BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVLERİ HARMONİK h-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve KULE

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran, 2018

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVLERİ HARMONİK h-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Merve KULE

Danışman
Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2018

TEZ ONAY SAYFASI

Merve KULE tarafından hazırlanan "Birinci Mertebeden Türevleri Harmonik h-Konveks olan Fonksiyonlar için Bazı Yeni Hermite Hadamart Tipli Eşitsizlikler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 27/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

İmza

Başkan :Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi ....

Üye :Doç. Dr. Umut Mutlu ÖZKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi ....

Üye :Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi ....

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
........./......../........ tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

27/06/2018

Merve KULE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN TÜREVLERİ HARMONİK h-KONVEKS OLAN FONKSİYONLAR İÇİN BAZI YENİ HERMİTE-HADAMARD TİPLİ EŞİTSİZLİKLER

Merve KULE

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ

Bu tezde, türevlenebilir fonksiyonlar için yeni bir integral özdeşliği elde ettik. Bununla birlikte, yeni ve bilinen harmonik konveks fonksiyonlarının sınıfını birleştiren, harmonik h-konveks olarak da bilinen fonksiyonlarda birinci türevleri harmonik h-konveks olan fonksiyonlar için integral özdeşliğini kullanarak bazı yeni Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu tezde, birinci ve ikinci çeşit harmonik s-konveks ve harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonlarının da özellikleri incelendi ve bazı özel durumları da ayrıca ele alındı. Buradan yapılan çıkarımlar, önceki çalışmalarda harmonik konveks fonksiyonların sınıfları için elde edilmiş olan sonuçları desteklemektedir.

2018, v + 48 sayfa

Anahtar Kelimeler: Harmonik konveks küme, Harmonik konveks fonksiyon, Harmonik h-konveks fonksiyon.

ABSTRACT
M.Sc. Thesis

SOME NEW HERMITE-HADAMARD TYPE INEQUALITIES FOR WHOSE FİRST DERİVATİVES ARE HARMONİCALLY h-CONVEX FUNCTIONS

Merve KULE

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Mehmet Eyüp KİRİŞ

In this thesis, we derived a new integral identity for differentiable functions.
However, some new Hermite-Hadamard type inequalities have been obtained by using the integral identity for functions whose first derivatives are harmonic h-convex in functions known as harmonic h-convex, which unifies the class of new and known harmonically convex functions. Moreover, in this thesis, the properties of first and second kind harmonically s-convex and harmonically s-Godunova-Levin functions are studied and some special cases are also dealt. Inferences made here support the results obtained for classes of harmonically convex functions in previous studies.

2018, v + 48 pages

Keywords: Harmonic convex set, Harmonic convex function, Harmonic h-convex function.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmanın konusu, deneysel çalışmaların yönlendirilmesi, sonuçların değerlendirilmesi ve yazımı aşamasında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Mehmet Eyüp KİRİŞ' e, araştırma ve yazım süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA' ya, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu araştırma boyunca maddi ve manevi desteklerinden dolayı eşim Ahmet KULE' ye, ve aileme teşekkür ederim.

Merve KULE
AFYONKARAHİSAR, 2018

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$L[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$	$[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\int_a^b$	Belirli integral
$\in$	Elemanıdır
f'	f Fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	f Fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
I	$\mathbb{R}$ içinde bir aralık
I^o	I nın içi
$\int$	İntegral operatörü
$\leq$	Küçük veya eşittir
$(\phi)_m$	Pochammer sembolü
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$\sum$	Toplam Operatörü

1. GİRİŞ

Konveks kümeler ve ilgili geometrik konular matematikçiler tarafından kullanılan 95 ana konudan biridir. Konvekslik, geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar (Bodur ve Buyukeken 2016). Son yıllarda, konveks fonksiyonların teorisi, optimizasyon ve ekonomi gibi teorik ve uygulamalı bilimlerin farklı alanlarındaki öneminden dolayı birçok araştırmacı tarafından özel ilgi görmüştür. Optimizasyon teorisinde, optimal çözümler için gerek ve yeter koşulların bulunması ve dualite teoremlerinin ispatı için ayırma teoremleri uygulanmaktadır. Bilindiği üzere, konveks kümelerin ayrılması için uygulanılan ayırma teoremlerinde hiper düzlemlerden yararlanılmaktadır. Klasik ayırma teoreminin, optimizasyon teorisinde uygulanabilmesi için problemlerin konvekslik koşulunu sağlaması gerekmektedir. Benzer olarak, çok kriterli optimizasyonda da Pareto noktalarını bulmak için klasik ayırma teoremlerinin uygulanması durumunda konvekslik şartı önemlidir (Kemalbay 2008).

Matematikte “eşitsizlik“ kelimesi iki farklı miktar arasında farklılığı ifade eder ve bu iki miktar arasında oran kurmak için kullanılır. Modern matematikte eşitsizlik her alanda önemli bir rol oynamaktadır. Fizik, mühendislik gibi birçok bilimsel alanda eşitsizlik sayesinde birçok yeni uygulamalar ortaya çıkmıştır. Bu sayede birçok araştırmacının dikkatini çekmiştir ve diğer bilim dallarıyla ilişkili olarak günümüze kadar gelmiştir. Eşitsizlik alanında en önemli eserlerden biri 1934 yılında Hardy, Littlewod ve Polya tarafından yazılan “Inequalities“ adlı kitaptır. Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili olan konvekslik kavramı beraber göz önünde bulundurularak birçok çalışma ve integral eşitsizlik elde edilmiştir. Bunun en önemli örneklerinden biri Ekim 1881 yılında Hermite’in (1822-1901) Journal Mathesis adlı dergiye gönderdiği konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir. Eşitsizlik üzerine yapılan çalışmalar yeni eşitsizlikler keşfetmek ve var olan klasik yaklaşımları güçlendirmeye dayanmaktadır. Modern eşitsizlik teorisi matematikte önemini yitirmeden derin temellere dayalı bir alan olarak gelişmektedir ve hala araştırmalarda önemli bir yer tutarak sonsuz bir branş olarak matematikte yer almaya devam etmektedir (Yıldız 2017).

2. LİTERATÜR BİLGİLERİ

Konvekslik, M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. Konveks fonksiyonların sistematik araştırmasına ilk olarak 19. yüzyılın sonlarında rastlanmasına rağmen, 20. yüzyılın ortalarında matematiğin önemli bir alanı olarak görülmeye başlanmıştır (Bodur ve Buyukeken 2016).

Konveks fonksiyonların klasik kavramları, yeni ve yenilikçi fikirleri kullanarak farklı yönlerde genişletildi ve yaygınlaştırıldı, bu çalışmalarla ilgili genelleştirmeler ve yeni sonuçlara Burai ve Hazy (2011), Cristescu ve Lupsa (2002), Cristescu vd. (2014), Dragomir (2014a, b), Dragomir ve Mond (1998), Dragomir vd. (1995), Godunova ve Levin (1985), Noor vd. (2013, 2014a, b, c, d), Shi ve Zhang (2013), Xi vd. (2013), Zhang vd. (2012, 2013) bakınız. Konveks fonksiyonların önemli bir genellemesi, Varošanec'in h-konveks fonksiyonlarının tanıtımıydı (Varošanec 2007). Iscan (2013), harmonik konveks fonksiyonlar olarak adlandırılan konveks fonksiyonların yeni bir sınıfını tanıttı. Bazı son araştırmalar ve harmonik konveks fonksiyonların uzantıları için Noor vd. (2014a, b), Zhang vd. (2013), Iscan (2013, 2015) bakınız. Konveks fonksiyonların teorisinin eşitsizlik teorisi ile yakından ilişkili olduğu bilinmektedir. Konveks fonksiyonlar için birçok bilinen eşitsizlik vardır. Literatürde yoğun bir şekilde incelenen eşitsizlik, Hermite (1883) ve Hadamard (1896) tarafından bağımsız olarak kanıtlanan Hermite-Hadamard eşitsizliği olmuştur. Bu eşitsizlik bir fonksiyonun konveks olması için gerekli ve yeterli koşullarına sahiptir.

Konveks terimini ilk olarak, Ch. Hermite (1822-1901) tarafından kullanılmıştır. Eşitsizlikler alanında daha fazla dikkate alınan, daha az önemli sonuçlar vardır ama maalesef Hermite'in temel çalışmaları sık sık onun orjinal yazar kimliği verilmeden belirtilmiştir. Bu bağlamda temel matematikte ilgi çeken/çekmekte olan Hermite-Hadamard Eşitsizliğinin geometrik yorumu ve çoğu uygulamasıyla konveks fonksiyonun ilk temel sonucu olduğunu söyleyebiliriz. Aynı zamanda klasik Hermite-Hadamard eşitsizliği şöyle sıralanıyor:

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $a < b$ ve $a, b \in I$ olsun.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Hermite-Hadamard integral eşitsizlik türleri hakkında faydalı bilgiler için, Cristescu vd. (2014), Dragomir (2014a, b), Dragomir ve Mond (1998), Dragomir ve Pearce (2000), Dragomir vd. (1995), Noor vd. (2013, 2014a, b, c, d, e), Sarikaya vd. (2008), Sarikaya vd. (2010), Shuang vd. (2013), Xi ve Qi (2013), Zhang vd. (2012, 2013a, b) çalışmalarına bakınız.

Bu devam eden araştırmayla harekete geçirilen harmonik konveks fonksiyonların harmonik h-konveks fonksiyonları denilen yeni bir sınıfını sunuyoruz.

h fonksiyonunun uygun seçimi için, harmonik s-konveks fonksiyonları, harmonik P-fonksiyonları, harmonik Godunova-Levin fonksiyonları ve harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonları gibi yeni harmonik konveks fonksiyon sınıfları elde edebileceği gösterilmiştir. Harmonik olarak h-konveks fonksiyonlar için birkaç yeni Hermite-Hadamard tipi eşitsizlik elde ediyoruz. Bazı özel durumlarda tartışılmıştır. Bu makalede kullanılan fikirler, teorik ve uygulamalı bilimlerdeki çeşitli dallarda harmonik h-konveks fonksiyonların yeni ve yenilikçi uygulamalarını bulmada ilgili okurlara ilham verebilir.

Temel kavramlar ve teoremler başlığı altında Tanım 3.1.6 dan sonraki kısımlar için Noor vd. (2015) tarafından yapılan çalışmadan yararlanıldı.

3. MATERYAL ve METOT

3.1 Temel Kavramlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1 $\forall x, y \in K$, $t \in [0,1]$ için $(1-t)x + ty \in K$ ise $K \subseteq \mathbb{R}$ kümesine klasik anlamda konveks küme denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.2 $\forall x, y \in K$, $t \in [0,1]$ için

$$f\left((1-t)x + ty\right) \leq (1-t) f(x) + tf(y)$$

ise $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.3 $\forall x, y \in \Omega$, için $\dfrac{xy}{tx + (1-t)y} \in \Omega$ ise $\Omega \subset \mathbb{R}_+$ kümesine harmonik konveks küme denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.4 $\forall x, y \in \Omega, t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq (1-t)\left(f(x)\right) + t\left(f(y)\right)$$

ise $f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna harmonik konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 3.1.5 $\forall x, y \in \Omega, t \in [0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx + (1-t)y}\right) \leq f(x)^{1-t} f(y)^{t}$$

ise $f : \Omega \subset \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna harmonik log-konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 2000).

Şimdi yeni kavramlar tanımlıyoruz.

Tanım 3.1.6 $\forall x,y\in I\,,t\in[0,1],\ s\in(0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le(1-t)^s f(x)+t^s f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.1.7 $\forall x,y\in I\,,t\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le f(x)+f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna harmonik P-fonksiyon denir.

Tanım 3.1.8 $\forall x,y\in I\,,t\in(0,1)$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le\frac{1}{1-t}f(x)+\frac{1}{t}f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna harmonik Godunova-Levin fonksiyon denir.

Tanım 3.1.9 $\forall x,y\in I\,,\ t\in(0,1),\ s\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le\frac{1}{(1-t)^s}f(x)+\frac{1}{t^s}f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon denir.

Yukarıdaki kavramları birleştirmek için, harmonik h-konveks fonksiyonların sınıfı aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1.10 $h:[0,1]\subseteq J\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I$, $t\in(0,1)$ için, $f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\le h(1-t)f(x)+h(t)f(y)$ ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna harmonik h-konveks fonksiyon denir.

$t=\frac{1}{2}$ için Jensen'in harmonik h-konveks fonksiyonuna veya harmonik-aritmetik (HA) h-konveks fonksiyonlara sahip olduğumuza dikkat edin.

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\leq h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(x)+f(y)\right]$$

Uyarı 3.1.1 Tanım 3.1.10 da $h(t)=t, h(t)=t^s, h(t)=1, h(t)=\frac{1}{t}$ ve $h(t)=\frac{1}{t^s}$ için fonksiyonların tanımları sırasıyla harmonik konveks, ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonlar, harmonik P-fonksiyonlar, harmonik Godunova-Levin fonksiyonlar ve ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonlar olduğu açıktır.

Harmonik s-konveks fonksiyonların ve harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonların birinci tür kavramları aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.1.11 $\forall x,y\in I$, $t\in[0,1]$, $s\in[0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq\left(1-t^s\right)f(x)+t^s f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon denir.

Tanım 3.1.12 $\forall x,y\in I$, $t\in(0,1)$, $s\in(0,1]$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq\frac{1}{\left(1-t^s\right)}f(x)+\frac{1}{t^s}f(y)$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonu denir.

Uyarı 3.1.2 Burada birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonun ve birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon kavramlarının harmonik h-konvekslik sınıflarında yer almadığından bahsetmek gerekir.

Tanım 3.1.13 $h:[0,1]\subseteq J\to\mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. $\forall x,y\in I$, $t\in(0,1)$ için

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq f(x)^{h(1-t)}f(y)^{h(t)}$$

ise $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonuna harmonik log-h-konveks fonksiyon denir (Noor *et al*. 2014).

Iscan (2013), harmonik konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipi eşitsizliğini aşağıdaki şekilde vermiştir.

Teorem 3.1.1 $f:\Omega\subset\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon ve $a,b\in\Omega$, $a<b$ olsun. $f\in L[a,b]$ ise

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

İspat: $f:I\to\mathbb{R}$ harmonik konveks fonksiyon olduğundan, $x,y\in I$ için (Tanım 2.4 deki eşitsizlikte $t=\frac{1}{2}$ için)

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq(1-t)(f(x))+t(f(y))$$

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right)\leq\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

olur. $x=\dfrac{ab}{ta+(1-t)b},y=\dfrac{ab}{tb+(1-t)a}$ olarak seçersek

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}.$$

Ayrıca $t\in[0,1]$ için integral alırsak, $x=\dfrac{ab}{tb+(1-t)a}$ için $dx=\dfrac{-ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2}dt$

dönüşümü yapılırsa

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt\right]$$

bulunur. Dolayısıyla integrallerin her biri $\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$ eşit olduğundan $f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$ elde edilir. Böylece, teoremin sol tarafının ispatı tamamlanmış olur.

Teoremin sağ tarafının ispatı için Tanım 3.1.4 de $x=a$, $y=b$ ve $t\in[0,1]$ için integral alarak

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) &\leq(1-t)\,f(x)+tf(y)\\
f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) &\leq(1-t)\,f(a)+tf(b)\\
\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt &\leq\int_0^1(1-t)\,f(a)dt+\int_0^1 tf(b)dt\\
\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx &\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla teoremin sağ tarafı da sağlanır.

Şimdi, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun $f(x)=1$ olduğunu düşünelim. Böylece, $x,y\in(0,\infty)$ ve $t\in[0,1]$ için

$$1=f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\Leftrightarrow(1-t)f(x)+tf(y)=1$$

olur. Bu nedenle f ,$(0,\infty)$ üzerine harmonik konvekstir. Ayrıca

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)=1,\ \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx=1 \text{ ve } \frac{f(a)+f(b)}{2}=1$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Iscan'ın (2013) şu sonucu bazı kişilerin sonuçlarının gelişiminde önemli bir rol oynamaktadır.

Lemma 3.1.1 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o (I nın içi) üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. $f' \in L[a,b]$ ise

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx = \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt.$$

İspat: Basitlik için

$$I^* = \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-2t)\frac{ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$

Burada,

$1-2t = u$ ve $\frac{ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt = dv$ kısmi integrasyon uygulanırsa

$$I^* = \frac{(2t-1)}{2} f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\Bigg|_0^1 - \int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$

elde ederiz. Buradan da

$$x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}, dx = \frac{-ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2}dt = \frac{-x^2(b-a)}{ab}dt$$

dönüşümü yapılarak

$$I^* = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Tanım 3.1.14 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$ ise f ve g fonksiyonlarına senkronize fonksiyonlar denir (Varosanec 2007).

Uyarı 3.1.3 Aksi belirtilmediği sürece, bu bölüm boyunca $h\left(\frac{1}{2}\right)\neq 0$, $I\subset\mathbb{R}_+$ bir aralık ve I^o, I 'nın iç kısmı olacaktır.

Önerme 3.1.1 f ve g harmonik h-konveks iki fonksiyon olsun. Benzer şekilde f ve g senkronize fonksiyonlar ve $h(t)+h(1-t)\leq 1$ ise, fg çarpımı da harmonik konveks fonksiyondur.

İspat: f ve g harmonik konveks fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
& f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)g\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)\leq\left[h(1-t)f(a)+h(t)f(b)\right]\left[h(1-t)g(a)+h(t)g(b)\right] \\
&=\left[h(1-t)\right]^2 f(a)g(a)+h(t)h(1-t)\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]+\left[h(t)\right]^2 f(b)g(b) \\
&\leq\left[h(1-t)\right]^2 f(a)g(a)+h(t)h(1-t)\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]+\left[h(t)\right]^2 f(b)g(b) \\
&=\left[h(1-t)f(a)g(a)+h(t)f(b)g(b)\right]\left[h(t)+h(1-t)\right] \\
&\leq h(1-t)f(a)g(a)+h(t)f(b)g(b)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Buradan harmonik h-konveks iki fonksiyonun çarpımının harmonik h-konveks olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.2 $a,b\in I$ ve $a<b$ için $f:I\to\mathbb{R}$ harmonik h-konveks fonksiyon olsun. $f\in L[a,b]$ ise

$$
\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)}f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\leq\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\leq\left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 h(t)dt.
$$

İspat: f harmonik h-konveks fonksiyon olduğundan

$$
f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)\leq h(1-t)f(x)+h(t)f(y).
$$

yazılır. Burada $t=\frac{1}{2}$ için

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f(x)+f(y)\right]$$

olur. Böylece, $x = \dfrac{ab}{ta+(1-t)b}$ ve $y = \dfrac{ab}{tb+(1-t)a}$ değerleri için

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le h\left(\frac{1}{2}\right)\left[f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right]$$

elde edilir. Yukarıda ki eşitsizliğin her iki tarafını t, [0,1] kadar integralini alırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2h\left(\frac{1}{2}\right)} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) &\le \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \\
&= \int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt \\
&\le \int_0^1 h(1-t)\, f(a)\,dt + \int_0^1 h(t)\, f(b)\,dt \quad \text{t=1/2 için} \\
&\le \left[f(a)+f(b)\right]\int_0^1 h(t)\,dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bazı özel durumları tartışıyoruz.

I. Eğer $h(t) = t^s$ ise Teorem 3.1.2 aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1 $a,b \in I$, $a < b$ ve $s \in [0,1]$ için $f : I \to \mathbb{R}$ ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon olsun. $f \in L[a,b]$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \le \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \le \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.$$

II. Eğer $h(t) = 1$ ise Teorem 3.1.2 aşağıdaki sonuca daralır.

Sonuç 3.1.2 $a,b\in I\,,a<b$ için $f:I\to\mathbb{R}$ harmonik P-fonksiyon olsun. $f\in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{2}f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\le\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\le f(a)+f(b).$$

III. Eğer $h(t)=t^{-s}$ ise o zaman şu sonuca varılır.

Sonuç 3.1.3 $a,b\in I$, $a<b$ ve $s\in[0,1)$ için $f:I\to\mathbb{R}$ ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon olsun. $f\in L[a,b]$ ise

$$\frac{1}{2^{s+1}}f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\le\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\le\frac{f(a)+f(b)}{1-s}.$$

Ortaya çıkan sonuç, harmonik konveks iki fonksiyonun çarpımı için Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Teorem 3.1.3 $a,b\in I$, $a<b$ için $f,g:I\to\mathbb{R}$ harmonik konveks iki fonksiyon olsun. $fg\in L[a,b]$ ise

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)g(x)}{x^2}\right)dx\le M(a,b)\int_0^1\left(h(t)\right)^2dt+N(a,b)\int_0^1h(t)h(1-t)dt,$$

Burada

$$M(a,b)=f(a)g(a)+f(b)g(b)$$

$$N(a,b)=f(a)g(b)+f(b)g(a) \qquad \textbf{(3.2)}$$

İspat: $f,g:I\to\mathbb{R}$ harmonik h-konveks fonksiyonlar olsun. O zaman $x=\dfrac{ab}{ta+(1-t)b}$ için $dx=\dfrac{ab(b-a)}{\left(ta+(1-t)b\right)^2}dt$ olur. Denklemde yazarsak

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)g(x)}{x^2}\right)dx=\frac{ab}{b-a}\int_0^1\frac{f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)g\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{\frac{(ab)^2}{\left(ta+(1-t)b\right)^2}}\cdot\frac{ab(b-a)}{\left(ta+(1-t)b\right)^2}dt$$

$$=\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)g\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt$$

$$\le\int_0^1\left[h(1-t)f(a)+h(t)f(b)\right]\cdot\left[h(1-t)\,\mathrm{g}(a)+h(t)g(b)\right]dt$$

$$\le f(a)g(a)\int_0^1\left[h(1-t)\right]^2dt+f(a)g(b)\int_0^1 h(1-t)h(t)dt$$

$$+f(b)g(a)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt+f(b)g(b)\int_0^1\left[h(t)\right]^2dt$$

$t=\dfrac{1}{2}$ için $h(1-t)=h(t)$ olduğundan

$$=\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1\left[h(t)\right]^2dt$$

$$+\left[f(a)g(b)+f(b)g(a)\right]\int_0^1 h(1-t)h(t)dt$$

$$=M(a,b)\int_0^1\left(h(t)\right)^2dt+N(a,b)\int_0^1 h(t)h(1-t)dt$$

dır. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.4 Teorem 3.1.3 koşulları altında, f ve g benzer şekilde düzenlenmiş fonksiyonlar ise, $M(a,b)$, (3.2) ile verilmek üzere,

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)g(x)}{x^2}\right)dx\le M(a,b)\int_0^1 h(t)dt,$$

dır.

İspat:

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b\left(\frac{f(x)g(x)}{x^2}\right)dx=\frac{ab}{b-a}\int_0^1\frac{f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)g\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{\frac{(ab)^2}{\left(ta+(1-t)b\right)^2}}\cdot\frac{ab(b-a)}{\left(ta+(1-t)b\right)^2}dt$$

$$=\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)g\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left[h(1-t)f(a)+h(t)f(b)\right]\cdot\left[h(1-t)\mathrm{g}(a)+h(t)g(b)\right]dt$$

$$=\int_0^1\left(\left[h(1-t)\right]^2 f(a)g(a)+h(1-t)h(t)f(a)g(b)+h(t)h(1-t)f(b)\mathrm{g}(a)+\left[h(t)\right]^2 f(b)g(b)\right)dt$$

$$=\int_0^1\left(\left[h(1-t)\right]^2 f(a)g(a)+h(1-t)h(t)\left[f(a)g(b)+f(b)\mathrm{g}(a)\right]+\left[h(t)\right]^2 f(b)g(b)\right)dt$$

$$\leq\int_0^1\left(\left[h(1-t)\right]^2 f(a)g(a)+h(1-t)h(t)\left[f(a)g(a)+f(b)\mathrm{g}(b)\right]+\left[h(t)\right]^2 f(b)g(b)\right)dt$$

$$=\int_0^1\left[h(1-t)f(a)g(a)+h(t)f(b)g(b)\right]\left[h(t)+h(1-t)\right]dt$$

$$\leq\int_0^1\left[h(1-t)f(a)g(a)+h(t)f(b)g(b)\right]dt$$

$t=\frac{1}{2}$ için $h(1-t)=h(t)$ olduğundan

$$=\int_0^1\left[h(t)f(a)g(a)+h(t)f(b)g(b)\right]dt$$

$$=\left[f(a)g(a)+f(b)g(b)\right]\int_0^1 h(t)dt$$

$$=M(a,b)\int_0^1 h(t)dt$$

olarak elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.1 kullanılarak bir sonraki sonuçlar kanıtlanır.

Teorem 3.1.5 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q\geq 0$ için harmonik h-konveks fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq\frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-1/q}\left(\alpha_2|f'(a)|^q+\alpha_3|f'(b)|^q\right)^{1/q}.$$

Burada, sırasıyla

$$\alpha_1=\frac{1}{ab}-\frac{2}{(b-a)^2}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right)\tag{3.3}$$

$$\alpha_2=\int_0^1\frac{|1-2t|h(t)}{(tb+(1-t)a)^2}dt\tag{3.4}$$

$$\alpha_3=\int_0^1\frac{|1-2t|h(1-t)}{(tb+(1-t)a)^2}dt\tag{3.5}$$

dır.

İspat: Lemma 3.1.1, kuvvet eşitsizliği ve $|f'|^q$ harmonik h-konveks fonksiyon olmasını kullanarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq\frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2}\left[h(t)|f'(a)|^q+h(1-t)|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\alpha_2|f'(a)|^q+\alpha_3|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada $\alpha_1=\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|dt=\int_0^{1/2}\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}dt+\int_{1/2}^1\frac{2t-1}{(tb+(1-t)a)^2}dt$

$tb+(1-t)a=u$ ve $dt=\frac{1}{b-a}du$ dönüşümü uygularsak

$$\alpha_1 = \frac{1}{ab} - \frac{2}{(b-a)^2} \ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab} \right)$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.4 Teorem 3.1.5 koşulları altında, $q=1$ ise,

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \le \frac{ab(b-a)}{2} \left(\alpha_2 \left| f'(a) \right| + \alpha_3 \left| f'(b) \right| \right).$$

Burada α_2, α_3 sırasıyla (3.4) ve (3.5) tir.

Teorem 3.1.5 de $h(t)=t^s$ alınırsa, ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonlar için sonuç çıkarılır.

Sonuç 3.1.5 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \ge 0$ için ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \le \frac{ab(b-a)}{2} \alpha_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\kappa_1 \left| f'(a) \right|^q + \kappa_2 \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada α_1, (3.3) de verilmiştir ve sırasıyla

$$\kappa_1 = \int_0^1 \frac{|1-2t| t^s}{(tb+(1-t)a)^2} dt$$

$$\kappa_2 = \int_0^1 \frac{|1-2t| (1-t)^s}{(tb+(1-t)a)^2} dt \qquad \textbf{(3.6)}$$

dır.

Teorem 3.1.6 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \ge 0$ için birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \right| \le \frac{ab(b-a)}{2} \alpha_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\kappa_1 \left| f'(a) \right|^q + (\alpha_1 - \kappa_1) \left| f'(b) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada α_1 ve κ_1 sırasıyla (3.3) ve (3.6) da verilmiştir.

İspat: Lemma 3.1.1, kuvvet eşitsizliği ve $|f'|^q$ birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon olmasını kullanarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \left|\frac{1-2t}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}\left[t^s\left|f'(a)\right|^q+(1-t^s)\left|f'(b)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt+\left|f'(b)\right|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|(1-t^s)}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_1\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt-\left|f'(b)\right|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_1\left|f'(a)\right|^q+\left(\alpha_1-\kappa_1\right)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5 de $h(t)=1$ olursa, harmonik P-fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.6 $f: I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q\ge 0$ için harmonik P-fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada α_1, (3.3) de verilmiştir.

Teorem 3.1.5 de $h(t)=t^s$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.7 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 0$ için ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \leq \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_1|f'(a)|^q+\lambda_2|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada α_1, (3.3) de verilmiştir ve sırasıyla

$$\lambda_1=\int_0^1 \frac{|1-2t|t^{-s}}{(tb+(1-t)a)^2}dt$$

$$\lambda_2=\int_0^1 \frac{|1-2t|(1-t)^{-s}}{(tb+(1-t)a)^2}dt \tag{3.7}$$

dır.

Teorem 3.1.7 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $q \geq 0$ için birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \leq \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_1|f'(a)|^q+\lambda_2^*|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada α_1 ve λ_1 sırasıyla (3.3) ve (3.7) de verilmiştir ve

$$\lambda_2^*=\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2(1-t^s)}dt \approx \alpha_1+\kappa_1.$$

İspat: Lemma 3.1.1, kuvvet eşitsizliği ve $|f'|^q$ birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon olmasını kullanarak

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \leq \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2}\left[\frac{|f'(b)|^q}{(1-t^s)}+\frac{|f'(a)|^q}{t^s}\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(\mathrm{b})|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2(1-t^s)}dt+|f'(a)|^q\int_0^1 \frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2 t^s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q\lambda_1+|f'(b)|^q\lambda_2^*\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.8 $f: I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için harmonik h-konveks ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_4|f'(a)|^q+\alpha_5|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada sırasıyla, $\alpha_4=\int_0^1 \frac{h(t)}{(tb+(1-t)a)^{2q}}dt$ ve $\alpha_5=\int_0^1 \frac{h(1-t)}{(tb+(1-t)a)^{2q}}dt$

dır.

İspat: Lemma 3.1.1, Holder'in eşitsizliğini ve $|f'|^q$ harmonik h-konveks fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|\leq \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\frac{1}{(tb+(1-t)a)^{2q}}\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\frac{1}{(tb+(1-t)a)^{2q}}\left\{h(t)|f'(a)|^q+h(1-t)|f'(b)|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_4\left|f'(a)\right|^q+\alpha_5\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada $\int_0^1 |1-2t|^p\,dt=\int_0^{1/2}(1-2t)^p\,dt+\int_{1/2}^1(2t-1)^p\,dt$

$1-2t=u$ ve $dt=-\frac{1}{2}du$ dönüşümü uygularsak

$$\int_0^1 |1-2t|^p\,dt=\int_0^{1/2}(1-2t)^p\,dt+\int_{1/2}^1(2t-1)^p\,dt=\frac{1}{p+1}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.8 de $h(t)=t^s$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.8 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le\frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_1\left|f'(a)\right|^q+\vartheta_2\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada sırasıyla

$$\vartheta_1=\int_0^1\frac{t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt=\frac{a^{-2q}\,{}_2F_1\left[2q,1+s,2+s,1-\frac{b}{a}\right]}{1+s},$$

$$\vartheta_2=\int_0^1\frac{(1-t)^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt=\frac{a^{-2q}\,{}_2F_1\left[1,2q,2+s,1-\frac{b}{a}\right]}{1+s}$$

dır.

Teorem 3.1.9 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_1^*|f'(a)|^q+\vartheta_2^*|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada sırasıyla

$$\vartheta_1^* = \int_0^1 \frac{t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \frac{a^{-2q}\,{}_2F_1\left[2q,1+s,2+s,1-\frac{b}{a}\right]}{1+s},$$

$$\vartheta_2^* = \int_0^1 \frac{\left(1-t^s\right)}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \frac{bb^{-2q}-aa^{-2q}}{(b-a)(1-2q)}-\vartheta_1$$

dır.

İspat: Lemma 3.1.1, Hölder'in eşitsizliği ve $|f'|^q$ birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1\left|\frac{1-2t}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1|1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}\left\{t^s|f'(a)|^q+\left(1-t^s\right)|f'(b)|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_1^*|f'(a)|^q+\vartheta_2^*|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada

$$\vartheta_2^* = \int_0^1\frac{\left(1-t^s\right)}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \int_0^1\frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt-\int_0^1\frac{t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt$$

$tb+(1-t)a=u$ için $dt=\frac{1}{b-a}du$ dönüşümü uygularsak

$$\int_a^b \frac{1}{u^{2q}}\cdot\frac{1}{b-a}du-\int_0^1 \frac{t^s}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt \quad =\frac{1}{b-a}\int_a^b u^{-2q}du-\vartheta_1$$

$$=\frac{bb^{-2q}-aa^{-2q}}{(b-a)(1-2q)}-\vartheta_1$$

elde edilir.

Teorem 3.1.8 de $h(t)=1$ olursa harmonik P-fonksiyonlar için sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.9 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için harmonik P-fonksiyon ise,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{1}{q}}\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada,

$$\alpha=\int_0^1 \frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt=\frac{bb^{-2q}-aa^{-2q}}{(b-a)(1-2q)}.$$

Teorem 3.1.8 de $h(t)=t^{-s}$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.10 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f'\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right|\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1\left|f'(a)\right|^q+\varphi_2\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada sırasıyla

$$\varphi_1 = \int_0^1 \frac{t^{-s}}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \frac{a^{-2q}\ {}_2F_1\left[2q,1-s,2-s,1-\frac{b}{a}\right]}{1-s}$$

$$\varphi_2 = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-s}}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \frac{a^{-2q}\ {}_2F_1\left[1,2q,2-s,1-\frac{b}{a}\right]}{1-s} \tag{3.8}$$

dır.

Teorem 3.1.10 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f'|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1|f'(a)|^q + \varphi_2^*|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Burada φ_1, (3.8) de verilmiştir ve

$$\varphi_2^* = \int_0^1 \frac{(1-t)^{-s}}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt = \vartheta_1^* + \frac{bb^{-2q}-aa^{-2q}}{(b-a)(1-2q)}.$$

İspat: Lemma 3.1.1, Hölder'in eşitsizliği ve $|f'|^q$ birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx\right| \le \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \left|\frac{1-2t}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 \frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}\left\{\frac{1}{t^s}|f'(a)|^q + \frac{1}{(1-t)^s}|f'(b)|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'(a)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{t^{-s}}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt+\left|f'(b)\right|^{q}\int_{0}^{1}\frac{(1-t)^{-s}}{\left(tb+(1-t)a\right)^{2q}}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_{1}\left|f'(a)\right|^{q}+\varphi_{2}^{*}\left|f'(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

4. BULGULAR

Lemma 4.1 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o (I nın içi) üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve $a,b \in I$, $a<b$ olsun. $f'' \in L[a,b]$ ise

$$f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right]+\frac{\lambda}{b(b-a)}f(b)$$
$$-\frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2}f(a)+\frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b\frac{f(x)}{x^3}dx$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t(t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt.$$

İspat: Basitlik için

$$I^*=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t(t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$

olsun.

$$I_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t(t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$
$$I_2=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt$$

olsun. Kısmi integrasyon yardımıyla,

$\frac{ab}{tb+(1-t)a}=x$, $\frac{1}{(tb+(1-t)a)^2}dt=\frac{1}{ab(a-b)}dx$ ve $\frac{a(b-x)}{(b-a)x}=t$ için

$$I_1=\frac{1}{b^2(a-b)^3}\int_b^{\frac{2ab}{a+b}}\left(\frac{b}{x}-1\right)^2 xf''(x)dx-\frac{\lambda}{b(b-a)}\int_b^{\frac{2ab}{a+b}}(b-x)f''(x)dx$$

elde edilir. Buradan, $\left(\frac{b}{x}-1\right)^2 x=s$, $f''(x)dx=dt$ diyelim ve birinci integral için kısmi integrasyon yapalım. Benzer şekilde $b-x=S$, $f''(x)dx=dT$ diyelim ve ikinci integral için kısmi integrasyon yapalım. Dolayısıyla,

$$I_1 = f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]-f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{3a+b}{4a^2b^2(a-b)^2}+\frac{\lambda}{b(b-a)}\right]$$

$$+\frac{\lambda}{b(b-a)}f(b)+\frac{2}{(a-b)^3}\int_b^{\frac{2ab}{a+b}}\frac{f(x)}{x^3}dx$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{\left(tb+(1-t)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt \text{ için}$$

$$\frac{ab}{tb+(1-t)a}=x,\ \frac{1}{\left(tb+(1-t)a\right)^2}dt=\frac{1}{ab(a-b)}dx \text{ ve } \frac{a(b-x)}{(b-a)x}=t$$

diyelim, değişken dönüşümü yapalım. O halde

$$I_2=\frac{1-\lambda}{a^2b^2(a-b)}\int_{\frac{2ab}{a+b}}^{a}xf''(x)dx+\frac{2-\lambda}{ab^2(a-b)^2}\int_{\frac{2ab}{a+b}}^{a}(b-x)f''(x)dx+\frac{1}{b^2(a-b)^3}\int_{\frac{2ab}{a+b}}^{a}\left(\frac{b}{x}-1\right)^2xf''(x)dx$$

elde edilir. Birinci, ikinci ve üçüncü integraller için kısmi integrasyon yaparsak sonuçta

$$I_2 = f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda-1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}\right]+f(a)\left[\frac{-\lambda}{a^2b(a-b)^2}\right]$$

$$+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{4b\lambda-a-3b}{4a^2b^2(a-b)^2}\right]+\frac{2}{(a-b)^3}\int_{\frac{2ab}{a+b}}^{a}\frac{f(x)}{x^3}dx$$

bulunur. I_1 ve I_2 birleştirildiğinde istenilen sonuç elde edilmiş olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1 i kullanarak bir sonraki sonuçlar kanıtlanır.

Teorem 4.1 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için harmonik h-konveks fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$

$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\alpha_2\left|f''\left(a\right)\right|^q+\alpha_3\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\alpha_5\left|f''\left(a\right)\right|^q+\alpha_6\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dir. Burada, sırasıyla

$$\alpha_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt \tag{4.1}$$

$$\alpha_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|h\left(t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.2}$$

$$\alpha_3=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|h\left(1-t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.3}$$

$$\alpha_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt \tag{4.4}$$

$$\alpha_5=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|h\left(t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.5}$$

$$\alpha_6=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|h\left(1-t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.6}$$

dır.

İspat: Lemma 4.1, Hölder eşitsizliği ve $\left|f''\right|^q$ harmonik h-konveks fonksiyon olmasını kullanarak

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx\right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|^{\frac{1}{q}}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|^{\frac{1}{p}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|^{\frac{1}{q}}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}\right|\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{t(t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{|t(t-\lambda)|}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|}\left[h(t)|f''(a)|^q+h(1-t)|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{|(1-t)(1-t-\lambda)|}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|}\left[h(t)|f''(a)|^q+h(1-t)|f''(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\alpha_2|f''(a)|^q+\alpha_3|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\alpha_5|f''(a)|^q+\alpha_6|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1 Teorem 4.1 koşulları altında, $q=1$ ise,

$$\left|\begin{array}{l} f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right]+\frac{\lambda}{b(b-a)}f(b) \\ -\frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2}f(a)+\frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b\frac{f(x)}{x^3}dx \end{array}\right|$$

$$\le\left(\alpha_2|f''(a)|+\alpha_3|f''(b)|\right)+\left(\alpha_5|f''(a)|+\alpha_6|f''(b)|\right)$$

Burada $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6$ sırasıyla (4.2), (4.3), (4.4) ve (4.6) dür.

Teorem 4.1 de $h(t)=t^s$ alınırsa, ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonlar için sonuç çıkarılır.

Sonuç 4.2 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f''\in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $q\ge 0$ için ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx\right|$$

$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\kappa_2\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\kappa_4\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada α_1,α_4, sırasıyla (4.1) ve (4.4) da verilmiştir ve sırasıyla

$$\kappa_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.7}$$

$$\kappa_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|\left(1-t\right)^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt$$

$$\kappa_3=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt$$

$$\kappa_4=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|\left(1-t\right)^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt \tag{4.8}$$

dır.

Teorem 4.2 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f''\in L\left[a,b\right]$ olsun. Eğer $\left|f''\right|^q$, $q\geq 0$ için birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx\right|$$

$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(\alpha_1-\kappa_1\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(\alpha_4-\kappa_3\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada $\alpha_1,\alpha_4,\kappa_1$ ve κ_4 sırasıyla (4.1), (4.4), (4.7) ve (4.8) de verilmiştir.

İspat: Lemma 4.1, kuvvet eşitsizliği ve $|f''|^q$ birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon olmasını kullanarak

$$\begin{aligned}
&\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right)\right.\\
&\left.\quad-\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx\right|\\
&\le\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|\\
&\le\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|\\
&\le\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left[t^s\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(1-t^s\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad+\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left[t^s\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(1-t^s\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\le\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(\alpha_1-\kappa_1\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\kappa_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left(\alpha_4-\kappa_3\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece ispatı tamamlamış olduk.

Teorem 4.1 de $h\left(t\right)=1$ olursa, harmonik P-fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $q \geq 0$ için harmonik P-fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right]+\frac{\lambda}{b(b-a)}f(b) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2}f(a)+\frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b \frac{f(x)}{x^3}dx \right|$$
$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(|f''(a)|^q+|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada α_1 ve α_4 sırasıyla (4.1) ve (4.4) de verilmiştir.

Teorem 4.1 de $h(t)=t^s$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $q \geq 0$ için ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right]+\frac{\lambda}{b(b-a)}f(b) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2}f(a)+\frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b \frac{f(x)}{x^3}dx \right|$$
$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_1|f''(a)|^q+\lambda_2|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_3|f''(a)|^q+\lambda_4|f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Burada α_1 ve α_4 sırasıyla (4.1) ve (4.4) da verilmiştir ve sırasıyla

$$\lambda_1=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|t(t-\lambda)|t^{-s}}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|}dt \tag{4.9}$$

$$\lambda_2=\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{|t(t-\lambda)|(1-t)^{-s}}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|}dt$$

$$\lambda_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left|(1-t)(1-t-\lambda)\right| t^{-s}}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|} dt$$

$$\lambda_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left|(1-t)(1-t-\lambda)\right| (1-t)^{-s}}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right|} dt \tag{4.10}$$

dır.

Teorem 4.3 $f : I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a < b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $q \geq 0$ için birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab(a^2-b^2)} - \frac{\lambda}{a+b}\right] + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right] + \frac{\lambda}{b(b-a)} f(b) - \frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2} f(a) + \frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b \frac{f(x)}{x^3} dx \right|$$

$$\leq \alpha_1^{1-\frac{1}{q}} \left(\lambda_1 \left|f''(a)\right|^q + \lambda_2^* \left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \alpha_4^{1-\frac{1}{q}} \left(\lambda_3 \left|f''(a)\right|^q + \lambda_4^* \left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada $\alpha_1, \alpha_4, \lambda_1$ ve λ_4 sırasıyla (4.1), (4.4), (4.9) ve (4.10) da verilmiştir ve

$$\lambda_2^* = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\left|t(t-\lambda)\right|}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right| (1-t^s)} dt$$

$$\lambda_4^* = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\left|(1-t)(1-t-\lambda)\right|}{\left|(tb+(1-t)a)^3\right| (1-t^s)} dt$$

dır.

İspat: Lemma 4.1, kuvvet eşitsizliği ve $|f''|^q$ birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon olmasını kullanarak

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left|t\left(t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left[\frac{1}{t^s}\left|f''\left(a\right)\right|^q+\frac{1}{\left(1-t^s\right)}\left|f''\left(b\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3\right|}\left[\frac{1}{t^s}\left|f''\left(a\right)\right|^q+\frac{1}{\left(1-t^s\right)}\left|f''\left(b\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\alpha_1^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\lambda_2^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_4^{1-\frac{1}{q}}\left(\lambda_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\lambda_4^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

Teorem 4.4 $f:I\to\mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ ve $f''\in L\left[a,b\right]$ olsun. Eğer $\left|f''\right|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için harmonik h-konveks ise,

$$\left| \begin{array}{l} f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \\ -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \end{array} \right|,$$

$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_8\left|f''(a)\right|^q+\alpha_9\left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_{11}\left|f''(a)\right|^q+\alpha_{12}\left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada sırasıyla

$$\alpha_7=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t\left(t-\lambda\right)\right|^p dt \tag{4.11}$$

$$\alpha_8=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{h\left(t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

$$\alpha_9=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{h\left(1-t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

$$\alpha_{10}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|^p dt \tag{4.12}$$

$$\alpha_{11}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{h\left(t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

$$\alpha_{12}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{h\left(1-t\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

dır.

İspat: Lemma 4.1, Hölder'in eşitsizliğini ve $\left|f''\right|^q$ harmonik h-konveks fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t\left(t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t\left(t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left\{h\left(t\right)\left|f''\left(a\right)\right|^q+h\left(1-t\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left\{h\left(t\right)\left|f''\left(a\right)\right|^q+h\left(1-t\right)\left|f''\left(b\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_8\left|f''\left(a\right)\right|^q+\alpha_9\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\alpha_{11}\left|f''\left(a\right)\right|^q+\alpha_{12}\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 de $h\left(t\right)=t^s$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için ikinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$

$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\vartheta_2\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\vartheta_4\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada α_7,α_{10} sırasıyla (4.11), (4.12) de verilmiştir ve

$$\vartheta_1=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt\,,$$

$$\vartheta_2=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(1-t\right)^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt\,,$$

$$\vartheta_3=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt\,,$$

$$\vartheta_4=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

dır.

Teorem 4.5 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$
$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_1^*\left|f''\left(a\right)\right|^q+\vartheta_2^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\vartheta_3^*\left|f''\left(a\right)\right|^q+\vartheta_4^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada α_7, α_{10} sırasıyla (4.11), (4.12) de verilmiştir ve

$$\vartheta_1^*=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt,$$

$$\vartheta_2^*=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\left(1-t^s\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt,$$

$$\vartheta_3^*=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{t^s}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt,$$

$$\vartheta_4^*=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t^s\right)}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}dt$$

dır.

İspat: Lemma 4.1, Hölder'in eşitsizliği ve $\left|f''\right|^q$ birinci çeşit harmonik s-konveks fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \right.$$
$$\left. -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$
$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t(t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3} f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t)(1-t-\lambda)}{(tb+(1-t)a)^3} f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \right|$$

$$\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|} \left| f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|} \left| f''\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t(t-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|} \left\{ t^s |f''(a)|^q + (1-t^s) |f''(b)|^q \right\} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |(1-t)(1-t-\lambda)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|} \left\{ t^s |f''(a)|^q + (1-t^s) |f''(b)|^q \right\} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}} \left(\vartheta_1^* |f''(a)|^q + \vartheta_2^* |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \alpha_{10}^{\frac{1}{p}} \left(\vartheta_3^* |f''(a)|^q + \vartheta_4^* |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.4 de $h(t)=1$ olursa harmonik P-fonksiyonlar için sonuç elde edilir.

Sonuç 4.6 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için harmonik P-fonksiyon ise,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab(a^2-b^2)} - \frac{\lambda}{a+b}\right] + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right] + \frac{\lambda}{b(b-a)} f(b) \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2} f(a) + \frac{2}{(b-a)^3} \int_a^b \frac{f(x)}{x^3} dx \right|$$
$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}} \alpha_1^* \left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}} + \alpha_{10}^{\frac{1}{p}} \alpha_2^* \left(|f''(a)|^q + |f''(b)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada α_7, α_{10} sırasıyla (4.11), (4.12) de verilmiştir ve

$$\alpha_1^* = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left|\left(tb+(1-t)a\right)^{3q}\right|} dt ,$$

$$\alpha_2^* = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left|\left(tb+(1-t)a\right)^{3q}\right|} dt$$

dır.

Teorem 4.4 de $h(t) = t^{-s}$ olursa, ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyonları için sonuç elde edilir.

Sonuç 4.7 $f : I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için ikinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise

$$\left| \begin{array}{l} f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) \\ -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b \frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \end{array} \right|,$$

$$\leq \alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1\left|f''(a)\right|^q+\varphi_2\left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_3\left|f''(a)\right|^q+\varphi_4\left|f''(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada α_7, α_{10} sırasıyla (4.11), (4.12) de verilmiştir ve

$$\varphi_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^{-s}}{\left|\left(tb+(1-t)a\right)^{3q}\right|} dt \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$\varphi_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-t)^{-s}}{\left|\left(tb+(1-t)a\right)^{3q}\right|} dt$$

$$\varphi_3 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t^{-s}}{\left|\left(tb+(1-t)a\right)^{3q}\right|} dt \qquad \textbf{(4.14)}$$

$$\varphi_4 = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{(1-t)^{-s}}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|} dt$$

dır.

Teorem 4.6 $f: I \to \mathbb{R}$, I^o da ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyon, $a,b \in I$, $a<b$ ve $f'' \in L[a,b]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>1$ için birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon ise

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab(a^2-b^2)} - \frac{\lambda}{a+b}\right] + f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2(a-b)^2}\right] + \frac{\lambda}{b(b-a)} f(b) \right.$$
$$\left. - \frac{\lambda}{a^2b(a-b)^2} f(a) + \frac{2}{(b-a)^3}\int_a^b \frac{f(x)}{x^3}dx \right|$$
$$\le \alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1 |f''(a)|^q + \varphi_1^* |f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_3 |f''(a)|^q + \varphi_3^* |f''(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Burada $\alpha_7, \alpha_{10}, \varphi_1$ ve φ_3 sırasıyla (4.11), (4.12), (4.13) ve (4.14) da verilmiştir ve

$$\varphi_1^* = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|(1-t^s)} dt \ ,$$

$$\varphi_2^* = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\left|(tb+(1-t)a)^{3q}\right|(1-t^s)} dt$$

dır.

İspat: Lemma 4.1, Hölder'in eşitsizliği ve $|f''|^q$ birinci çeşit harmonik s-Godunova-Levin fonksiyon olmasını kullanarak,

$$\left| f'\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{2\lambda+1}{2ab\left(a^2-b^2\right)}-\frac{\lambda}{a+b}\right]+f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\left[\frac{b\lambda-b-a}{a^2b^2\left(a-b\right)^2}\right]+\frac{\lambda}{b\left(b-a\right)}f\left(b\right) -\frac{\lambda}{a^2b\left(a-b\right)^2}f\left(a\right)+\frac{2}{\left(b-a\right)^3}\int_a^b\frac{f\left(x\right)}{x^3}dx \right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t\left(t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|+\left|\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)}{\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^3}f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)dt\right|$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t\left(t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left|f''\left(\frac{ab}{tb+\left(1-t\right)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t\left(t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left\{\frac{1}{t^s}\left|f''\left(a\right)\right|^q+\frac{1}{\left(1-t^s\right)}\left|f''\left(b\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|\left(1-t\right)\left(1-t-\lambda\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left|\left(tb+\left(1-t\right)a\right)^{3q}\right|}\left\{\frac{1}{t^s}\left|f''\left(a\right)\right|^q+\frac{1}{\left(1-t^s\right)}\left|f''\left(b\right)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\alpha_7^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_1\left|f''\left(a\right)\right|^q+\varphi_1^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\alpha_{10}^{\frac{1}{p}}\left(\varphi_3\left|f''\left(a\right)\right|^q+\varphi_3^*\left|f''\left(b\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Son bölümde ilk olarak harmonik h-konveks fonksiyon kavramını verdikten sonra bu fonksiyon yardımıyla Hermite-Hadamard tipli yeni eşitsizlik elde ettik.

Ayrıca elde etmiş olduğumuz bu sonuçlar çeşitli yollarla daha da genelleştirilebilir. Dolayısıyla bunlar açık problemler olarak bırakıyoruz.

6. KAYNAKLAR

P. Burai, A. Hazy, On approximately h-convex functions, *J. Convex Anal.* **18(2):** 447-454, (2011).

B. Bodur, Hermite-Hadamard type inequalities for stochastic processes and φ- convex functions, (2016).

M. Buyukeken, On some generalized integral inequalities for φ-convex functions, (2014).

G. Cristescu, L. Lupsa, Non-connected Convexities and Applications, *Kluwer Academic Puplishers,* Dordrecht, Holland, 2002.

G. Cristescu, M. A. Noor, M. U. Awan, Bounds of the second degree cumulative frontier gaps of functions with generalized convexity, *Carpath. J. Math*, **30(2)**, (2014).

S. S. Dragomir, Inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces, *preprint*, (2014).

S. S. Dragomir, n-points inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces, *preprint*, (2014).

S. S. Dragomir, B. Mond, Integral inequalities of Hadamard's type for $\log$-convex functions, *Demonstration Math*. **2:** 354-364, (1998).

S. S. Dragomir, C. E. M. Pearce, Selected topics on Hermite-Hadamard inequalities and applications, Victoria University, Australia (2000).

S. S. Dragomir, J. Pečarić and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type, *Soochow J. Math*, **21:** 335-341, (1995).

E. K. Godunova and V. I. Levin, Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, soderzascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii. *Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezvuzov. Sb. Nauc.* Trudov, MGPI, Moskva. 138-142, (1985).

A. Hazy, Bernstein-Doetsch type results for h-convex functions, *Math. Inequal. Appl.* **14(3):** 499-508, (2011).

I. Iscan, Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions, avaliable online at http://arxiv.org/abs/1303.6089.

I. Iscan, Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically (α, m)-convex functions, avaliable online at http://arxiv.org/abs/1307.5402.

I. Iscan, Hermite- Hadamard and Simpson-like type inequalities for differentiable harmonically convex functions, *J. Math. Article ID 346305*, 10 pages, (2014).

A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo: Theory and applications of fractional differential equations, *Elsevier B. V.*, Amsterdam, Netherlands, (2006).

G. Kemalbay, Nonconvex multicriteria optimization and portfolio selection problem, İstanbul, (2008).

M. A. Noor, M. U. Awan, K. I. Noor, On some inequalities for relative semi-convex functions, *J. Ineqal. Appl.* 2013, **2013:** 332.

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, Geometrically relative convex functions, *Appl. Math. Infor. Sci.*, **8(2):** 607-616, (2014).

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, Hermite-Hadamard inequalities for relative semi-convex functions and applications, *Filomat*, **28(2):** 221-230, (2014).

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, Some characterizations of harmonically log-convex functions, *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, **17(1):** 51-61, (2014).

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, Some integral inequalities for harmonically logarithmic h-convex functions, *preprint*, (2014).

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, S. Khan, Fractional Hermite-Hadamard inequalities for some new classes of Godunova-Levin functions, *Appl. Math. Infor. Sci.*, **8(6)**, (2014).

M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan, S. Costache, Some integral inequalities for harmonically h-convex functions, *U. P. B. Sci. Bull.*, Series A., **77(1):** 5-16, (2015).

Jaekeun Park, Some inequalities for twice differentiable harmonically quasi-convex functions, *International Journal of Mathematical Analysis*, **7:** 327-339, (2015).

M. Z. Sarikaya, A. Saglam, H. Yildirim, On some Hadamard-type inequalities for h-convex functions, *Jour. Math. Ineq.*, **2(3):** 335-341, (2008).

M. Z. Sarikaya, E. Set, M. E. Özdemir, On some new inequalities of Hadamard type involving h-convex functions, *Acta Math. Univ. Comenianae*, **2:** 265-272, (2010).

H.-N Shi, J. Zhang, Some new judgement theorems of Schur geometric and Schur harmonic convexities for a class of symmetric functions, *J. Inequal. Appl.*, 2013, **2013:** 527.

Y. Shuang, H-P. Yin and F. Qi, Hermite-Hadamard type integral inequalities for geometric-arithamatically s-convex functions, *Analysis*, **33:** 197-208, (2013).

K. Yıldız, Integral inequalities for geometric-arithmetic convex and geometric-geometric convex function classes, (2017).

S. Varosanec, On h-convexity, *J. Math. Anal. Appl.*, **326:** 303-311, (2007).

Bo-Yan Xi, Feng Qi, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions, *Adv. Inequal. Appl.*, **2(1):** 1-15, (2013).

B.-Y Xi, S.-H Wang, F. Qi, Properties and inequalities for the h- and (h,m)-logarithmically convex functions, *Creat. Math. Inform.*, **22(2)**, (2013).

T.-Y Zhang, A.-P. Ji, F. Qi, Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for harmonically quasi-convex functions, *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, **16(3):** 399-407, (2013).

T.-Y Zhang, A.-P. Ji and F. Qi, On integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-geometrically convex functions, *Abst. Appl. Anal.*, 2012, *Article ID 560586,* 14 pages.

T.-Y Zhang, A.-P. Ji and F. Qi, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for GA-convex functions with applications to means, *Le Matematiche vol. LXVIII* (2013)-Fasc. I, pp. 229-239 doi: 10.4418/2013.68.1.17.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Merve KULE
Doğum Yeri ve Tarihi	: Uşak, 12.08.1992
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Telefon/e-posta)	:05061401497/merve.ozdmr.03@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise	:	Zafer Anadolu Lisesi, (2006-2010)
Lisans	:	Uludağ Üniversitesi, Matematik Bölümü, (2010-2014)
Pedagojik Formasyon	:	Afyon Kocatepe Üniversitesi (2014-2015)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : Bursa Sayısal Mod Matematik Öğretmeni (28 Mart 2013-30 Mayıs 2013)

Afyon Final Dergisi Dershanesi Matematik Öğretmeni (30 Ağustos 2014-17 Ekim 2014)

Afyon Anadolu İmam Hatip Lisesi Stajyer Matematik Öğretmeni (24 Eylül 2014-24 Aralık 2014)

Şuhut Halk Eğitim Merkezi Matematik Öğretmeni (18 Kasım 2014-5 Mart 2015)

Şuhut Halk Eğitim Merkezi Matematik-Geometri Öğretmeni (13 Ekim 2015-16 Haziran 2017)

Afyon Kocatepe Üniversitesi Şuhut Meslek Yüksek Okulu Matematik Öğretmeni (8 Ekim 2016-23 Ocak 2017)