Afyon Kocatepe Üniversitesi
FEN BİLİMLERİ DERGİSİ

7 (1)
245-258

Afyon Kocatepe University
JOURNAL OF SCIENCE

BİR KAPALI TİME-LİKE REGLE YÜZEYİN İNTEGRAL İNVARYANTLARI ARASINDAKİ BAZI BAĞINTILAR

Cumali EKİCİ [1], Hakan ÖZTÜRK [2]

[1] Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Mat. Böl., ESKİŞEHİR.

[2] Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Mat. Böl., AFYON.

ÖZET

Bu çalışmada, D_1^3 dual Lorentzian uzayında bir kapalı time-like regle yüzeyin bir dual integral invaryantı olan, dual açılım açısı kullanılarak, bir kapalı time-like regle yüzeyin doğal eğriliği, doğal burulması ve striksiyon büyüklükleri arasındaki bağıntılar elde edilmiştir. Bu bağıntılarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Time-Like Regle Yüzey, Dual Açılım Açısı, Dual Hiperbolik Açı, Space-Like Kongrüans, Study Dönüşümü

SOME RELATIONS BETWEEN THE INTEGRAL INVARIANTS OF A CLOSED TIME-LIKE RULED SURFACE

ABSTRACT

In this paper, using the dual angle of pitch which is a dual integral invariant of a closed time-like ruled surface in , D_1^3 dual Lorentzian space, we obtained some relations between the quantities of natural curvature, natural torsion and striction of a closed time-like ruled surface. Some results are given about these relations.

Keywords: Time-Like Ruled Surface, Dual Angle of Pitch, Dual Hyperbolic Angle, Space-Like Congruence, Study's Mapping

1. GİRİŞ

Regle yüzeylerin geometrisi uzay kinematik ve konumsal mekanizma çalışmalarında önemli bir yer teşkil etmektedir. İlk olarak H. R. Müller, 1951 yılındaki çalışmasında bir katı cismin v_1-yönlendirilmiş doğrusu yardımıyla üretilen bir v_1-kapalı regle yüzeyinin iki reel integral invaryantını ele almıştır [1]. Sonra bu integral invaryantları kullanılarak bunlar arasındaki bazı bağıntılar bulunmuştur ([2],[6]).

Daha sonra, bir v_1-kapalı regle yüzeyi için dual integral invaryantı olan dual açılım açısı tanımlanarak, bu dual açılım açısıyla reel integral invaryantlar arasındaki bağıntılar bulunmuştur ([2], [3]).

Bu çalışmaları takiben, Lorentzian iç çarpımı kullanılarak, R^3 uzayında yapılan birçok tanım ve teoremler R_1^3 Minkowski uzayında tekrardan ele alınmıştır ([4],[5],[9]).

İşte bu çalışmada, D_1^3 dual uzayında bir kapalı time-like regle yüzeyin integral invaryantları arasındaki bazı bağıntılar elde edilmiştir.

$R_1^3 = \left[R^3,(+,+,-)\right]$ Minkowski 3-uzayını göz önüne alalım. $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$ vektörlerinin Lorentzian iç çarpımı

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

şeklinde tanımlanır. Böylece, $\forall x \in R^3$ vektörü için

i) $\langle x,x\rangle > 0$ veya $x=0$ ise x 'e space-like vektör,

ii) $\langle x,x\rangle < 0$ ise x 'e time-like vektör,

iii) $\langle x,x\rangle = 0$ ve $x \neq 0$ ise x 'e null (light-like) vektör,

iv) $\sqrt{x_1^2+x_2^2} < x_3$ veya $\sqrt{x_1^2+x_2^2} > x_3$ ise x vektörüne, sırasıyla, future pointing veya past pointing denir [7].

Bu çalışmamızdaki hesaplamalar dual Lorentzian uzayında yapılacağından Lorentzian iç çarpımı göz önüne alarak D_1^3 uzayında dual Lorentzian iç çarpımını tanımlayalım:

Tanım 1: $X = x + \varepsilon \bar{x}, Y = y + \varepsilon \bar{y}, \varepsilon^2 = 0$ olmak üzere,
$\langle X, Y \rangle = \langle x, y \rangle + \varepsilon \left(\langle \bar{x}, y \rangle + \langle x, \bar{y} \rangle \right)$
şeklindeki iç çarpıma dual Lorentzian iç çarpımı denir [4].

Tanım 2: $X = x + \varepsilon \bar{x} \in D_1^3$ olsun. Eğer x vektörü space-like ise X dual vektörü de space-like, eğer x vektörü time-like ise X dual vektörü de time-like ve eğer x vektörü null (light-like) ise X dual vektörü de bir null vektör olur [4].

Lemma 1: x ve y, birer birim future pointing (past pointing) time-like vektörler olsun. O halde,
$\langle x, y \rangle = -ch\varphi$
dir. Burada φ, x ve y time-like vektörleri arasındaki hiperbolik açıdır [9].

Tanım 3: $X, Y \in D_1^3$ olsun. X ve Y dual vektörlerinin Lorentzian dış çarpımı $E_i = e_i + \varepsilon \bar{e}_i, i = 1,2,3$ olmak üzere

$$X \wedge Y = \begin{vmatrix} -E_1 & -E_2 & E_3 \\ X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Burada $X = (X_1, X_2, X_3), Y = (Y_1, Y_2, Y_3), E_1 \wedge E_2 = E_3$, $E_2 \wedge E_3 = -E_1$, $E_3 \wedge E_1 = -E_2$ dir. Ayrıca, saat yönünün tersi pozitif yön olarak (sağ el kuralı) alınmıştır.

Teorem 1 (Study Dönüşümü): R_1^3 'ün space-like (time-like) yönlü doğruları ile $x^2 = 1$ ve $\langle x, \bar{x} \rangle = 0$ olacak şekilde $(a, \bar{a})$ sıralı vektör çifti arasında birebir karşılık vardır [4].

D_1^3 'de dual Lorentzian ve dual hiperbolik birim küreler sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:
$S_1^2 = \{ X = x + \varepsilon \bar{x} \in D_1^3, \langle X, X \rangle = 1 : x, \bar{x} \in R_1^3 \}$
$H_0^2 = \{ X = x + \varepsilon \bar{x} \in D_1^3, \langle X, X \rangle = -1 : x, \bar{x} \in R_1^3 \}$

Teorem 1 'den dolayı D_1^3 dual Lorentzian uzayında yönlendirilmiş space-like doğrular ile dual Lorentzian birim küre üzerindeki noktaların birebir karşılık geldiğini söyleyebiliriz [9].

u ve v parametresine bağlı S_1^2 dual Lorentzian küresi üzerindeki bir $X = x + \varepsilon \bar{x}$ vektörü dual birim space-like vektör ise

$A(u,v) = x(u,v) + \varepsilon \bar{x}(u,v)$

denklemi D_1^3 dual Lorentzian uzayında üreteçleri birim dual space-like vektörler olan bir space-like kongrüans belirtir.

Tanım 4: R, dual bileşenli matris olsun. Eğer,

$$R^{-1} = SR^T S \qquad ve \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ise R 'ye dual Lorentzian ortogonal matris denir. Burada, S, D_1^3 'de işaret matrisidir [4].

2. D_1^3'DE KAPALI DUAL HİPERBOLİK KÜRESEL HAREKETLER

Sabit bir O merkezli dual hiperbolik küre K' ve aynı merkezli hareketli dual hiperbolik küre de K olsun. Sabit bir O noktası için bir tek K/K' dual hareketi tanımlar.

$V:\{V_1, V_2, V_2\}$ ve $E:\{E_1, E_2, E_3\}$ sistemleri;

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad , \quad E = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan ve K, K' dual hiperbolik kürelerine yerleştirilmiş ve sağ el kuralına uyan birim vektör sistemleri olsun. Bu dual ortonormal sistemler arasındaki bağıntıyı

$V = RE$

şeklinde yazabiliriz. Burada R, dual ortogonal matristir. Bu matrisin R_{ij} bileşenleri t parametresine bağlı $R = R(t)$ şeklinde fonksiyonlardır. Bu fonksiyonları 1-parametreli hareket için kullanacağız. Bu sistemde V_1, V_2, E_1 ve E_2 space-like dual vektörler, V_3 ve E_3 ise D_1^3 de birer time-like dual vektörler olarak alınmıştır.

Diğer taraftan, $V:\{V_1, V_2, V_2\}$hareketli çatısının türev denklemlerinin matris formu

$$\begin{bmatrix} dV_1 \\ dV_2 \\ dV_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{13} & \Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

biçimde yazılabilir. Böylece,

$$\psi = \Omega_{23} V_1 - \Omega_{13} V_2 - \Omega_{12} V_3$$

ifadesiyle bir dual ψ vektörünü tanımlayabiliriz.

Burada, Ω_{12}, Ω_{13} ve Ω_{23}; Ω matrisinin sıfırdan farklı bileşenleridir ve $\psi, K/K'$ dual hareketin ani dual Pfaffian vektörü olarak adlandırılır.

Pfaffian vektörü dual hiperbolik küre üzerinde bir parametreli dual hareketi ani bir s noktasında uzay eğrilerinin diferensiyel geometrisinde bulunan Darboux vektörüyle aynı rolü oynar. Yani;

$$dV_i = \psi \wedge V_i \quad , \quad i = 1,2,3$$

eşitliğini yazabiliriz.

Tanım 5: ψ, K/K' dual hiperbolik küresel hareket boyunca bir dual Pfaffian vektör olsun. O halde,

$$D = \oint \psi = \oint (\Omega_{23} V_1 - \Omega_{13} V_2 - \Omega_{12} V) = d + \varepsilon \overline{d}$$

(1)

şeklinde tanımlanan D dual vektörüne K/K' dual hiperbolik küresel hareketin Stenier vektörü denir [4].

Tanım 6: ϕ hiperbolik dual açıların toplam değişimi, $V_1(t)$ kapalı time-like regle yüzeyin hiperbolik dual açılım açısı olarak tanımlanır ve

$$\Lambda_{V_1} = \oint d\phi$$

ile gösterilir. Buradaki integral, dual eğrisel (çizgisel) integraldir [4].

Teorem 2: K/K' kapalı hareketi esnasında $\{V_1, V_2, V_2\}$ ortonormal sistemde sabitleştirilmiş olan V_1 dual space-like vektörü kapalı bir time-like regle yüzeyi çizer. Bu V_1 kapalı time-like regle yüzeyin dual açılım açısı

$$\Lambda_{V_1} = -\langle D, V_1 \rangle$$

dir. Burada $D, K/K'$ hareketinin dual Steiner vektörüdür [4].

Teorem 3: $V_1 = V_1(t)$ kapalı time-like regle yüzeyinin bir dual integral invaryantı olan Λ_{V_1} dual açılım açısı, reel integral invaryantları cinsinden

$$\Lambda_{V_1} = \lambda_{v_1} + \varepsilon\, l_{v_1}$$

şeklinde ifade edilir [4].

Teorem 4: H_0^2 de bir reel hiperbolik küre ve (α^*) eğrisi de v_1-kapalı time-like regle yüzeyin hiperbolik küresel eğrisi olsun. O zaman, v_1-kapalı time-like regle yüzeyi ile reel hiperbolik küresel alan a_{v_1} arasında aşağıdaki bağıntı vardır.

$$\lambda_{v_1} = a_{v_1} - 2\pi$$

K' sabit birim dual hiperbolik küresi üzerinde diferensiyellenebilir bir (α) eğrisi seçelim. K hareketli hiperbolik küresinin bir büyük dairesi üzerinde tesbit ettiğimiz $\sum = sbt$ uzunluklu $\overset{\frown}{V_1 \overline{V_1}}$ dual yay parçasını sabit tuttuğumuza göre bu hareket yalnız başlangıçta K' küresinde (α) eğrisine bağlı olacaktır.

3. İNTEGRAL İNVARYANTLAR İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

K/K' dual hiperbolik küresel hareketin çizgiler uzayındaki karşılığı olan H/H' hareketini ele alalım.

$\Sigma = sbt$ dual yay parçasının V_1 ve $\overline{V}_1$ uç noktalarının (α) eğrisi üzerinde hareketine, çizgiler uzayında bir L dik hiperbolik space-like doğru kongrüansının (iki parametreli doğru ailesi) v_1-kapalı time-like regle yüzeyi üzerindeki kapalı hareketi karşılık gelir. Bu space-like kongrüansın odak çizgisi, v_1 -kapalı time-like regle yüzeyinin v_1 ve $\overline{v_1}$ anadoğrularına, F ve $\overline{F}$ noktalarında diktir.

$\Sigma = sbt$ uzunluklu $\overset{\frown}{V_1\overline{V_1}}$ dual yayı üzerinde seçtiğimiz X dual noktasına, bu space-like kongrüansın odak çizgisine dik bir x-ışını karşılık gelir. Öyleki; V_1 ve $\overline{V_1}$-dual vektörleri arasında $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$ dual açısı sabit seçildiği için x-ışını v_1 anadoğrusu ile θ_1 reel açısını yapar ve ondan $\overline{\theta_1}$ uzaklığındadır. Benzer olarak, $\overline{v_1}$ anadoğrusu ile θ_2 reel açısını yapar ve ondan $\overline{\theta_2}$ uzaklığındadır. O halde, space-like doğru kongrüansının bir X space-like doğrusu $\Sigma_1 = \theta_1 + \varepsilon\overline{\theta_1}$ ve $\Sigma_2 = \theta_2 + \varepsilon\overline{\theta_2}$ sabit dual açılarına sahiptir. Burada v_1-kapalı time-like regle yüzeyinin üreteçleri sırasıyla v_1, $\overline{v_1}$ ve Σ dual açılarıdır.

Herhangi bir $X = X(t)$ kapalı time-like regle yüzeyin dual açılım açısı,

$$\Lambda_X = -\langle D, X\rangle \tag{2}$$

dir. (1) ve (2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\Lambda_X &= -\left\langle V_1\oint\Omega_{23} - V_2\oint\Omega_{13} - V_3\oint\Omega_{12}\ ,\ ch\Sigma_1 V_1 + sh\Sigma_1 V_3\right\rangle \\ &= -\left(ch\Sigma_1\oint\Omega_{23} + sh\Sigma_1\oint\Omega_{12}\right)\end{aligned} \tag{3}$$

elde edilir. Benzer olarak v_1 ve $\overline{v_1}$ time-like regle yüzeyleri için

$$\begin{aligned}\Lambda_{V_1} &= -\langle D, V_1\rangle \\ &= -\oint\Omega_{23}\end{aligned} \tag{4}$$

ve

$$\begin{aligned}\Lambda_{\overline{V_1}} &= -\left\langle D, \overline{V_1}\right\rangle \\ &= -\left\langle V_1\oint\Omega_{23} - V_2\oint\Omega_{13} - V_3\oint\Omega_{12}\ ,\ ch(\Sigma_1+\Sigma_2)V_1 + sh(\Sigma_1+\Sigma_2)V_3\right\rangle \\ &= -\left(ch(\Sigma_1+\Sigma_2)\oint\Omega_{23} + sh(\Sigma_1+\Sigma_2)\oint\Omega_{12}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

bulunur. Burada v_1 ve $\overline{v_1}$ dual noktaları, aynı kapalı (α) eğrisini K / K' dual kapalı hareketi boyunca bir parametre farkla çizerler. Bundan dolayı V_1 in dual açılım açısıyla, $\overline{V_1}$ 'in dual açılım açısını aynı gibi düşünebiliriz.

(4) eşitliği (3) ile (5) de yerine yazılırsa

$$\Lambda_X = ch\Sigma_1 \Lambda_{V_1} - sh\Sigma_1 \oint \Omega_{12}$$

$$\Lambda_{\overline{V_1}} = ch(\Sigma_1 + \Sigma_2)\Lambda_{V_1} - sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)\oint \Omega_{12}$$

bulunur. Burada $\oint \Omega_{12}$ ifadesinin yokedilmesiyle,

$$\Lambda_X = \Lambda_{V_1} ch\Sigma_1 - \left[\frac{\Lambda_{V_1}\left[ch(\Sigma_1 + \Sigma_2) - 1\right]}{sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)}\right] sh\Sigma_1$$

$$= \Lambda_{V_1}\left[\frac{sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)ch\Sigma_1 - sh\Sigma_1 ch(\Sigma_1 + \Sigma_2) + sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)}{sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)}\right]$$

elde edilir. Burada $\dfrac{\Lambda_X}{\Lambda_{V_1}}$ oranı,

$$\frac{\Lambda_X}{\Lambda_{V_1}} = \frac{sh\Sigma_1 + sh\Sigma_2}{sh(\Sigma_1 + \Sigma_2)}$$

dir [5]. Bu oranın reel ve dual kısımlarına ayrılmasıyla,

$$\frac{\Lambda_X}{\Lambda_{V_1}} = \frac{sh\theta_1 + sh\theta_2}{sh(\theta_1 + \theta_2)} + \varepsilon\left[\frac{\left(\overline{\theta_1} ch\theta_1 + \overline{\theta_2} ch\theta_2\right) sh(\theta_1 + \theta_2) - \left(\overline{\theta_1} - \overline{\theta_2}\right) ch(\theta_1 + \theta_2)}{sh^2(\theta_1 + \theta_2)}\right] \tag{6}$$

bulunur. (6) ifadesinin reel ve dual kısımlarının eşitliğinden,

$$l_x = l_{v_1}\left(\frac{sh\theta_1 + sh\theta_2}{sh(\theta_1 + \theta_2)}\right) + \lambda_{v_1}\left(\frac{\left(1 - ch(\theta_1 + \theta_2)\right)\left(\overline{\theta_1} sh\theta_2 + \overline{\theta_2} sh\theta_1\right)}{sh^2(\theta_1 + \theta_2)}\right) \tag{7}$$

bağıntısı elde edilir.

(6) ve (7) ifadelerinin kullanılmasıyla aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 1: a_x ve a_{v_1}, (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeylerinin küresel göstergeleri ile sınırlı küresel alanlar olmak üzere,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{a_x-2\pi}{a_{v_1}-2\pi}=\frac{sh\theta_1+sh\theta_2}{sh(\theta_1+\theta_2)} \tag{8}$$

oranı sabittir, yani; bunlar hareketten bağımsızdır [5].

(8) ifadesinde $\theta_1=\theta_2$ alırsak,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{1}{ch\theta_1}$$

eşitliğini yazabiliriz.

Sonuç 2: (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyleri için

$$\frac{l_x}{\lambda_x}=\frac{l_{v_1}}{\lambda_{v_1}}+\frac{a_{v_1}-2\pi}{a_x-2\pi}\left(\frac{(1-ch(\theta_1+\theta_2))(\overline{\theta_1}sh\theta_2+\overline{\theta_2}sh\theta_1)}{sh^2(\theta_1+\theta_2)}\right) \tag{9}$$

bağıntısı sağlanır.

Sonuç 3: (9) ifadesinde özel olarak $\theta_1=\theta_2$ alırsak, (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyleri için

$$l_x=\frac{1}{ch\theta_1}\left(l_{v_1}-\lambda_{v_1}\frac{(\overline{\theta_1}+\overline{\theta_2})}{2}th\theta_1\right) \tag{10}$$

bağıntısı sağlanır.

Bu özel duruma ilave olarak (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyleri açılabilir iseler o halde (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeylerinin açılım uzunlukları, sırasıyla, bu yüzeylerin striksiyon çizgilerinin uzunluklarına eşittir. (x) ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeylerinin striksiyon çizgilerinin uzunlukları b_{x_1} ve b_{v_1} olmak üzere,

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_{v_1}}=\frac{a_x-2\pi}{a_{v_1}-2\pi}=\frac{1}{b_{v_1}}\left(b_x+\frac{(a_{v_1}-2\pi)(\overline{\theta_1}+\overline{\theta_2})th\theta_1}{2ch\theta_1}\right)=\frac{1}{ch\theta_1} \tag{11}$$

sonucunu verebiliriz.

4. EĞRİLİK, BURULMA VE STRİKSİYON BÜYÜKLÜKLERİ ARASINDAKİ BAZI SONUÇLAR

1-parametreli K/K' dual hiperbolik küresel kapalı hareketinde, hareketli dual ortonormal sistemini özel olarak,

$$V_1 = V_1(s) \quad , \quad V_2 = \frac{V_1'(s)}{\left\| V_1'(s) \right\|} \quad , \quad V_3 = V_1(s) \wedge V_2(s)$$

olmak üzere V_1, V_2 space-like ve V_3 time-like dual birim vektörler olacak şekilde seçelim. Bu dual harekette, $\vec{V_1}$ dual birim vektörünün küre üzerinde çizdiği, $s \in R$ parametresine göre diferensiyellenebilir kapalı eğriye, çizgiler uzayında v_1-yönlü doğrusunun çizdiği (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyi karşılık gelir.

Diğer taraftan $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$, $\vec{V_3}$ birim dual vektörlerinin, çizgiler uzayındaki E-Study resmi olan $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$-yönlü doğruları (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyin striksiyon noktasında kesişirler. v_2, v_3-yönlü doğruları kapalı time-like regle yüzeyinin striksiyon noktasındaki, sırasıyla, normal ve teğet doğrularıdır.

$\{V_1, V_2, V_3\}$ dual ortonormal sisteminin türev denklemleri (E. Cartan), $s \in R$ parametresi, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin striksiyon çizgisinin yay parametresi olmak üzere,

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -T \\ 0 & -T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{12}$$

matris formuyla verilebilir. Burada, $\kappa = k + \varepsilon \bar{k}$ ve $T = t + \varepsilon \bar{t}$ 'dir.

$b = b(s)$, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin striksiyon çizgisi olsun. Bu striksiyon çizgisinin teğeti ile v_3 birim dual time-like vektörü arasındaki hiperbolik açı σ olmak üzere

$$\frac{db}{ds} = sh\sigma\, v_1 + ch\sigma\, v_3 \tag{13}$$

eşitliğini (v_1, v_3) düzleminde yazabiliriz. Burada, striksiyon çizgisinin teğeti birim dual time-like vektör olarak alınmıştır. (12) ve (13) denklemleri K / K' 1-parametreli dual hiperbolik küresel harekete çizgiler uzayında karşılık gelen H / H' hareketini tek türlü olarak belirtirler. Bu denklemlerde karşılaştığımız κ, T, σ büyüklükleri, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin bir invaryant sistemidir. Bu büyüklüklere, sırasıyla, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin doğal eğriliği, doğal burulması ve striksiyonu denir.

σ hiperbolik açısının sıfıra yaklaşması durumunda (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin striksiyon çizgisi sırt eğrisine dönüşmüş olur. Bu da bir time-like regle yüzeyinin açılabilir bir yüzey olmasını karakterize eder. O halde $\sigma \to 0$ olması durumunda κ, T büyüklükleri bir uzay eğrisi (sırt eğrisi) 'nin eğriliği ve burulması olmaktadır.

(v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin açılım uzunluğu ve açılım açısı tanımları gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} l_{v_1} &= \oint \langle db, v_1 \rangle ds \\ &= \oint \langle sh\sigma\, v_1 + ch\sigma\, v_2, v_1 \rangle ds \\ &= \oint sh\sigma\, ds \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda_{v_1} &= \oint d\sigma = \oint \langle dv_2, dv_3 \rangle \\ &= \oint \langle -\kappa v_1 - T v_3, v_3 \rangle ds \\ &= \oint T\, ds \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin dual açılım açısını doğal burulma ve striksiyon cinsinden

$$\Lambda_{V_1} = \oint T\, ds + \varepsilon \oint sh\sigma\, ds \tag{14}$$

dir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 5: Bir (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyin toplam doğal burulması $\oint T\, ds$ ve striksiyon çizilme hızının anadoğru üzerindeki toplam izdüşümü

$\oint sh\sigma\, ds$ olmak üzere, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin dual açılım açısını

$\Lambda_{V_1} = \oint T\, ds + \varepsilon \oint sh\sigma\, ds$

şeklinde ifade edebiliriz.

$\iint dA = A_{V_1} = a_{v_1} + \varepsilon \bar{a}_{v_1}$, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyin küresel göstergesinin küresel alanı olmak üzere dual birim kürenin Gauss-Bonnet formülünden

$$\iint dA + \oint \frac{\det(V_1, V_1', V_1'')}{\|V_1'\|^2} ds - 2\pi = 0$$

şeklinde yazılır [5]. Burada $dA = dU.dV$ dual birim küre üzerinde dual alan elementidir. O halde,

$$\begin{aligned} \Lambda_{V_1} &= \oint (-\Omega_{23})\, ds \\ &= -\oint \frac{\det(V_1, V_1', V_1'')}{\|V_1'\|^2} ds \end{aligned} \tag{15}$$

olacağından

$\iint dA - \Lambda_{V_1} - 2\pi = 0$

yazılır. Böylece aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 6: (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin dual açılım açısı

$$\Lambda_{V_1} = A_{V_1} - 2\pi \tag{16}$$

olarak yüzeyin dual küresel resminin dual küresel alanına karşılık gelir. (16) ifadesini reel ve dual kısımlarına ayırırsak

$\lambda_{v_1} = a_{v_1} - 2\pi$, $l_{v_1} = \bar{a}_{v_1}$

yazılır. Diğer taraftan $U = u + \varepsilon \int_0^u \bar{k}_1\, du$ ve $V = v + \varepsilon \int_0^v \bar{k}_2\, dv$ şeklinde tanımlı dual parametreler olmak üzere

$dA = da + \varepsilon(\bar{k}_1 + \bar{k}_2) da$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitliğin iki katlı integrali alınırsa,

$A_{V_1} = a_{v_1} + 2\varepsilon \iint k^* da$

bulunur. Burada $k^* = \dfrac{\left(\bar{k}_1 + \bar{k}_2\right)}{2}$ ifadesine V_1, (u,v)-space-like doğru kongrüansının ortalama dağılma parametresi denir.

Buna göre V_1, (u,v)-space-like doğru kongrüansının ortalama dağılma parametresidir ve (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin açılım uzunluğu arasında

$$l_{v_1} = 2\iint k^* da$$

bağıntısı vardır.

$V_1(s)$ birim dual vektörü, birim dual küre yüzeyinin dış normali olmak üzere $V_1(s)$ dual kapalı eğrisinin dual geodezik eğriliği,

$$G_{V_1} = g_{v_1} + \varepsilon \bar{g}_{v_1} = \frac{\det\left(V_1, V_1', V_1''\right)}{\left\|V_1'\right\|^2} \tag{17}$$

ile verilir. (15) ve (17) denklemlerinden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 7: (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin dual açılım açısı, yüzeyin küresel göstergesinin toplam dual geodezik eğriliğine eşittir. Yani;

$$\Lambda_{V_1} = -\oint G_{V_1} ds \tag{18}$$

dır [5]. (18) ifadesinin reel ve dual kısımlarının ayrılmasıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4: (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin $\lambda_{v_1}, l_{v_1}, g_{v_1}$ ve a_{v_1} invaryantları arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

i. $\lambda_{v_1} = -\oint g_{v_1} ds$ **iii.** $\oint g_{v_1} ds = 2\pi - a_{v_1}$

ii. $l_{v_1} = -\oint \bar{g}_{v_1} ds$ **iv.** $\oint \bar{g}_{v_1} ds = -2\iint k^* da$ (19)

Bu ifadeler, (v_1)-kapalı time-like regle yüzeyinin reel integral invaryantlarının geometrik yorumlarıdır. Özellikle, (19) ifadesinin (iii) şıkkı geodezik eğrilik ile küresel kapalı eğrinin alanı arasındaki ilişkiyi gösteren önemli bir formüldür.

KAYNAKLAR

1. Müler H. R., Uber Geschlossene Bewegunsvargange Nonatsh Math., 53, 206-214, (1951).
2. Gürsoy O., On the Integral Invariants of a Closed Ruled Surface, Journal of Geometry, Vol. 39, (1990).
3. Köse Ö., Contribution to the Theory of Integral Invariants of a Closed Ruled Surface, Mechanism and Machine Theory, 32, 261-277, (1997).
4. Özyılmaz E., Yaylı Y., On the Integral Invariants of a Time-Like Ruled Surface, Mathematical and Computational Applications, Vol.6, No.2, 137-145, (2001).
5. Özyılmaz E., Yaylı Y., O. Bonnet Integral Formula and Some Theorems In Minkowski Space, Hadronic Journal Supplement, 15, 397-414, (2000).
6. Ekici C., Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (1992).
7. O Neill B., Semi Riemannian Geometry, A. Press London, (1983).
8. Hacısalihoğlu H. H., Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, (1983).
9. Uğurlu H. H., On the Geometry of Time-Like Surface, Facuty of Science, Universty of Ankara, Seri A1, Vol 46, (1997).
10. Blaschke W., Vorlesungen Über Differential Geometrie 4 Aufl, Berlin, (1945).