $\mathcal{L}$ yaklaşık demet olmayan ne bir Linn's Cross ne de sonlu bir afin düzlem olsun. Bu durumda $\mathcal{L}$ için Teorem 5.17 den υ_2=n+1 olmasıdır. O halde $\upsilon_1 \geq$ n+2 olduğunu kabul edip bir çelişki bulmalıyız.

Adım 1: $n \geq 3$ olduğunu göstermeliyiz.

T1 den $\mathcal{L}$ seçiminden $n \geq 3$ olduğu açıktır.

P7 den dolayı $\upsilon \geq 2\upsilon_1$ elde edilir.

P7 gereğince

$$b \geq \frac{1}{2}(\upsilon_1 + \upsilon_1 + 2) \geq \frac{1}{2}(n^2 + 5n + 8)$$

dir.

Bir kısıtlı lineer uzayın karesel mertebeden kısıtlı lineer uzay olabilmesi için gerek ve yeter koşul ya

$$b\text{-}n \leq \upsilon \leq n^2\text{+}2n$$

yada $\quad n^2\text{+}2n \geq \upsilon \geq b\text{-}n \quad$ olmasıdır.

Dolayısıyla

$$n^2\text{+}2n \geq \upsilon \geq b\text{-}n \geq \frac{1}{2}(n^2 + 5n + 8) - n$$

eşitsizliğinin çözüm kümesinden $n \geq 3$ olur.

Adım 2: $\upsilon \geq n^2$+n+1 olduğunu ispatlayalım. $\mathcal{L}$ sonlu afin düzlem olmadığından Teorem 5.15 den dolayı $\mathcal{L}$ dardır.

$$x_1, x_2 \in \mathcal{L} \text{ ve } x_1 \wedge x_2 = W$$

olsun. Bu durumda P6 gereğince

$$\upsilon \geq b\text{-}n \geq (\upsilon_1\text{-}1)n + b(W)\text{-}n = (\upsilon_1\text{-}2)n\text{+}b(W)$$

elde edilir.

P9 dan

$$b(W) \geq 1+ \frac{\upsilon - \upsilon_1}{n}$$

dir. Buradan

$$n\upsilon \geq (\upsilon_1\text{-}2)n^2 + n + \upsilon\text{-}\upsilon_1$$

elde edilir. Ayrıca $\upsilon_1 \geq n + 2$ olduğundan;

$$\upsilon(n\text{-}1) \geq n^2 - 2$$

eşitsizliği elde edilir. Gerekli işlemler yapıldığında Adım 1 den dolayı

$$\upsilon \geq n^2 + n + 1$$

elde edilir.

Adım3: $\upsilon_1 = n + 2$, $b(W) \geq n + 1$ ve $\upsilon \leq n^2 + n + 2$

olduğunu gösterelim Adım 2 de;

$$n_2 + 2n \geq \upsilon \geq (\upsilon_1\text{-}2)n+b(W)$$

eşitsizliğinin çözümü yapıldığında

$$n + 2 \geq \upsilon_1$$

elde edilir. Kabulde

$$\upsilon_1 \geq n + 2$$

idi. Yani $\upsilon_1 = n + 2$ dir.

Oysa Adım 1 den $n \geq 3$ olduğunu Adım 2 ve P9 gereğince de;

$$b(W) \geq n + 1$$

olduğunu biliyoruz. Teorem 5.16 dan

$$\upsilon \leq n^2+\upsilon_1 \leq n^2+n+2$$

eşitsizliği elde edilir.

Adım 4: x_2 doğrusunu düşünelim. x_1 doğrusu üzerinde olmayan x_2 nin her noktasından P3 gereğince en az $n + 2$ doğru geçer. Bundan dolayı

$$b \geq S_2 + (n+1)n + b(W)$$

eşitsizliğine Adım 3 ve P4 uygulanırsa

$$n^2+n+2 \geq \upsilon \geq b - n \geq S_2 + (n+1)n + b(W) \geq S_2 + n^2 + n + 1$$

eşitsizliğinin çözümünden $S_2 \leq 1$ bulunur.

x_2 doğrusuna paralel bir doğru varsa bu tekdir. Bu doğru x_r olsun. x_r üzerinde veya x_2 nin dışındaki tüm nokta dereceleri en az n+2 olmalıdır.

$$n^2+n+1\text{-}n\text{-}2 \leq \upsilon\text{-}\upsilon_1 \leq \upsilon_2 \text{ -}1+\upsilon_r$$

eşitsizliğine P3, Adım 2 ve Adım 3 uygulanırsa

$$n^2\text{-}1 \leq \upsilon\text{-}\upsilon_1 \leq \upsilon_2 \text{ -}1+\upsilon_r \leq 2n+1$$

eşitsizliğinin çözümünden $n < 3$ bulunur. Bu da Adım 1 de $n > 3$ olmasıyla çelişir.

Böylece Teorem 5.17 nin geliştirilmesinden çok önemli olacak Teorem 5.18 sonucunu elde ederiz.

Sonuç: Yaklaşık demetten farklı n. mertebeden karesel her kısıtlı lineer uzayda $\upsilon \le n^2 + n + 1$ dir.

İspat: Bu sonuç Linn's Cross ve herhangi sonlu afin düzlem için doğrudur. Herhangi kısıtlı lineer uzay için Teorem 5.15 ve Teorem 5.16 kullanarak sonuç ispatlanmıştır.
Bir sonraki teoreme geçmeden önce DEMBOWSKİ ye ait bir sonuç vermeliyiz.
Bir III. Tip sonlu semi afin düzlem (FSP3) bir sonlu projektif düzlemden bir doğrusu üzerindeki bir noktası hariç tüm noktalarının atılmasıyla elde edilen bir sonlu lineer uzaydır. Ayrıca

$$\upsilon = n^2+1 \qquad \upsilon_1 = \upsilon_n = n+1 = \upsilon_{n+1}+1 = \upsilon_b+1$$

$$b=n^2+n \qquad b_1 = b_{\upsilon-1} = b_\upsilon+1$$

parametrelerine sahiptir.

Teorem 5.19: Eğer $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel bir kısıtlı lineer uzay ise; bu durumda $\mathcal{L}$, aşağıdakilerden biri olmadıkça U_α nın bütün noktaları için $b_\alpha \ge n+1$ dir.

(i) Bir yaklaşık demet,

(ii) Lin Kartezyen Çarpımı,

(iii) Bir III tip sonlu yarı afin düzlem,

İspat: $\mathcal{L}$, i) ve iii) den farklı n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun.
Eğer $\mathcal{L}$, bir sonlu afin düzlem ise teorem kesinlikle doğrudur. Bu durumu da hariç tutalım. Teorem 5.17 ve Teorem 5.18 den dolayı $\upsilon_1 = \upsilon_2 = n + 1$ dir. Bu sebeple P3 den, x_1 ve x_2 nin kesişimi $U_\alpha \neq W$ için $b_\alpha \ge n+1$ dir. Farz edelim ki $b(W) \le n$ olsun. O halde $U_p = W$ olur. Bu nedenle P2 den;

$$\upsilon - 1 \le \sum_\alpha (\upsilon_\alpha - 1) r_{\alpha\upsilon} \le nb_\upsilon \le n^2$$

dir. Bu sebeple, $\upsilon \le n^2 + 1$ dir. Ancak T3 den $p \neq n^2$ olduğunu biliyoruz. Bu sebeple, $\upsilon = n + 1$ olmalıdır ki bunun anlamı da yukarıdaki eşitsizliklerin, eşitlik olduğudur. Bu $b_\upsilon = n$ ve U_υ dan geçen tüm doğruların, (n+1) doğruları olduğudur.

Ayrıca P3 den dolayı tüm (n+1) doğruları, Up den geçer. Şimdi $n \geq 2$ olduğundan, $\mathcal{L}$ den U_υ yi çıkararak elde edilen sonlu lineer uzay $\mathcal{L}^*$ olsun. $\mathcal{L}^*$ parametrelerinin üzerine yıldız koyarak ifade edelim.

Bütün (n+1) doğruları, diğer doğruların tersine bir nokta kaybettiğinden, $\upsilon = \upsilon - 1 = n^2$, $b^* = b$ ve $\upsilon_1^* = \upsilon_2^*$ olur.

Eğer $b \leq n^2 + n$ ise $\mathcal{L}^*$ bir kısıtlı lineer uzaydır ve T3'e göre, o bir sonlu afin düzlem olmalıdır. Bu, $\mathcal{L}$ nin bir sonlu yarı afin düzlem olduğunu ifade ettiğinden dolayı $b \geq n^2 + n + 1$ olur. Fakat $\mathcal{L}$ ayrıca bir kısıtlı lineer uzay olduğundan $b = n^2 + n + 1$ dir.

Şimdi eğer, bütün U_α noktaları için $b_\alpha \leq n+1$ ise o halde P3 den herhangi bir (n+1)-doğrusu, $\mathcal{L}$ nin bütün doğrularıyla karşılaşır ve dahası U_υ üzerinde olduğundan kendinden farklı en fazla $n^2 + n - 1$ ile karşılaşır. Bu ise imkansızdır. Bu nedenle, $U\alpha$, $b\gamma \geq n+2$ gibi bir nokta olsun. Şimdi, $U_\upsilon \neq U_\gamma$ içindeki bütün doğrular, (n+1)-doğruları olduğundan ve [2] nin Teorem 5.15 inden ; $\mathcal{L}$ dar olduğundan x_1 ve x_2 yi seçilmiş kabul edebiliriz. Böylece x_1, $U\gamma$ içinden geçmezken x_2 geçer. Sonra $U\gamma$ nın içinden geçen x_1 i kaçıran bir doğru vardır. Bu nedenle $b_\delta \geq n+2$ gibi diğer bir U_δ noktamız vardır ve U_δ, x_2 üzerinde bulunmaz. ($\mathcal{L}$ dar olduğundan). x_2 kendinden başka en azından $n^2 + n$ kadar doğru ile karşılaşır ve U_δ içinde, x_2 yi kaçıran bir doğru vardır. Bu çok fazla doğruyu kapsadığından sonuç çelişkisini bulmuş oluruz (Mertsöz 2003).

Sonuç: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. $\mathcal{L}$ aşağıdakilerden farklı ise, bu durumda $\upsilon \geq n^2 + n + 1$ dir.

(i) $\mathcal{L}$ yaklaşık demet

(ii) 3. tip semi afin düzlem

(iii) Delinmiş 3. tip sonlu semi afin düzlem

(iv) Sonlu afin düzlem

İspat: Sonuç Linn's Cross için sağlanır. Kabul edelim ki $\mathcal{L}$, (i) - (iv) den ve Linn's Cross dan farklı olsun. $\mathcal{L}$ sonlu afin düzlem olmadığından Teorem 5.15 gereğince $\mathcal{L}$ dar lineer uzaydır. P6, Teorem 5.17, Teorem 5.18 ve Teorem 5.19 birleştirilerek

$$\upsilon \geq (\upsilon_1-1)(\upsilon_2-1) + b(W) \geq n^2 + n + 1$$

bulunur. İki doğrunun özdeş olması veya hiçbir ortak noktalarının olmaması paralellik olarak adlandırılır. n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzayda paralelliğin n-doğruları üzerinde denk bir ilişki olduğu bu bölümde gösterilecektir.

Lineer uzayların temel dallarının gelişiminde önemli rotasyonda paralelliktir. Bu bölümde herhangi bir kısıtlı lineer uzayda, bir doğru kümesinin üzerinde paralelliğin denk bir ilişki olduğunu gösterilecektir.

Teorem 5.20: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel bir kısıtlı lineer uzay ise; bu durumda $\mathcal{L}$, bir sonlu afin düzlem veya bir yaklaşık demet olmadıkça her n-doğrusu en az bir (n+1)-doğru ile kesişir.

İspat: $\mathcal{L}$, bir sonlu afin düzlem veya bir yaklaşık demetten farklı olarak n. mertebeden karesel bir kısıtlı lineer uzay olsun. Teorem 5.18 den, $\upsilon_1 = n + 1$ ve $\upsilon + n \geq b$ olduğunu hatırlayalım. Kabul edelim ki n-doğrusu x_σ, (n+1)-doğrusu x_1 ile kesişmiyor. Sonra (n+1)-doğrularının sayısı c ve x_σ ın kesişmediği doğruların sayısı S_σ olsun. P3 den x_σ üzerindeki bütün noktaların derecesi en az n+2 dir. Ayrıca P4 den

$\upsilon + n - 1 \geq b - 1 \geq S_\sigma + (n + 1)n \geq (n + 1)n$

buradan $\upsilon \geq n^2 + 1$

elde edilir. Bundan başka Teorem 5.18 nin sonucundan dolayı $\upsilon \leq n^2 + n - 1$ dir. Buradan $S_\sigma \leq n$ eşitsizliği edilir. Öte yandan P3 den dolayı, x_σ üzerinde olmayan tüm noktaların derecesi n + 1 dir. Bu yüzden;

$$c(n + 1) + (b - c)n \geq \sum_\sigma \upsilon_\sigma$$

$$\sum_\alpha b_\alpha \geq n(n+2) + (p-n)(n+1)$$

dir. Böylece P1 den;

$$c \geq \upsilon + n - n^2 \geq n + 1$$

dir. O halde x_σ yı kesen en az bir (n+1)-doğru vardır.

Teorem 5.21: Eğer x_υ ve x_r kesişen ve her ikisi de x_σ ya paralel iki doğru ise

$$\sum_\alpha (b_\alpha - \upsilon_\upsilon - 1) r_{\sigma\alpha} \geq (\upsilon_r - 1)(\upsilon_\sigma - \upsilon_\upsilon + 1)$$

dir.

İspat: P3 ve P4 den; $\sum_{\alpha}(b_\alpha - \upsilon_\upsilon - 1)r_{\sigma\alpha}$ ifadesi x_σ ile kesişen (x_σ nın kendisi hariç) ve x_υ ile kesişmeyen doğruların sayısını verir. Şimdi P, x_υ ve x_r nin kesim noktası olsun. Bu durumda x_σ ve x_r yi kesen ve P den geçen υ_σ (υ_r - 1) doğru vardır. Hiçbiri P den geçmediğinden bu doğruların en fazla (υ_υ-1).(υ_r-1) tanesi x_υ ile de kesişir. Bu sebeple x_σ ve x_r ile kesişen ve x_υ ile kesişmeyen en azından (υ_r-1)(υ_σ – υ_υ + 1) doğruları vardır.

Sonuç: Eğer x_σ ve x_υ, k-doğruları ise, x_υ ve x_r birbiri ile kesişip her ikisi de x_σ ile kesişmiyorsa,

$$\sum_{\alpha}(b_\alpha - k - 1)r_{\sigma\alpha} \geq \upsilon_r - 1$$

olur.

Teorem 5.22: $\mathcal{L}$, n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. Bu durumda $\mathcal{L}$ nin Linn’s Cross olmadıkça n-doğrular kümesi üzerinde paralellik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: Paralellik bağıntısının yansıyan ve simetrik olduğu açıktır. Denklik bağıntısı olduğunu göstermek için sadece geçişli olduğunu göstermeliyiz. $\mathcal{L}$, Linn’s Cross dan farklı ve n. mertebeden karesel kısıtlı lineer uzay olsun. Paralelliğin kendi n-doğrular kümesi üzerinde geçişli olmadığını kabul edelim. Bu nedenle x_σ ve x_r, P de kesişsin ama her ikisi de x_α ile paralel olsun. Bundan dolayı b(υ) ≥ n + 1, $\mathcal{L}$ nin bir sonlu afin düzlem olamayacağını gösterir. $\mathcal{L}$, bir yaklaşık demette olamaz. Bu nedenle Teorem 5.18, 5.19 ve Teorem 5.18 in sonucundan bütün U_α için $\upsilon_1 = n + 1 \leq b_\alpha$ ve

$$\upsilon \leq n^2 + n + 1$$

dir. Üstelik Teorem 5.21 in sonucunda,

$$\sum_{\alpha}(b_\alpha - n - 1)r_{\sigma\alpha} \geq n - 1$$

dir. Teorem 5.20 den x_σ ile kesişen bir (n+1)-doğrusu vardır. y bir (n+1)-doğrusu olsun. Şimdi y nın x_σ üzerinde her noktası için de x_σ ile kesişmeyen en azından bir doğru vardır. (P3) den $S_\sigma \geq n$ dir.

Şimdi (P4) ü x_σ ya uygulayarak

$$\upsilon + n - 1 \geq b - 1 \geq n + n^2 + \sum_\alpha (b_\alpha - n - 1) r_{\sigma\alpha} \qquad (*)$$

$$\geq n^2 + 2n - 1$$

Bu nedenle, $\upsilon \geq n^2 + n$ olur.

Durum (i): x_σ bir (n+1)-noktası içerir. U_β bunun gibi bir nokta olsun. O halde, P2 yi U_σ ya uygulayarak

$$\upsilon - 1 = \upsilon_\sigma - 1 + \sum_{\pi \neq \sigma} (\upsilon_\pi - 1) r_{\pi\beta} \leq n - 1 + n(b_\beta - 1)$$

$$= n^2 + n - 1$$

Bu sebeple $\upsilon = n^2 + n$ ve yukarıdaki eşitsizlik bir eşitlik olur ki x_σ ile birlikte U_β dan geçen n(n+1)-doğruları olduğunu ifade eder. Bu nedenle U_β yı, υ ye birleştiren doğru, bir (n+1)-doğrusudur ki bunu x_π olarak isimlendirelim.

$$\sum_\alpha (b_\alpha - n - 1) r_{\sigma\alpha} \geq n - 1$$

olduğundan x_σ ile kesişip x_π ile kesişmeyen en az n-1 doğru vardır. P4 ü x_π ye uygulayarak,

$$b(\upsilon) \geq n + 2$$

olduğundan

$$\upsilon + n - 1 \geq b - 1 \geq S_\pi + n^2 + n + 1 \geq n^2 + 2n$$

bulunur. Bu durum , $\upsilon \geq n^2 + n + 1$ olduğunu gösterir ki bu da $\upsilon = n^2 + n$ ile çelişir.

Durum (ii): x_σ hiç (n+1)-noktası içermezse, bu durumda

$$\sum_\alpha (b_\alpha - n - 1) r_{\sigma\alpha} \geq n$$

ve yukarıda (*) da olduğu gibi (P4)

$$\upsilon + n - 1 \geq b - 1 \geq n^2 + 2n$$

olduğunu gösterir. Bu sebeple $\upsilon = n^2 + n + 1$ dir. $\upsilon_1 = n + 1$ olduğunda P2 den herhangi bir (n+1)-noktasının sadece (n+1)-doğruları üzerinde olduğunu gösterir. Bu sebeple x_υ nin her noktasından geçen x_υ nin kendisinden farklı en az bir doğru vardır ve bu doğru x_σ ile kesişmez. Bu nedenle $S_\sigma \geq n + 1$ dir.

Böylece, x_σ doğrusu için P4 den;

$$\upsilon + n - 1 \geq b - 1 \geq n + 1 + n^2 + \sum_{\alpha} (b_\alpha - n - 1) r_{\sigma\alpha}$$

$$\geq n^2 + 2n + 1$$

burada, $$\upsilon \geq n^2 + 2n + 1$$

olup sonuç olarak bu bir çelişki oluşturur.

KAYNAKLAR

Batten, L.M. 1986. Combinatorics of finite geometry. Cambridge University press,Cambridge.1-85

Bruck, R.H. 1963. Existence problems for classes of finite projective planes.Lecture notes ,Canadian Mathematics Congress, Saskatoon.

Buekenhout, F.1969 a.Une céractérisation des Espaces Affins Basée Sur la Notion de Droite.Math.2.111, 367-71

Kaya,R.,1992.Projektif Geometri. Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, No : 27

Keyif, M. , 1994. Lineer Uzaylar ve Projektif Düzlemler. Yüksek lisans tezi. Uludağ Üniversitesi, 80 s. , Bursa

Löwen, R. , Günter, F. , Hendrik , V.M. , 2003. Affine line systems in real vector spaces. Adv. in Geom., 59-74

Mertsöz, M. , 2003. Kısıtlı Lineer Uzaylar. Yüksek lisans Tezi. Osman Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 40 s. , Eskişehir

O'Connor, J.J. , Robertson, E.F. , 1996. Abstract Linear Spaces. Mac Tutor History of Mathematics, May.

P. de Witte, 1965. Combinatorial properties of finite plans, Doctoral Dissertation, University of Brussels.

Stevenson, F.W. , 1972. Projective Planes. W. H. Freeman an Company San Francisco.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ayşe Gülsüm BAŞPINAR

Doğum Yeri : Afyonkarahisar

Doğum Tarihi : 06.09.1979

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Afyonkarahisar Süper Lisesi, 1997

Lisans : Afyonkarahisar Kocatepe Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2001

Çalıştığı Kurum

Mehmet Çakmak Anadolu Lisesi 2007 Matematik Öğretmeni