KUİVER TEMSİLLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuğçe HASIRCIOĞLU

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2019

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KUİVER TEMSİLLERİ

Tuğçe HASIRCIOĞLU

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Eylül 2019

TEZ ONAY SAYFASI

Tuğçe HASIRCIOĞLU tarafından hazırlanan "Kuiver Temsilleri" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 17/09/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Başkan : Prof. Dr. Noyan Fevzi ER
Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Fak.

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA
Afyon Kocatepe Üniv. Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
......./......./ 2019 tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

17/09/2019

Tuğçe HASIRCIOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KUİVER TEMSİLLERİ

Tuğçe HASIRCIOĞLU

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA

Bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, tez çalışması için gerekli kavramların tanımları ve bazı temel özellikler verilmiştir. Üçüncü bölümde; kuiver temsilleri tanıtılarak, bir kuiverın basit, projektif ve injektif temsillerinin özellikleri incelenmiştir Dördüncü bölümde kuiverların tiplerine göre sınıflandırılması yapılarak Gabriel Teoremi ispatlanmıştır.

2019, v+68 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuiver, kuiver temsilleri, temsil morfizmi, ayrıştırılamaz temsil, kuiver tipleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

QUIVER REPRESENTATIONS

Tuğçe HASIRCIOĞLU

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Fatma KAYNARCA

This thesis consists of four main sections. The first section is devoted to the introduction. In the second part, the definitions and some basic features of the concepts required for the thesis study are given. In the third chapter; by introducing kuiver representations, properties of simple, projective and injective representations of a quiver have been examined. In the fourth section, Gabriel Theorem has been proved by classification of quivers according to their types.

2019, v+68 pages

Key Words: Quiver, quiver representations, representations morphism, indecomposable representations, types of quiver.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her konuda yardımcı olan, yol gösteren, bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşarak kendimi geliştirmeme katkı sağlayan çok değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Fatma KAYNARCA'ya, bilgi ve görüşlerini paylaşarak yol gösteren Sayın Prof. Dr. Noyan Fevzi ER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim, öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi destekleriyle hep benim yanımda olan, bana her zaman sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan, bugünlere gelmeme destek olan, bana güvenen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe HASIRCIOĞLU

AFYONKARAHİSAR, 2019

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER DİZİNİ iv

SİMGELER DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1 Bazı Cebirsel Yapılar 4

2.2 Kategorik Kavramlar 7

2.3 Topolojik Kavramlar 9

3. KUİVER TEMSİLLERİ 10

3.1 Kuiver Temsilleri ve Temsil Morfizmleri 10

3.2 Dik Toplam ve Ayrıştırılamaz Temsiller 17

3.3 Çekirdek, Eşçekirdek ve Tam Diziler 19

3.4 Hom Funktorları 29

3.5 Kuiverda Yollar 32

3.6 Basit, Projektif ve İnjektif Temsiller 33

4. KUİVER TİPLERİ 49

4.1 Sonlu Tipli Kuiverlar 50

4.2 Evcil Tipli Kuiverlar 62

4.3 Vahşi Tipli Kuiverlar 64

5. KAYNAKLAR 67

ÖZGEÇMİŞ 69

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
Q	Bir kuiver
Q_0	Bir kuiverın köşelerinin kümesi
Q_1	Bir kuiverın oklarının kümesi
rep$Q$	Bir Q kuiverının tüm temsillerinin kategorisi
$\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$	Bir Q kuiverinın boyut vektörü $\underline{n}$ olan temsillerinin uzayı
$\mathcal{O}_M$	Bir M temsilinin yörüngesi
$\overline{\mathcal{O}_M}$	Bir M temsilinin yörünge kapanışı
G_M	Bir M elemanının sabitleyicisi
ker$f$	f'nin çekirdeği
coker$f$	f'nin eşçekirdeği
im$f$	f'nin görüntüsü
s	Her bir oku başlangıç köşesine götüren fonksiyon
t	Her bir oku bitiş köşesine götüren fonksiyon
k	Herhangi bir cisim
M	Herhangi bir Q kuiverının bir temsili
$S(i)$	i köşesindeki basit temsil
$P(i)$	i köşesindeki projektif temsil
$I(i)$	i köşesindeki injektif temsil
$k[x]$	k cismi üzerindeki polinomlar halkası
der(p)	$k[x]$'deki bir p polinomunun derecesi
$\mathrm{mat}_{m\times n}(k)$	k cismi üzerindeki $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\mathrm{Hom}(M, M')$	M'den M''ye giden tüm temsil morfizmlerinin kümesi
$\underline{dim}M = \underline{n}$	M temsilinin boyut vektörü
$M \oplus M'$	M ve M' temsillerinin dik toplamı
K_r	r-oklu Kronecker kuiver
L_r	r-loop kuiver
S_r	r-köşeli star kuiver
$GL(V)$	V vektör uzayının genel lineer grubu
$GL(n)$	k cismi üzerinde n.dereceden genel lineer grup

1. GİRİŞ

Kuiver, sonlu ve yönderilmiş olması bakımından bir çizgenin (graph) özel halidir. Kuiver kavramı ilk olarak 1940'lı yılların sonunda Thrall (1947) tarafından ortaya atılmıştır. Daha sonra Grothendieck 1957'de kuiver için "ok diyagramı" notasyonunu kullanmıştır. 1970'li yılların başında özelikle Gabriel tarafından geliştirilen bu kavram "kuiver" adı altında incelenmiştir (Gabriel 1960, 1972, 1973). Birleşmeli cebirlerin modern temsil teorisinin başlangıç noktasını oluşturan kuiver kavramının; Kac-Moody Lie cebirleri, Hall cebirleri, cluster cebirleri, coxeter grupları, quantum grupları, geometrik invaryant teori, cebirsel geometri gibi matematiğin pek çok dalında ve fizikte, uygulama alanı vardır.

Genel olarak temsil teorinin temel amacı, bir cebirsel yapının temsilleri yardımıyla o cebirsel yapı hakkında lineer cebirden bazı özellikleri de kullanarak daha fazla bilgi edinebilmektir. Kuiver temsilleri ilk olarak; belirli bir vektör uzayının altuzaylarının sınıflandırılması gibi bazı lineer cebir problemlerinin çözümü için kullanılmıştır. Fakat daha sonra sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinde önemli rol oynamışlardır. Cebirsel kapalı bir cisim üzerinde sonlu boyutlu cebirlerin temsilleri; kuiverlar ve onların temsilleri yardımıyla tanımlanır. Bu açıdan kuiver temsillerinin incelenmesinde temel hedef verilen herhangi bir kuiverın tüm temsillerini sınıflandırmaktır. Bu yüzden ayrıştırılamaz temsillerin belirlenmesi önem taşımaktadır. Bu süreçte ilk adım Kac (1980) tarafından atılmıştır. Kac ayrıştırılamaz temsillerin boyut vektörlerinin, kuiverın altında yatan yönlendirilmemiş çizgeye karşılık gelen Kac-Moody Lie cebirinin pozitif kökleri olduğunu göstermiştir.

Sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinde kuiverların kullanımı, her biri belirli bir (kuiver) diyagramındaki bir ok ile ilişkilendirilen matrislerin bir koleksiyonu olarak verilen bir cebir üzerindeki modülleri görselleştirme imkanı sağlar. Elemanları; bir kuiverdaki yolların sonlu toplamları ve çarpma işlemi; yolların uç uca eklenmesi (concatenation) olarak tanımlı olan ve kuiverdaki tüm yolları taban kabul eden cebire *yol cebiri (path algebra)* denildiği gözönüne alındığında bu cebir üzerindeki modüller kuiverın temsillerine karşılık gelir. Dolayısıyla kuiverlar bir cebir örneği yaratmakla kalmayıp aynı zamanda cebirin temsil teorisi için çok somut bir model oluştururlar. Teorinin başka bir güzelliği de herhangi sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinde kuiver yaklaşımının kullanılabilir olmasıdır (Schiffler 2014).

Kuiverlar ve onların temsillerinin incelenmesinde temel amaç, verilen bir kuiverın tüm temsillerini izomorfizma farkıyla belirlemektir. Gabriel; bu problemi; bazı Dynkin tipli kuiverlar yardımıyla çözmüş ve bu tip kuiverların ayrıştırılamaz temsillerinin izomorfizma sınıfının sonlu sayıda olduğunu ifade etmiştir. Genelde keyfi kuiverlar için bir sınıflandırma yapmak çok zordur.

Kuiverlar ve onların temsilleri; sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinde önemli rol oynadığı gibi kök sistemleriyle de bağlantısı vardır. Bu bağlantı 1972 yılında Peter Gabriel tarafından iki kısım halinde ispatlanan "Gabriel Teoremi"nde ifade edilmiştir. Gabriel'in teoreminin birinci kısmında "bir Q kuiverının sonlu (yörünge) tipli olması için gerek ve yeter koşul Q'nun altında yatan yönlendirilmemiş $\widehat{Q}$ çizgesinin A, D, E tipli Dynkin diagramı olmasıdır" ifadesi ispatlanmıştır. İkinci kısmında ise "$\widehat{Q}$; A, D, E tipli Dynkin diyagramına sahip olacak şekilde bir Q kuiverı için; Q'nun $\underline{n}$ boyut vektörüne sahip (bir tek) ayrıştırılamaz temsilinin var olması için gerek ve yeter koşul Φ^+; bir Φ kök sisteminin tüm pozitif köklerinin kümesi olmak üzere $\underline{n} \in \Phi^+$ olmasıdır" ifadesi ispat edilmiştir (Gabriel, 1972). Böylece Gabriel teoremi ile; bir Q kuiverının ayrıştırılamaz temsilleri ile Q'nun altında yatan yönlendirilmemiş Dynkin diyagramları ile ilişkili kök sistemlerindeki pozitif kökler arasında birebir eşleme olduğunu ifade edilir.

Gabriel teoreminin ikinci kısmında ifade edilen ayrıştırılamaz temsillere kök sistemlerinin pozitif köklerinin doğal olarak karşılık geldiğini Bernstein vd. (1973); Weyl grupları ve köklerin tekniğini kullanmaya dayalı olarak farklı bir şekilde ispatlamışlardır. Coxeter funktorları olarak adlandırılan funktorlar bu ispatta önemli rol oynamıştır.

Daha sonra Kac (1982), bu sonuçları Kac-Moody Lie cebirleriyle derinden bir bağlantı kurarak keyfi kuiverlara genişletmiştir ve bunlara sonsuz kök sistemlerini karşılık getirmiştir. Aynı zamanda Gabriel teoremi, araştırmacılara; kök sistemleriyle bağlantılı olması muhtemel olan kavramlar olarak bir kuiverın oklarının yönlendirmesine bağlı olmayacak şekilde kuiver temsilleriyle ilgili kavramları aramaya da ilham vermiştir.

Tez çalışmasının ikinci bölümünde kuiver temsillerinde kullanılan bazı cebirsel ve kategorik kavramların tanımlarına ve özelliklerine yer verilmiştir. Ayrıca Gabriel teoreminin ispatında kullanılacak olan bazı topolojik kavramların tanımlarına değinilmiştir. Tez çalışmasının temel amacı kuiver temsillerini konuyla ilgilenen araştırmacılara tanıtmak olduğundan üçüncü bölümünde kuiver, kuiver temsili, temsil morfizmi gibi bazı temel kavramlar tanıtılarak çeşitli örnekler verilmiştir. Kuiver temsillerinin kategorisinde ayrıştırılamaz objeler olan basit, projektif ve injektif temsillerin tanımları, daha iyi anlaşılabilmesi için örneklerle zenginleştirilerek ifade edilmiştir.

Tez çalışmasının son bölümünde kuiverların tiplerine göre bir sınıflandırılması yapılarak örnekler verilmiştir. Ayrıca Gabriel teoreminin ayrıntılı ispatı yapılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilk olarak tez çalışması için gerekli olan bazı temel cebirsel yapılar tanıtılacaktır. İkinci bölümde kuiverların temsillerinin kategorik yapısının daha iyi anlaşılması için kategori teorideki bazı kavramlar verilecektir.

2.1 Bazı Cebirsel Yapılar

Bu bölümde tez çalışması için gerekli olan bazı cebirsel yapılar ve özelliklerine yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 k bir cisim olsun. Aşağıdaki denk koşullardan biri sağlanırsa k'ya bir *cebirsel kapalı cisim (algebraically closed field)* denir.

(i) $\text{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in k[x]$ polinomunun k'da bir kökü vardır.

(ii) k üzerindeki her indirgenmez polinomun derecesi 1 dir.

(iii) $\text{der}(p) \geq 1$ olacak şekildeki her $p \in k[x]$ polinomu $c, c_1, \ldots, c_n \in k$ olmak üzere

$$p = c(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 2.1.2 k bir cisim, V ve W birer k-vektör uzayı olmak üzere bir $L : V \to W$ lineer dönüşümü verilsin.

(i) $\ker(L) = \{v \in V \mid L(v) = 0\} \subseteq V$ altkümesi L'nin *çekirdeği (kernel)*

(ii) $\text{im}L = L(V) = \{L(v) \mid v \in V\} \subseteq W$ altkümesi L'nin *görüntüsü (image)*

(iii) $\text{coker}L = W/\text{im}L$ kümesi L'nin *eşçekirdeği (cokernel)*

(iv) Eğer $V = W$ ise L lineer dönüşümü *endomorfizma*

(v) L lineer dönüşümü birebir ise *monomorfizma*

(vi) L lineer dönüşümü örten ise *epimorfizma*

(vii) L lineer dönüşümü hem birebir hem de örten ise *izomorfizma*

olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.3 R birimli bir halka, M bir toplamsal abel grup olmak üzere aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir $R \times M \to M$ fonksiyonu varsa M'ye bir *sol R-modül* denir ve ${}_RM$ ile gösterilir. Her $r, s \in R$ ve $m, n \in M$ için

(M_1) $r(m + n) = rm + rn$

(M_2) $(r + s)m = rm + sm$

(M_3) $(rs)m = r(sm)$

(M_4) $1_Rm = m$

Benzer olarak bir sağ R-modül tanımlanır. Bir M kümesi hem sol hem de sağ R-modül ise M'ye kısaca R-modül denir.

R ve S birer halka, M bir sol R-modül, bir sağ S-modül ve her $r \in R, s \in S, m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$ oluyorsa M'ye bir (R, S)-bimodül denir ve ${}_RM_S$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 A ve B birer R-modül olsun. Her $a, b \in A$ ve her $r \in R$ için

(i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(ii) $f(ra) = rf(a)$

özelliklerini sağlayan bir $f : A \to B$ fonksiyonuna bir *R-modül homomorfizması* denir.

$f : A \to B$ bir R-modül homomorfizması olsun. $\ker f = \{a \in A \mid f(a) = 0\}$ kümesine *f'nin çekirdeği (kernel)*, $\mathrm{im} f = \{f(a) \mid a \in A\}$ kümesine de *f'nin görüntüsü (image)* denir. f birebir ise *monomorfizma*, örten ise *epimorfizma*, hem birebir hem örten ise *izomorfizma* olarak adlandırılır.

(1) f monomorfizmadır $\Leftrightarrow \ker f = 0$ dır.

(2) f epimorfizmadır $\Leftrightarrow \mathrm{im} f = B$ dir.

(3) f izomorfizmadır $\Leftrightarrow gf = 1_A$ ve $fg = 1_B$ olacak şekilde bir $g : B \to A$ R-modül homomorfizması vardır.

Tanım 2.1.5 $\{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ modüllerin bir ailesi olmak üzere $f_n : M_n \to M_{n+1}$ R-modül homomorfizmalarından oluşan bir

$$\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

dizisi verilsin. Her bir $n \in \mathbb{Z}$ için $\mathrm{im} f_n = \ker f_{n+1}$ oluyorsa bu diziye *her bir M_n'de tam dizi (exact sequence)* denir.

Tanım 2.1.6

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam diziye *kısa tam dizi (short exact sequence)* denir. Burada f birebir, $\mathrm{im} f = \ker g$ ve g örtendir.

Teorem 2.1.7 $\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[l, dashed, bend left, "h"] & C \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend left, "k"] & 0 \end{tikzcd}$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) $hf = 1_A$ olacak şekilde bir $h : B \to A$ homomorfizması bulunur.

(ii) $\mathrm{im} f$; B'nin bir dik toplananıdır.

(iii) $gk = 1_C$ olacak şekilde bir $k : C \to B$ homomorfizması bulunur. Ayrıca $B \cong A \oplus C$ dir.

Tanım 2.1.8 Teorem 2.1.7'deki denk koşullardan biri gerçeklendiğinde

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisine *parçalanan (split) dizi* denir.

2.2 Kategorik Kavramlar

Bu bölümde tez calışması için gerekli olan bazı kategorik kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1 Bir $\mathcal{C}$ kategorisi;

(i) Ob$\mathcal{C}$ ile gösterilen objelerin oluşturduğu sınıf;

(ii) Farklı $(A, B) \neq (A', B')$ obje çiftleri için

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') = \emptyset$$

özelliğine sahip $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ile gösterilen morfizmlerin oluşturduğu sınıf ile;

(iii) Her bir $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için aşağıdaki özellikleri sağlayan $(g, f) \mapsto g \circ f$ ile tanımlı

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

bileşkesinden oluşur, öyle ki:

(1) Birleşme Özelliği: Her $A, B, C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ ve her $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ ve $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ eşitliği sağlanır.

(2) Birim Eleman Özelliği: Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ objesi ve her $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ve $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ morfizmi için $f \circ 1_A = f$ ve $1_A \circ g = g$ olacak şekilde bir $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ birim morfizması vardır.

Tanım 2.2.2 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$'nin her A objesine $\mathcal{D}$'nin bir $F(A)$ objesini, $\mathcal{C}$'deki her $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{D}$'deki bir $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(A), F(B))$ morfizmasını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kovaryant funktor (covariant functor)* denir. Öyle ki:

(i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $F(gf) = F(g)F(f)$ dir.

(ii) Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_A) = 1_F(A)$ dır.

Tanım 2.2.3 $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}$'nin her A objesine $\mathcal{D}$'nin bir $F(A)$ objesini, $\mathcal{C}$'deki her $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{D}$'deki bir $F(f) \in \mathrm{Hom}(F(B), F(A))$ morfizmasını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları sağlayan $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ fonksiyonuna bir *kontravaryant funktor (contravariant functor)* denir. Öyle ki:

(i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ için $F(gf) = F(f)F(g)$ dir.

(ii) Her $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ için $F(1_A) = 1_F(A)$ dır.

Herhangi bir $\mathcal{C}$ kategorisinde A keyfi bir obje olmak üzere sırasıyla kovaryant ve kontravaryant olan $\mathrm{Hom}(A, -)$ ve $\mathrm{Hom}(-, A)$ ile gösterilen iki önemli funktor vardır. Bu funktorlar aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 2.2.4

(i) $\mathrm{Hom}(A, -)$ funktoru; $\mathcal{C}$ kategorisinden k-vektör uzaylarının kategorisine giden bir kovaryant funktordur. Öyle ki;

  (1) $\mathcal{C}$'de bir B objesini A'dan B'ye giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\mathrm{Hom}(A, B)$'ye götürür.

  (2) $\mathcal{C}$'de bir $f : B \to C$ morfizmini aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $f_*(g) = f \circ g$ ile tanımlı $\mathrm{Hom}(A, f) = f_* : \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$ morfizmine götürür.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, dashed, "f \circ g"] & \\
B \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

  Burada f_*; f'nin *ileri itmesi (push forward)* olarak adlandırılır.

(ii) $\mathrm{Hom}(-, A)$ funktoru; $\mathcal{C}$ kategorisinden k-vektör uzaylarının kategorisine giden bir kontravaryant funktordur. Öyle ki;

  (1) $\mathcal{C}$'de bir B objesini B'den A'ya giden tüm morfizmlerin kümesi olan $\mathrm{Hom}(B, A)$'ya götürür.

(2) $\mathcal{C}$'de bir $f : B \to C$ morfizmini aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $f^*(g) = g \circ f$ ile tanımlı $\mathrm{Hom}(f, A) = f^*$: $\mathrm{Hom}(C, A) \to \mathrm{Hom}(B, A)$ morfizmine götürür.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Burada f^*; f'nin *geri çekmesi (pull back)* olarak adlandırlılır.

2.3. Topolojik Kavramlar

Zariski topoloji; cebirsel geometri ve değişmeli cebirde ilk defa Oscar Zariski tarafından tanıtılan, cebirsel çeşitlemler üzerinde bir topolojidir. Bir cebirsel çeşitlemin Zariski topolojisi; kapalı kümeleri çeşitlemin cebirsel altkümeleri olan bir topolojidir.

Tanım 2.3.1 (X, τ) topolojik uzay ve $D \in \tau$ olsun. $\overline{D} = X$ ise D'ye *yoğun (dense)* denir. Buna denk olarak D yoğun olması için gerek ve yeter koşul her $\emptyset \neq U \in \tau$ için $D \cap X \neq \emptyset$'dir.

Uyarı 2.3.2 U ve V; bir X kümesindeki boştan farklı açık iki yoğun küme olsun. Ayrıca $U \cap V$ kesişimi de yoğundur ve $U \cap V$ boştan farklıdır.

3. KUİVER TEMSİLLERİ

Bu bölümde Schiffler (2014) temel alınarak, sonlu boyutlu cebirlerin temsil teorisinde önemli yer tutan, kuiverlar ve onların temsilleri tanıtılarak bazı örnekler verilecektir.

3.1 Kuiver Temsilleri ve Temsil Morfizmleri

Bu bölümde ilk olarak kuiver kavramı tanıtılacaktır. Bir kuiver, sonlu ve yönlendirilmiş olması bakımından, köşelerin ve kenarların oluşturduğu bir sistem olan çizgenin (grafın) özel halidir. Daha sonra kuiver temsili ve temsil morfizmi kavramları tanıtılarak bazı örnekler verilecektir.

Tanım 3.1.1 Aşağıdaki biçimde tanımlanan $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ sistemi bir *kuiver (quiver)* olarak adlandırılır.

Q_0: Köşe (vertex) lerden oluşan bir küme
Q_1: Ok (arrow) lardan oluşan bir küme
$s : Q_1 \to Q_0$ fonksiyonu, her oku başlangıç (source) köşesine götüren fonksiyon
$t : Q_1 \to Q_0$ fonksiyonu, her oku bitiş (terminal) köşesine götüren fonksiyon

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

Örnek 3.1.2 $Q_0 = \{1, 2, 3\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu\}$, $s(\alpha) = 3$, $s(\beta) = 2$, $s(\gamma) = 3$, $s(\lambda) = 1$, $s(\mu) = 1$ ve $t(\alpha) = 2$, $t(\beta) = 1$, $t(\gamma) = 3$, $t(\lambda) = 3$, $t(\mu) = 3$ ile tanımlı bir kuiver'ın diyagramı ;

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\beta"'] & \\
1 \arrow[rr, shift left, "\lambda"] \arrow[rr, shift right, "\mu"'] & & 3 \arrow[ul, "\alpha"'] \arrow[loop right, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

ile gösterilir.

Uyarı 3.1.3 Bir kuiverdaki okların yönlendirilmesi kaldırıldığında elde edilen Q_0 köşeleri ve Q_1 kenarlarının oluşturduğu çizgeye *kuiverın altında yatan yönlendirilmemiş çizge (underling undirected graph)* denir ve $\hat{Q}$ ile gösterilir. Bir Q kuiverının altında yatan $\hat{Q}$ çizgesi bağlantılı ise, Q kuiverı *bağlantılı (connected)* olarak adlandırılır.

Eğer Q_0 ve Q_1 kümeleri sonlu ise; bir Q kuiverı *sonlu (finite)* olarak adlandırılır. Böylece; bir kuiver sonlu ve yönlendirilmiş bir çizge olarak düşünülebilir.

Bu çalışmada tüm kuiverlar sonlu ve bağlantılı olacaktır.

Tanım 3.1.4 Bir Q kuiverı verilsin. Q'daki her bir $i \in Q_0$ köşesine bir k-vektör uzayı olan M_i ve her bir $\alpha \in Q_1$ okuna bir $M_i \xrightarrow{\varphi_\alpha} M_j$ lineer dönüşümünün karşılık getirilmesi ile oluşturulan $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ sistemine bir *temsil* (*representation*) denir.

Uyarı 3.1.5 Bir M temsilinin bir elemanı $m_i \in M_i$ olmak üzere $m = (m_i)_{i\in Q_0}$ sıralısı biçimindedir.

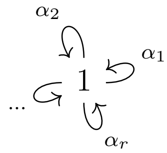
Uyarı 3.1.6 Bir $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ temsilinde her bir $i \in Q_0$ köşesine karşılık gelen M_i vektör uzayı $0 = \{0\}$ ise bu temsile sıfır temsili denir ve $M = 0$ ile gösterilir. Burada φ_α lineer dönüşümlerinin de sıfır dönüşümü olduğu açıktır. Eğer M sıfırdan farklı bir temsil ise, en az bir $i \in Q_0$ için $M_i \neq 0$ olur.

Uyarı 3.1.7 Bir Q kuiverının bir M temsilinin *boyut vektörü* (*dimension vector*); her bir M_i vektör uzayının boyutlarının oluşturduğu sıralı olarak tanımlanır. Yani her $i \in Q_0$ için $\dim M_i = n_i$ ise $M_i \cong k^{n_i}$ olup M temsilinin boyut vektörü

$$\underline{\dim} M = \underline{n} = (\dim M_i)_{i\in Q_0} = (n_i)_{i\in Q_0}$$

ile gösterilir. Bir M temsilinde her bir M_i vektör uzayı sonlu boyutlu ise M temsili sonlu boyutlu olarak adlandırılır. Her bir $\varphi_\alpha : M_{s(\alpha)} \to M_{t(\alpha)}$ lineer dönüşümü $n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}$ tipinde bir matris olarak ifade edilebilir.

Örnek 3.1.8 Bir köşe ve $r \geq 1$ tamsayısı için r tane oktan oluşan aşağıda belirtilen kuivera *r-loop kuiver* denir ve L_r ile gösterilir.



Bu kuiverın bir temsili; bir M vektör uzayı ve onun $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \ldots \varphi_{\alpha_r}$ endomorfizmalarından oluşur. Böylece L_r'nin temsillerinin izomorfizma sınıflarının boyut vektörü M'nin bir tabanına karşılık gelen $n \times n$ tipindeki matrislerin r-sıralısına karşılık gelen n'dir.

Örnek 3.1.9 İki köşe ve $r \geq 1$ tamsayısı için r tane oktan oluşan aşağıda belirtilen kuivera *r-oklu Kronecker kuiver* denir ve K_r ile gösterilir.

$$1 \;\underset{a_r}{\overset{a_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}}\; 2$$

Bu kuiverın bir temsili; M_1 ve M_2 sırasıyla 1 ve 2 köşelerine karşılık gelen vektör uzayları ve her $i = 1, 2, \ldots, r$ için $\varphi_{\alpha_i} : M_1 \to M_2$ lineer dönüşümleriyle birlikte $(M_1 \oplus M_2, \{\varphi_{\alpha_i}\}_{\alpha \in K_{r1}})$ formundadır. Bu temsilin boyut vektörü $m, n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $(m, n) := (\dim M_1, \dim M_2)$ sıralısı biçimindedir.

Örnek 3.1.10 Köşelerinin kümesi $r \geq 1$ tamsayısı için $\{1, 2, \ldots, r, c\}$ ve oklarının kümesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ olan aşağıda belirtilen kuivera *yıldız (star) kuiver* denir ve S_r ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd}
r \arrow[drr, "a_r"] & & 1 \arrow[d, "a_1"] & & 2 \arrow[dll, "a_2"'] \\
r-1 \arrow[rr, "a_{r-1}"] & & c & & 3 \arrow[ll, "a_3"] \\
r-2 \arrow[urr, "a_{r-2}"] & & \ldots & & 4 \arrow[ull, "a_4"]
\end{tikzcd}$$

Bu kuiverın bir temsili; $M_1, M_2, \ldots, M_r$ sırasıyla $1, 2, \ldots r$ köşelerine karşılık gelen vektör uzayları ve N; c köşesine karşılık gelen vektör uzayı ve her bir $i = 1, 2, \ldots r$ için $\varphi_{\alpha_i} : M_i \to N$ lineer dönüşümleriyle birlikte $(M_1 \oplus \ldots M_r \oplus N, \{\varphi_{\alpha_i}\}_{\alpha \in S_{r1}})$ formundadır. Her bir $i = 1, 2, \ldots r$ için $\dim M_i = m_i$ ve $\dim N = n$ olmak üzere $M_i \cong k^{m_i}$ ve $N \cong k^n$ olup bu temsilin boyut vektörü $(m_1, \ldots, m_r, n)$ sıralısı biçimindedir.

Örnek 3.1.11 Q kuiverı $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ olsun. Q kuiverının

$$M: \quad k \xrightarrow{1} k$$

$$M': \quad k \xrightarrow{0} k$$

$$M'': \quad k \xrightarrow{0} 0$$

$$M''': \quad k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} k^3$$

temsilleri gözönüne alındığında bu temsillerin boyut vektörleri sırasıyla

$$\underline{\dim} M = \underline{\dim} M' = (1,1), \ \underline{\dim} M'' = (1,0) \ \text{ ve } \ \underline{\dim} M''' = (2,3)$$

biçimindedir.

Tanım 3.1.12 $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ ve $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ bir Q kuiverının iki temsili olsun. Q_1'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan bir $f : M \to M'$ fonksiyonu bir *temsil morfizmi* (*representation morphism*) olarak adlandırlır.

$$\begin{array}{ccc} M_i & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & M_j \\ \downarrow{\scriptstyle f_i} & & \downarrow{\scriptstyle f_j} \\ M'_i & \xrightarrow{\varphi'_\alpha} & M'_j \end{array}$$

Yani bir $f : M \to M'$ temsil morfizmi; her $m \in M_i$ için

$$(f_j \circ \varphi_\alpha)(m) = (\varphi'_\alpha \circ f_i)(m)$$

olacak şekilde f_i: $M_i \longrightarrow M'_i$ lineer dönüşümlerin bir $(f_i)_{i \in Q_0}$ koleksiyonudur.

Uyarı 3.1.13 Bir k cismi üzerinde bir Q kuiverının sonlu boyutlu temsilleri temsil morfizmleri ile birlikte bir kategori oluşturur. Bu kategori $\mathrm{rep}_k Q$ ile gösterilir.

Uyarı 3.1.14 Herhangi bir $f = (f_i)_{i \in Q_0} : M \to M'$ temsil morfizminde her bir f_i hem birebir hem de örten ise f bir izomorfizmdir. Yani f'nin izomorfizm olması için gerek ve yeter koşul her bir $i \in Q_0$ için f_i lineer dönüşümlerinin terslenebilir (izomorfim) olmasıdır. f bir izomorfizm ise M temsili M' temsiline izomorf denir ve $M \cong M'$ ile gösterilir. Bir M temsiline izomorf olan tüm temsillerin sınıfı M'nin *izosınıfı* (isoclass$M$) olarak adlandırılır. $M, M' \in \mathrm{rep}Q$ temsilleri için M'den M''ye giden tüm temsil morfizmlerinin kümesi $\mathrm{Hom}(M, M')$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.15 $M, M' \in \mathrm{rep}Q$ olsun. Tüm temsil morfizmlerinin $\mathrm{Hom}(M, M')$ kümesi; her $f, g \in \mathrm{Hom}(M, M')$, $m \in M$ ve $\lambda \in k$ için

$$(f \oplus g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$(\lambda \odot f)(m) = \lambda f(m)$$

ile tanımlı toplama ve skaler çarpma işlemlerine göre bir k-vektör uzayıdır.

Örnek 3.1.16 Q: $1 \longrightarrow 2$ kuivernın

$$M \;:\; k \xrightarrow{\quad 1 \quad} k$$

$$M'' \;:\; k \xrightarrow{\quad 0 \quad} 0$$

temsillerini alalım. $f = (f_1, f_2) : M \longrightarrow M''$ temsil morfizmi f_1; $a \in k$ ile skaler çarpım ve f_2; sıfır dönüşümü ile belirlidir. Yani

$$\begin{tikzcd} M : \arrow[d, "f"] & k \arrow[r, "1"] \arrow[d, "a"'] & k \arrow[d, "0"] \\ M'' : & k \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapar. Böylece $\mathrm{Hom}(M, M'') \cong \{(a, 0) \mid a \in k\} \cong k$ olur. Şimdi aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan $g : M'' \to M$ temsil morfizmini belirleyelim.

$$\begin{tikzcd} M'' : \arrow[d, "g"] & k \arrow[r, "0"] \arrow[d, "g_1"'] & 0 \arrow[d, "g_2=0"] \\ M \;: & k \arrow[r, "1"] & k \end{tikzcd}$$

Her $c \in k$ için $(0 \circ g_2)(c) = (1 \circ g_1)(c)$ olmalıdır. Buradan $g_1 = 0$ olur. g_2'nin sıfır dönüşümü olduğu açıktır. Sonuç olarak $g = (g_1, g_2) = (0, 0)$ olup M'' den M'ye sadece sıfır temsil morfizmi vardır. Yani $\mathrm{Hom}(M'', M) = 0$ olur.

Örnek 3.1.17

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
& 3 & 4 \arrow[l, "\gamma"'] \\
2 \arrow[ur, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

ile verilen Q kuiverının

$$M: \begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}"] & & \\
& k^2 & k \arrow[l, "{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}"'] \\
k \arrow[ur, "{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$M': \begin{tikzcd}
0 \arrow[dr, "0"] & & \\
& k & 0 \arrow[l, "0"'] \\
0 \arrow[ur, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$M'': \begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "1"] & & \\
& k & k \arrow[l, "1"'] \\
k \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

temsilleri gözönüne alındığında

$$\mathrm{Hom}(M, M') = 0, \qquad \mathrm{Hom}(M, M'') \cong k^2$$

$$\mathrm{Hom}(M', M) \cong k^2, \qquad \mathrm{Hom}(M'', M) = 0$$

olur. Şimdi $\mathrm{Hom}(M, M'') \cong k^2$ olduğunu gösterelim. $M \to M''$ temsil morfizmi aşağıdaki diyagramı değişmeli yapacak şekilde $a, b, c, d, e \in k$ skalerlerinin seçimi ile belirlenir.

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[dr, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] \arrow[ddd, bend right, "{[a]}"'] & & \\
& k^2 \arrow[ddd, "{[c\ d]}"] & k \arrow[l, "\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[ddd, "{[e]}"] \\
k \arrow[ur, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"'] \arrow[ddd, bend right, "{[b]}"'] & & \\
k \arrow[dr, "1"] & & \\
& k & k \arrow[l, "1"'] \\
k \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

diyagramların değişmeli olmasından aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$a = c, \qquad b = d, \qquad c + d = e.$$

Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(M, M'') &= \{([\,a\,], [\,b\,], [\,a \quad b\,], [\,a+b\,]) \mid a, b \in k\} \\ &\cong k^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 3.1.18 2-oklu Kronecker $1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\leftleftarrows}} 2$ kuivermın aşağıdaki temsillerini gözönüne alalım.

$$M: \quad k^2 \underset{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\overset{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} k$$

$$M': \quad k^2 \underset{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\overset{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} k^2$$

$\mathrm{Hom}(M, M')$'yi belirleyelim. $f = (f_1, f_2)$; M'den M''ye bir temsil morfizmi olsun. Bu durumda f_1 ve f_2 lineer dönüşümleri $a, b, c, d, x, y \in k$ olmak üzere

$$f_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad f_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. f bir temsil morfizmi olduğundan diyagramlar değişmeli yani $f_1\varphi_\alpha = \varphi'_\alpha f_2$ ve $f_1\varphi_\beta = \varphi'_\beta f_2$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix}$$

olup

$$f = (f_1, f_2) = \left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}\right)$$

bulunur.

$$\left\{\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)\right\}$$

kümesi $\mathrm{Hom}(M, M')$ için bir taban olduğundan $\mathrm{Hom}(M, M') \cong k^2$ olur.

3.2 Dik Toplam ve Ayrıştırılamaz Temsiller

M ve N temsilleri verildiğinde, bu iki temsilin dik toplamı olarak adlandırılan yeni bir temsil aşağıdaki gibi tanımlanır. Diğer yandan herhangi bir X temsili verildiğinde X'i sıfırdan farklı iki temsilin bir dik toplamı içinde ayrıştırabiliriz. Yani M ve N sıfırdan farklı temsiller olmak üzere $X = M \oplus N$ yazılabilir. Bu durumda M ve N dik toplananlarının da bir ayrışımı yazıldığında her bir M_i ayrıştırılamaz temsil olacak şekilde $X = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots M_t$ yazılmış olur. Böylece X temsilinin yapısını anlamak için onu oluşturan daha basit yapıya sahip olan ayrıştırılamaz M_i temsillerini incelemek yeterli olur.

Tanım 3.2.1 Q bir kuiver ve $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ ve $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)$; Q'nun iki temsili olsun.

$$M \oplus M' = \left(M_i \oplus M'_i, \begin{bmatrix} \varphi_\alpha & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha \end{bmatrix}\right)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$$

ile tanımlanan Q'nun bir temsiline M ve M'' nün *dik toplamı* (*direct sum*) denir.

Uyarı 3.2.2 İki temsilin dik toplamının tanımı sonlu sayıda temsil için yineleyerek sonlu sayıda $M_1, M_2, \cdots, M_t \in \mathrm{rep}Q$ temsilleri için

$$M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_t = (M_1 \oplus \cdots \oplus M_{t-1}) \oplus M_t$$

ile tanımlanır.

Örnek 3.2.3

$$Q: \quad 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$$

kuiverının

$$M: \quad k \xrightarrow{\;1\;} k \xleftarrow{\;0\;} 0$$

$$M': \quad k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

temsillerini alalım. $M \oplus M'$ dik toplam temsili

$$k \oplus k^2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k \oplus k^2 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} 0 \oplus k$$

ile tanımlıdır ve aşağıdaki dik toplama izomorftur.

$$k^3 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} k^3 \xleftarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} k$$

Tanım 3.2.4 Sıfırdan farklı bir $M \in \mathrm{rep}Q$ temsili; sıfırdan farklı iki temsilin bir dik toplamı olarak yazılamazsa, yani; $N, L \in \mathrm{rep}Q$ olmak üzere $M \cong N \oplus L$ iken $N = 0$ veya $L = 0$ oluyorsa M'ye *ayrıştırılamaz temsil* (*indecomposable representation*) denir.

Örnek 3.2.5 Örnek 3.1.17 ve 3.1.18'deki kuiverların verilen temsilleri ayrıştırılamaz temsillerdir. Örnek 3.2.3'deki kuiverın M temsili ayrıştırılamaz temsil, fakat M' temsili aşağıdaki dik toplama izomorf olan bir ayrıştırılabilir temsildir.

$$\Big(k \xrightarrow{\;1\;} k \xleftarrow{\;1\;} k \Big) \oplus \Big(k \xrightarrow{\;1\;} k \xleftarrow{\;0\;} 0 \Big)$$

Örnek 3.1.11'deki M ve M'' temsilleri ayrıştırılamazdır fakat M' ve M''' temsilleri ayrıştırılabilirdir.

Aşağıda ispatsız olarak verilen Krull-Schmidt teoremi her bir M temsilinin ayrıştırılamaz temsillerin bir dik toplamı olarak tek türlü yazıldığını ifade eder.

Teorem 3.2.6 (Krull-Schmidt Teoremi) Q bir kuiver ve $M \in \text{rep}Q$ olsun. Her bir $M_i \in \text{rep}Q$ ayrıştırılamaz temsil olmak üzere

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_t$$

biçiminde tek türlü yazılır.

Örnek 3.2.7 Derksen ve Weyman (2005); $1 \xrightarrow{\alpha} 2$ kuiverının

$$A: \quad k \xrightarrow{0} 0 \ , \qquad B: \quad 0 \xrightarrow{0} k \quad \text{ve} \quad C: \quad k \xrightarrow{1} k$$

ayrıştırılamaz temsilleri yardımıyla bu kuiverın herhangi bir $M : M_1 \xrightarrow{\varphi_\alpha} M_2$ temsilinin

$$d_1 = \text{dim}M_1, \quad d_2 = \text{dim}M_2, \quad r = \text{rank}\varphi_\alpha$$

olmak üzere

$$M \cong A^{d_1-r} \oplus B^{d_2-r} \oplus C^r$$

biçiminde yazıldığını ifade etmiştir.

3.3 Çekirdek, Eşçekirdek ve Tam Diziler

Bu bölümde lineer cebir alanında kullanılan, bir lineer dönüşümün çekirdeği ve eşçekirdeği gibi bazı kavramlar temsil teoriye genişletilecektir.

Tanım 3.3.1 Bir Q kuiverının $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ ve $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ temsilleri ile $f = (f_i)_{i\in Q_0} : M \to M'$ temsil morfizmi verilsin. Her bir $i \in Q_0$ için; $f_i : M_i \to M'_i$ lineer dönüşümünün çekirdeği $L_i = \text{ker}f_i = \{m_i \in M_i | f_i(m_i) = 0\}$ olsun. Q_1'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku ve her $x \in L_i$ için $\psi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x)$ ile tanımlı bir $\psi_\alpha : L_i \to L_j$ lineer dönüşümü vardır. ψ_α iyi tanımlıdır. Gerçekten; her $x \in L_i$ için f bir temsil morfizmi olduğundan $f_j\varphi_\alpha(x) = \varphi'_\alpha f_i(x)$ olup $f_i(x) = 0$ ve buradan $f_j\varphi_\alpha(x) = 0$ bulunur. Böylece $\varphi_\alpha(x) \in \text{ker}f_j$ yani; $\psi_\alpha(x) \in L_j$ elde edilir.
Bu şekilde tanımlanan $(L_i, \psi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ temsili f'nin *çekirdeği* (*kernel*) olarak adlandırılır ve $\text{ker}f$ ile gösterilir.

Uyarı 3.3.2 Her bir $i \in Q_0$ için $\text{inc}_i : \ker f_i \hookrightarrow M_i$ içerim dönüşümü yardımıyla bir birebir $\iota = (\text{inc}_i)_{i\in Q_0} : \ker f \hookrightarrow M$ temsil morfizmi belirlenir.

Tanım 3.3.3 Bir Q kuivernın $M = (M_i, \varphi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ ve $M' = (M'_i, \varphi'_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ temsilleri ile $f = (f_i)_{i\in Q_0} : M \to M'$ temsil morfizmi verilsin. Her bir $i \in Q_0$ köşesi için $f_i : M_i \to M'_i$ lineer dönüşümünün eşçekirdeği $N_i = \text{coker} f_i = M'_i/f_i(M_i)$ olsun. Q_1'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku ve her bir $m'_i \in M'_i$ için $\chi_\alpha(m'_i + f_i(M_i)) = \varphi'_\alpha(m'_i) + f_j(M_j)$ ile tanımlı bir $\chi_\alpha : N_i \to N_j$ lineer dönüşümü vardır. χ_α iyi tanımlıdır. Gerçekten; $m'_i, m''_i \in M'_i$ olmak üzere $m'_i + f_i(M_i) = m''_i + f_i(M_i)$ olsun. Bu durumda $m'_i - m''_i \in f_i(M_i)$ ve $\varphi'_\alpha(m'_i - m''_i) = \varphi'_\alpha(m'_i) - \varphi'_\alpha(m''_i)$ olup f bir temsil morfizmi olduğundan $\varphi'_\alpha f_i(M_i) = f_j\varphi_\alpha(M_i) \subset f_j(M_j)$ bulunur. Böylece $\chi_\alpha(m'_i + f_i(M_i)) = \chi_\alpha(m''_i + f_i(M_i))$ elde edilir.
Bu şekilde tanımlanan $(N_i, \chi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ temsili f'nin *eşçekirdeği* (*cokernel*) olarak adlandırılır ve $\text{coker} f$ ile gösterilir.

Uyarı 3.3.4 Her bir $i \in Q_0$ için $\text{proj}_i : M'_i \twoheadrightarrow \text{coker} f_i$ projeksiyonu yardımıyla bir örten $\rho = (\text{proj}_i)_{i\in Q_0} : M' \twoheadrightarrow \text{coker} f$ temsil morfizmi belirlenir.

Yukarıda tanımlanan bir temsil morfizminin çekirdeği ve eşçekirdeği kavramları kategori teoride "evrensellik özelliği "(universal property) bakımından aşağıdaki şekilde tanımlanır. Kategorik anlamda verilen aşağıdaki tanımlar ilerde ifade edilecek sonuçların ispatında kullanılacaktır.

Tanım 3.3.5 Bir $M \xrightarrow{g} N$ temsil morfizminin çekirdeği; $gf = 0$ olacak şekilde bir $L \xrightarrow{f} M$ morfizmi ile birlikte L temsilidir. Öyle ki $gv = 0$ olacak şekilde başka bir $X \xrightarrow{v} M$ morfizmi için aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $fu = v$ olacak şekilde bir tek $X \xrightarrow{u} L$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\exists! u"'] \arrow[d, "v"] & \\ L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & N \end{tikzcd}$$

Uyarı 3.3.6 Kategorik anlamda, Tanım 3.3.1'deki çekirdek tanımı evrensellik özelliğine sahiptir. Gerçekten; $M = (M_i, \varphi_\alpha)$, $L = (L_i, \psi_\alpha)$ ve $X = (X_i, \chi_\alpha)$ birer temsil olmak üzere rep$Q$'da bir $g : M \to N$ temsil morfizmi verilsin. ker$g = L$ ve $\iota : L \hookrightarrow M$ içerim dönüşümü olmak üzere (L, ι) temsilinin g'nin bir çekirdeği olduğunu gösterelim. Her $i \in Q_0$ ve her $m_i \in L_i =$ kerg_i için $g_i\iota_i(m_i) = g_i(m_i) = 0$ olup $g\iota = 0$ bulunur. Diğer yandan $gv = 0$ olacak şekilde başka bir $v : X \to M$ temsil morfizmi var olsun. Bu durumda her $i \in Q_0$ ve her $x_i \in X_i$ için $v(x_i) \in$ ker$g_i = L_i$ olur. Böylece $u : X \to L$ morfizması $u_i(x_i) = v_i(x_i)$ olarak tanımlanabilir. Böylece $\iota u = v$ olduğu açıktır. Şimdi u'nun bir temsil morfizmi olduğunu gösterelim. Bunun için

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "u"] \arrow[dd, bend right=50, "v"'] \\
L \arrow[d, hook, "\iota"] \\
M
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[r, "\chi_\alpha"] \arrow[d, "u_i"] \arrow[dd, bend right=50, "v_i"'] & X_j \arrow[d, "u_j"'] \arrow[dd, bend left=50, "v_j"] \\
L_i \arrow[r, "\psi_\alpha"] \arrow[d, hook, "\iota_i"] & L_j \arrow[d, hook, "\iota_j"'] \\
M_i \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & M_j
\end{tikzcd}
$$

birinci diyagramın değişmeli olduğu gösterilmelidir. u ve L'nin tanımı ve v'nin bir temsil morfizmi olduğu kullanılarak her $x_i \in X_i$ için

$$\psi_\alpha u_i(x_i) = \varphi_\alpha v_i(x_i) = v_j \chi_\alpha(x_i) = u_j \chi_\alpha(x_i)$$

elde edilir. ι içerim morfizmi olduğundan u'nun bu özelliklere sahip tek temsil morfizmi olduğu görülür.

Tanım 3.3.7 Bir $L \xrightarrow{f} M$ temsil morfizminin eşçekirdeği; $gf = 0$ olacak şekilde bir $M \xrightarrow{g} N$ morfizmi ile birlikte N temsilidir. Öyle ki $vf = 0$ olacak şekilde başka bir $M \xrightarrow{v} X$ morfizmi için, aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan; yani $ug = v$ olacak şekilde bir tek $N \xrightarrow{u} X$ morfizmi vardır.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "v"'] & N \arrow[d, dashed, "\exists! u"] \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

Uyarı 3.3.8 Kategorik anlamda, Tanım 3.3.3'deki eşçekirdek tanımının evrensellik özelliğine sahip olduğu $N = \mathrm{coker}f$ ve g yerine $\rho : M \twoheadrightarrow \mathrm{coker}f$ morfizmi alınarak Uyarı 3.3.5'ya benzer olarak gösterilir.

Tanım 3.3.9 rep$Q$'da bir M temsili verilsin. Eğer birebir bir $i : L \hookrightarrow M$ temsil morfizmi var ise L'ye M'nin bir *alttemsili* (*subrepresentation*) denir. Bu durumda i'nin eşçekirdeği $\mathrm{coker}i = M/L$ *bölüm temsili* (*quotient representation*) olarak tanımlanır.

Teorem 3.3.10 (Birinci İzomorfizma Teoremi) rep$Q$'da bir $f : M \to N$ temsil morfizmi için

$$\mathrm{im}f \cong M/\mathrm{ker}f$$

olur.

İspat $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ olmak üzere $f : M \to N$ temsil morfizmi verilsin. Q_1'deki her $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku için

$$\begin{array}{cccc} M: & & M_i \xrightarrow{\varphi_\alpha} M_j \\ f \big\downarrow & & f_i \big\downarrow \qquad\quad f_j \big\downarrow \\ imf: & & f(M_i) \xrightarrow{\psi_\alpha} f(M_j) \end{array}$$

diyagramı değişmeli yani her $m_i \in M_i$ için $\psi_\alpha f_i(m_i) = f_j\varphi_\alpha(m_i)$ olacak şekilde tanımlanan ψ_α lineer dönüşümleriyle birlikte $(f(M_i), \psi_\alpha)$ ikilisi bir temsildir ve $\mathrm{im}f$ ile gösterilir. Diğer yandan $\chi_\alpha(m_i + \mathrm{ker}f_i) = \varphi_\alpha(m_i) + \mathrm{ker}f_j$ ile tanımlanan lineer dönüşümlerle birlikte $M/\mathrm{ker}f = (M_i/\mathrm{ker}f_i, \chi_\alpha)$ ikilisi de bir temsil olur. Her f_i lineer dönüşümü yardımıyla $\overline{f_i}(m_i + \mathrm{ker}f_i) = f_i(m_i)$ tanımlansın. Her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku için $\psi_\alpha\overline{f_i} = \overline{f_i}\varphi_\alpha$ eşitliği sağlandığından $\overline{f}$ bir temsil morfizmidir. Sonuç olarak yukarıdaki biçimde tanımlanan $\overline{f_i} : M_i/\mathrm{ker}f_i \to \mathrm{im}f_i$ bir izomorfizma olup $\mathrm{im}f \cong M/\mathrm{ker}f$ bulunur. □

Tanım 3.3.11 rep$Q$'da temsil morfizmlerinin bir $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ dizisi verilsin. $\mathrm{im}f = \mathrm{ker}g$ oluyorsa bu diziye *tam dizi* (*exact sequence*) denir. Her bir f_i için

$$\cdots \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots$$

dizisi tam, yani $\mathrm{im}f_i = \mathrm{ker}f_{i+1}$ ise bu diziye tamdır denir.

Tanım 3.3.12

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam dizi *kısa tam dizi* (*short exact sequence*) olarak adlandırılır. Bu dizinin kısa tam dizi olması için gerek ve yeter koşul f'nin birebir, $\mathrm{im} f = \ker g$ ve g'nin örten olmasıdır.

Uyarı 3.3.13 Brion (2008); bir Q kuiverının sonlu boyutlu temsillerinden oluşan

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisinde, temsillerin boyut vektörleri arasında

$$\underline{\dim} M = \underline{\dim} M' + \underline{\dim} M''.$$

biçiminde bir ilişki olduğunu belirtmiştir. Aynı zamanda, herhangi sonlu boyutlu izomorf olan temsillerin aynı boyut vektörüne sahip olduğunu ifade etmiştir.

Örnek 3.3.14 rep$Q$'da verilen bir $f : M \longrightarrow N$ temsil morfizmi yardımıyla

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\rho} \mathrm{coker} f \longrightarrow 0$$

tam dizisi yazılabilir. Ayrıca

$$0 \longrightarrow \ker f \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\rho} M/\ker f \longrightarrow 0$$

kısa tam dizi olur.

Örnek 3.3.15 $Q: \; 1 \longrightarrow 2$ kuiverının

$$S(2): \; 0 \longrightarrow k$$

$$M \; : \; k \xrightarrow{1} k$$

$$S(1): \; k \longrightarrow 0$$

temsillerini göz önüne alalım. $f = (f_1, f_2) = (0, 1)$ ve $g = (g_1, g_2) = (1, 0)$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \longrightarrow 0$$

dizisi kısa tam dizidir. $f' = (f_1', f_2') = (0, 1)$, $g' = (g_1', g_2') = (1, 0)$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f'} S(1) \oplus S(2) \xrightarrow{g'} S(1) \longrightarrow 0$$

dizisi de başka bir kısa tam dizidir.

Tanım 3.3.16 $f : L \to M$ bir temsil morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] & M \arrow[l, bend left, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

$h \circ f = 1_L$ olacak şekilde $h : M \to L$ morfizmi var ise f'ye bir *kesit (section)* denir.
$g : M \to N$ bir temsil morfizmi olsun.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] & N \arrow[l, bend left, dashed, "k"] \end{tikzcd}$$

$g \circ k = 1_N$ olacak şekilde $k : N \to M$ morfizmi var ise g'ye bir *büzülme (retraction)* denir.

Tanım 3.3.17

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizi olsun. f bir kesit ise bu diziye *parçalanan (split) dizi* denir.

Örnek 3.3.18 Örnek 3.3.15'deki kısa tam olan

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S(2) \arrow[r, "f'"] & S(1) \oplus S(2) \arrow[l, bend left, dashed, "h'"] \arrow[r, "g'"] & S(1) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dizisini gözönüne alalım. $h' \circ f' = 1_{S(2)}$ olacak şekilde $h' : S(1) \oplus S(2) \longrightarrow S(2)$ var olduğundan bu dizi parçalanan dizidir. Fakat

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanan değildir. Çünkü $h \circ f = 1_{S(2)}$ olacak şekilde $h : M \longrightarrow S(2)$ yoktur.

Önerme 3.3.19 rep$Q$'da bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisi verilsin.

(a) f bir kesittir ancak ve ancak g bir büzülmedir.

(b) f bir kesit ise, im$f$(=ker$g$); M'nin bir dik toplananıdır.

İspat (a)($\Rightarrow$) Kabul edelim ki f bir kesit olsun. Bu durumda $h \circ f = 1_L$ olacak şekilde bir $h : M \to L$ morfizmi vardır. $g : M \to N$ morfizminin büzülme olduğunu gösterelim. Bunun için $g \circ h' = 1_N$ olacak şekilde $h' : N \to M$ morfizmi şu şekilde tanımlansın: Her $n \in N$ için g örten olduğundan $g(m) = n$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. O halde $h'(n) = m - (f \circ h)(m)$ olsun. Şimdi h''nün tanımının m'nin seçiminden bağımsız olduğunu gösterelim. $g(m) = g(m') = n$ olacak şekilde $m, m' \in M$ alalım. Bu durumda $g(m) - g(m') = g(m - m') = 0$ olup $m - m' \in$ ker$g = imf$ bulunur. Buradan $m - m' = f(\ell)$ olacak şekilde $\ell \in L$ vardır.

$$\begin{aligned}
(m - f \circ h(m)) - (m' - f \circ h(m')) &= m - m' - f \circ h(m - m') \\
&= m - m' - f \circ h \circ f(\ell) \\
&= m - m' - f(\ell) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Böylece $m - f \circ h(m) = m' - f \circ h(m')$ olup h''nün tanımı m'nin seçiminden bağımsız yani h' iyi tanımlıdır. Şimdi h''nün bir temsil morfizmi olduğunu gösterelim. $L = (L_i, \varphi_\alpha)$, $M = (M_i, \varphi'_\alpha)$ ve $N = (N_i, \varphi''_\alpha)$ olsun. Q_1'deki her $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku için aşağıdaki diyagramda kareler değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_i"] & L_j \arrow[d, "f_j"'] \\
M_i \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] \arrow[u, bend left, "h_i"] \arrow[d, "g_i"] & M_j \arrow[u, bend right, "h_j"'] \arrow[d, "g_j"'] \\
N_i \arrow[r, "\varphi''_\alpha"] \arrow[u, bend left, "h'_i"] & N_j \arrow[u, bend right, "h'_j"']
\end{tikzcd}$$

Yani f bir temsil morfizmi olduğundan $\varphi'_\alpha f_i = f_j\varphi_\alpha$, g bir temsil morfizmi olduğundan $\varphi''_\alpha g_i = g_j\varphi'_\alpha$ ve h bir temsil morfizmi olduğundan $\varphi_\alpha h_i = h_j\varphi'_\alpha$ eşitlikleri vardır. h' nün bir morfizm olması için her $n_i \in N_i$ için

$$(\varphi'_\alpha h'_i)(n_i) = (h'_j\varphi''_\alpha)(n_i)$$

eşitliği sağlanmalıdır. h' nün tanımı gereğince $g_i(m_i) = n_i$ olacak şekilde $h'_i(n_i) = m_i - (f_ih_i)(m_i)$ olduğu gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}(\varphi'_\alpha h'_i)(n_i) &= \varphi'_\alpha(h'_i(n_i))\\ &= \varphi'_\alpha(m_i - (f_ih_i)(m_i))\\ &= \varphi'_\alpha(m_i) - \varphi'_\alpha f_ih_i(m_i)\\ &= \varphi'_\alpha(m_i) - f_j\varphi_\alpha h_i(m_i)\\ &= \varphi'_\alpha(m_i) - f_jh_j\varphi'_\alpha(m_i) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Diğer yandan;

$$\begin{aligned}(h'_j\varphi''_\alpha)(n_i) &= h'_j\varphi''_\alpha g_i(m_i)\\ &= h_jg_j\varphi'_\alpha(m_i)\\ &= h_j(g_j(\varphi'_\alpha(m_i)))\\ &= \varphi'_\alpha(m_i) - f_jh_j\varphi'_\alpha(m_i) \qquad (3.2)\end{aligned}$$

(3.1) ve (3.2)'den $\varphi'_\alpha h'_i = h'_j\varphi''_\alpha$ olup h' bir temsil morfizmidir. Şimdi $g \circ h' = 1_N$ olduğunu gösterelim. $n \in N$ alalım. g örten olduğundan $g(m) = n$ olacak şekilde $m \in M$ vardır.

$$\begin{aligned}(gh')(n) &= g(h'(n)))\\ &= g(m - fh(m))\\ &= g(m) - gfh(m)\\ &= g(m)\\ &= n\\ &= 1_N(n)\end{aligned}$$

Sonuç olarak g bir büzülmedir.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki g bir büzülme olsun. Bu durumda $g \circ h' = 1_N$ olacak şekilde bir $h' : N \to M$ morfizmi vardır. f 'nin kesit olduğunu gösterelim. $h \circ f = 1_L$ olacak şekilde $h : M \to L$ morfizmini tanımlayalım. $m \in M$ olmak üzere $g(m - h'g(m)) = g(m) - gh'g(m) = g(m) - g(m) = 0$ olup $m - h'g(m) \in \ker g = \mathrm{im} f$ olduğundan $f(\ell) = m - h'g(m)$ olacak şekilde bir tek $\ell \in L$ vardır. Bundan dolayı $h(m) = \ell$ ile tanımlanır. h'nin tanımından $h \circ f = 1_L$ olduğu açıktır. Şimdi h'nin rep$Q$'da bir temsil morfizmi olduğunu gösterelim. Her $m_i \in M_i$ için

$$(\varphi_\alpha h_i)(m_i) = (h_j \varphi'_\alpha)(m_i)$$

olduğunu göstermeliyiz. $m_i \in M_i$ ve $\ell_i \in L_i$ için $f_i(\ell_i) = m_i - h'_i g_i(m_i)$ olacak şekilde h'nin tanımından

$$(\varphi_\alpha h_i)(m_i) = \varphi_\alpha(h_i(m_i)) = \varphi_\alpha(\ell_i) \tag{3.3}$$

$m_i \in M_i$ için $\varphi'_\alpha(m_i) \in M_j$ olup h'nin tanımından

$$(h_j \varphi'_\alpha)(m_i) = \ell_j \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir tek $\ell_j \in L$ vardır. Bu durumda

$$f_j(\ell_j) = \varphi'_\alpha(m_i) - h'_j g_j \varphi'_\alpha(m_i) \tag{3.5}$$

olur. (3.3) ve (3.4) eşitliklerinin sağ taraflarının eşit olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. f, g ve h' nün birer temsil morfizmi olduğu kulllanılarak

$$\begin{aligned}
f_i(\ell_i) = m_i - h'_i g_i(m_i) &\Rightarrow m_i = f_i(\ell_i) + h'_i g_i(m_i) \\
&\Rightarrow \varphi'_\alpha(m_i) = \varphi'_\alpha f_i(\ell_i) + \varphi'_\alpha h'_i g_i(m_i) \\
&\Rightarrow \varphi'_\alpha(m_i) = f_j \varphi_\alpha(\ell_i) + h_j \varphi''_\alpha g_i(m_i) \\
&\Rightarrow \varphi'_\alpha(m_i) = f_j \varphi_\alpha(\ell_i) + h_j g_j \varphi'_\alpha(m_i) \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinden $-h_j g_j \varphi'_\alpha(m_i) = f_j(\ell_j) - \varphi'_\alpha(m_i)$ olduğu (3.6) eşitliğinde kullanılırsa $f_j(\varphi_\alpha(\ell_i)) = f_j(\ell_j)$ olur. f_j'ler birebir olduğundan $\ell_j = \varphi_\alpha(\ell_i)$ olup (3.3) ve (3.4) eşitliklerinin sağ tarafları eşit bulunur.

(b) Kabul edelim ki f bir kesit olsun. Verilen dizi tam olduğundan $\mathrm{im}f = \ker g$ olup $\ker g$'nin M'nin bir dik toplananı olduğunu gösterelim. (a) şıkkından g bir büzülme olduğundan $g \circ h' = 1_N$ olacak şekilde $h' \in \mathrm{Hom}(N, M)$ vardır. $m = (m_i)_{i \in Q_0} \in M$ olmak üzere

$$m_i = h'_i g_i(m_i) + (m_i - h'_i g_i(m_i))$$

biçiminde yazabilir. Burada $h'_i g_i(m_i) \in \mathrm{im}h'_i$ ve $m_i - h'_i g_i(m_i) \in \ker g_i$ dir. Bundan dolayı $M = \mathrm{im}h'_i + \ker g_i$ olur. Şimdi $\mathrm{im}h'_i \cap \ker g_i = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $x \in \mathrm{im}h'_i \cap \ker g_i$ alalım. Bu durumda $x \in \mathrm{im}h'_i$ ve $x \in \ker g_i$'dir. $g_i(x) = g_i h'_i(n_i) = 1_N(n_i) = n_i = 0$ olup $x = h'(n_i) = h'(0) = 0$ bulunur. Sonuç olarak $M = \mathrm{im}h'_i \oplus \ker g_i$'dir.

Son olarak Q_1'deki her bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku için M temsilinin lineer dönüşümlerinin

$$\begin{bmatrix} \varphi'_\alpha|_{imh'_i} & 0 \\ 0 & \varphi'_\alpha|_{kerg_i} \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğunu gösterelim. $m_i \in \ker g_i$ alalım. Bu durumda $g_i(m_i) = 0$ olup buradan g bir temsil morfizmi olduğundan $\varphi''_\alpha g_i(m_i) = 0 = g_j \varphi'_\alpha(m_i)$ olup $\varphi'_\alpha(m_i) \in \ker g_j$ olur. Yani yukarıdaki matrisin sağ üst bloğu $\varphi'_\alpha |_{kerg_j} = 0$ bulunur.

$m_i \in \mathrm{im}h'_i$ ise, $m_i = h'_i(n_i)$ olacak şekilde $n_i \in N_i$ vardır. Her iki tarafın φ'_α altında görüntüsü alınırsa $\varphi'_\alpha(m_i) = \varphi'_\alpha h'_i(n_i) = h'_j \varphi''_\alpha(n_i) \in \mathrm{im}h'_j$ olur. Böylece yukarıdaki matrisin sol alt bloğunun 0 olduğu görülür. □

Sonuç 3.3.20

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanan tam dizi ise, $M \cong L \oplus N$ dir.

İspat Verilen dizi parçalanan dizi olsun. Bu durumda f bir kesittir. Önerme 3.3.19 gereğince $\mathrm{im}f$, M'nin bir dik toplananıdır. Diğer yandan $f : L \longrightarrow M$ morfizmi için I.izomorfizma teoremi gereğince $L/\ker f \cong \mathrm{im}f$ olur. Bu dizi tam dizi olduğundan f birebir yani $\ker f$=0 olup $L/0 \cong L \cong \mathrm{im}f$ bulunur. Böylece L, M'nin bir dik toplananı olur. Diğer yandan $g : M \longrightarrow N$ morfizmi için I.izomorfizma teoremi gereğince $M/\ker g \cong \mathrm{im}g$ olur. Dizi tam olduğundan $\mathrm{im}g = N$ ve $\ker g = \mathrm{im}f \cong L$ olduğu kullanılarak $M/L \cong N$ elde edilir. Sonuç olarak $M = L \oplus N$ olup ispat tamamlanır. □

3.4 Hom Funktorları

Homoloji cebirde soldan tam oldukları bilinen sırasıyla kovaryant ve kontravaryant olan $\mathrm{Hom}(X,-)$ ve $\mathrm{Hom}(-,X)$ funktorlarının rep$Q$ kategorisinde de bu özelliği sağladığı aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3.4.1 Q bir kuiver ve

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

rep$Q$'da bir dizi olsun. Bu dizinin tam dizi olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \mathrm{rep}Q$ temsili için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X,N)$$

dizisinin tam olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ dizisi tam olsun. Bu durumda f birebir, im$f$=ker$g$ ve g örtendir. İkinci dizinin tam olduğunu göstermek için f_*'ın birebir ve imf_*=kerg_* olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $u \in \ker f_*$ alalım. Bu durumda $f_*(u) = f \circ u = 0$'dır. Her $x \in X$ için $(f \circ u)(x) = f(u(x)) = 0$ olup f birebir olduğundan $u = 0$'dır. Dolayısıyla f_* birebirdir. Şimdi imf_*=kerg_* olduğunu gösterelim. $u \in \mathrm{Hom}(X,L)$ alalım. Bu durumda $f_*(u) \in \mathrm{Hom}(X,M)$ olup dizi tam olduğundan $g_*(f_*(u)) = g \circ f \circ u = 0$ bulunur. Böylece $g_*f_* = 0$ olup $\mathrm{im}f_* \subset \ker g_*$ elde edilir. Diğer yandan, $v \in \ker g_*$ alalım. Bu durumda $g_*(v) = g \circ v = 0$ olur. Tanım 3.3.5'den g'nin çekirdeğinin evrensellik özelliği kullanılarak $g \circ v = 0$ olacak şekilde v morfizması için $f \circ u = v$ olacak şekilde bir tek $u \in \mathrm{Hom}(X,L)$ morfizmasının var olduğunu kullanarak $v = f \circ u = f_*(u) \in \mathrm{im}f_*$ bulunur. Böylece $\ker g_* \subset \mathrm{im}f_*$ olup ispat tamamlanır.

$(\Leftarrow)$ $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X,N)$ dizisi tam olsun. $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ dizisinin tam olduğunu gösterelim. Öncelikle f'nin birebir olduğunu gösterelim. X temsili yerine ker$f$ alınırsa $i : X \hookrightarrow L$ içerim dönüşümü olur. $f_*(i) = f \circ i = 0$ ve f_* birebir olduğundan $i = 0$ bulunur. i birebir olduğundan $X = 0 = \ker f$ olup f birebirdir. Şimdi im$f$=ker$g$ olduğunu gösterelim.

X yerine L temsilini alalım. $g_*f_* = 0$ olduğundan $g_*f_*(1_L) = g \circ f \circ 1_L = g \circ f = 0$ olur. Buradan im$f \subset$ ker$g$ elde edilir. Diğer yandan X yerine ker$g$ temsili alınırsa $i : X \hookrightarrow M$ içerim morfizması olur. Bu durumda $g_*(i) = g \circ i = 0$ olup $i \in$ ker$g_* =$ imf_* olduğundan $i = f_*(u) = f \circ u$ olacak şekilde bir $u \in \mathrm{Hom}(X, L)$ vardır. Böylece $i(X) = X =$ ker$g =\subset$ im$f$ bulunur. Sonuç olarak im$f$=ker$g$ olup dizinin tam olduğu ispatlanmış olur. $\square$

Sonuç 3.4.2 rep$Q$'da bir

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisinin parçalanan tam dizi olması için gerek ve yeter koşul her $X \in$ rep$Q$ için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X, L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X, N) \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) İlk dizinin parçalanan tam dizi olduğunu kabul edelim. Teorem 3.4.1 gereğince g_*'ın örten olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $u \in \mathrm{Hom}(X, N)$ alalım. Kabulden $gh = 1_N$ olacak şekilde $h \in \mathrm{Hom}(N, M)$ vardır. Böylece $g_*(hu) = ghu = 1_N u = u$ olacak şekilde $hu \in \mathrm{Hom}(X, M)$ var olduğundan g_* örtendir.

($\Leftarrow$) İkinci dizinin tam olduğunu kabul edelim. Teorem 3.4.1 gereğince

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

dizisi tam olur. g'nin örten ve bir büzülme olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. X yerine N temsilini alalım. g_* örten olduğundan $1_N \in \mathrm{Hom}(N, N)$ için

$$g_*(h) = gh = 1_N$$

olacak şekilde $h \in \mathrm{Hom}(N, M)$ var olduğundan g bir büzülme olur. Ayrıca; her $n \in N$ için $g(h(n)) = 1_N(n) = n$ olacak şekilde $h(n) \in M$ var olduğundan g örtendir. $\square$

Uyarı 3.4.3

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanan ise, $gh = 1_N$ olup buradan $g_* h_* = 1_{\mathrm{Hom}(X,N)}$ olduğundan

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(X,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(X,N) \longrightarrow 0$$

dizisi de parçalanandır.

Teorem 3.4.1 ve Sonuç 3.4.2'nin dual versiyonu olarak, $\mathrm{Hom}(-,X)$ kontravaryant funktoru için, aşağıdaki teorem ve sonuç ispatsız olarak ifade edilecektir.

Teorem 3.4.4 rep$Q$'da bir

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \mathrm{rep}Q$ için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(L,X)$$

dizisinin tam olmasıdır.

Sonuç 3.4.5 rep$Q$'da bir

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisinin parçalanan tam olması için gerek ve yeter koşul her $X \in \mathrm{rep}Q$ için

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(N,X) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,X) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(L,X) \longrightarrow 0$$

dizisinin tam olmasıdır.

Uyarı 3.4.6 Aşağıdaki örnekten görüleceği gibi

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

dizisi parçalanan değil ise, f^* ve g_* her zaman örten olmak zorunda değildir.

Örnek 3.4.7 Örnek 3.3.15'deki parçalanan olmayan

$$0 \longrightarrow S(2) \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} S(1) \longrightarrow 0$$

kısa tam dizisini gözönüne alalım. X yerine $S(1)$ alınıp $\mathrm{Hom}(S(1),-)$ funktoru bu diziye uygulanırsa $\mathrm{Hom}(S(1),M) = 0$ ve $\mathrm{Hom}(S(1),S(1)) \cong k$ olduğu kullanılarak $g_* : \mathrm{Hom}(S(1),M) \to \mathrm{Hom}(S(1),S(1))$ morfizminin örten olmadığı görülür.

3.5 Kuiverda Yollar

Kuiver temsil teorisinin temel amacı; verilen bir Q kuiverı için onun tüm temsillerini ve bu temsiller arasındaki morfizmleri belirlemektir. Bunun için en iyi yol, verilen kuiverın Auslander-Reiten kuiverı denilen yeni bir kuiverı oluşturmaktır. Q bir kuiver olmak üzere, Q'nun Auslander-Reiten kuiverı;

- Köşeleri; Q'nun ayrıştırılamaz temsillerinin izosınıfları
- Okları; Ayrıştırılamaz iki temsil arasındaki indirgenmez morfizmler

olan Γ_Q ile gösterilen yeni bir kuiverdır. Auslander-Reiten kuiverın köşeleri, rep$Q$'daki temsiller için, okları ise rep$Q$'daki temsil morfizmleri için birer yapı taşıdır. Bir Q kuiverının ayrıştırılamaz temsillerinin izosınıflarının sayısı sonlu ise, o kuiverın Γ_Q Auslander-Reiten kuiverı oluşturularak, rep$Q$ hakkında tam bilgi elde edilir. Bu bölümde, Auslander-Reiten kuiverın oluşturulmasında önemli yer tutan ve ayrıştırılamaz olan basit, projektif ve injektif temsiller tanıtılacaktır. Bunun için gerekli olan bazı gösterimler aşağıda ifade edilmiştir.

Tanım 3.5.1 Q bir kuiver ve $i, j \in Q_0$ olsun. Q'da i'den j'ye giden ℓ uzunluğunda bir c *yolu (path)*; $\alpha_h \in Q_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} s(\alpha_1) &= i, \\ s(\alpha_h) &= t(\alpha_{h-1}), \quad h = 2, 3, \ldots, \ell \quad , \\ t(\alpha_\ell) &= j \end{aligned}$$

olacak şekildeki bir c=$(i|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|j)$ dizisidir.

Örnek 3.5.2

$$Q : \quad \alpha \circlearrowright 1 \xrightarrow{\beta} 2 \xleftarrow{\gamma} 3$$

kuiverında $(1|\alpha|1)$, $(1|\alpha, \beta|2)$, $(1|\alpha, \alpha, \beta|2)$ sırasıyla 1, 2, 3 uzunluklu yollardır. Fakat $(1|\alpha, \beta, \gamma|2)$ bir yol değildir.

Tanım 3.5.3

(1) i köşesindeki $\ell = 0$ uzunluklu $(i||i)$ yoluna *sabit yol (lazy path)* denir ve e_i ile gösterilir.

(2) Bir $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku bir uzunluklu $(i|\alpha|j)$ yoludur. Özel olarak $i = j$ ise $(i|\alpha|i)$ yolu bir *döngü (loop)* olarak adlandırılır.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[loop right, "\alpha"] \end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\alpha_1"] & \bullet \arrow[r, "\alpha_2"] & \bullet \arrow[r, "\alpha_3"] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{\ell-1}"] & \bullet \arrow[llll, bend left, "\alpha_\ell"] \end{tikzcd}$$

formundaki bir $(i|\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\ell|i)$ yolu *yönlendirilmiş döngü (oriented cycle)* olarak adlandırılır.

3.6 Basit, Projektif ve İnjektif Temsiller

Bu bölümde temsil teorinin temel kavramları olan basit, projektif ve injektif temsiller tanıtılacaktır. Bu bölümde Q yönlendirilmiş döngü içermeyen bir kuiver olacaktır. Q'daki her i köşesi için $S(i)$, $P(i)$ ve $I(i)$ ile gösterilen üç tane ayrıştırılamaz temsil tanımlanır. Bu temsiller kategorik anlamda, rep$Q$ kategorisinde basit, projektif ve injektif objelere karşılık gelirler. Bir kuiverın temsillerinin gösteriminde kolaylık sağlayan notasyon aşağıda ifade edilmiştir.

Tanım 3.6.1 Bir Q kuiverının köşelerinin kümesi $Q_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$, $M = (M_i, \varphi_\alpha)$; Q'nun bir ayrıştırılamaz temsili ve $\underline{\dim} M = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$; M temsilinin boyut vektörü olsun. $1, 2, \ldots, n$ rakamları kullanılarak M temsilinin farklı bir gösterimi şöyledir: Bir $\alpha : i \to j$ okuna karşılık gelen $\varphi_\alpha : M_i \to M_j$ lineer dönüşümü sıfırdan farklı ise i rakamı j rakamının üzerinde ve her bir i rakamı d_i defa yazılır.

Örnek 3.6.2 Q: $1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ kuiverının bazı temsillerinin rakamlarla gösterimi aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{array}{ccc}
k \longrightarrow 0 \longleftarrow 0 & = & 1 \\
0 \longrightarrow k \longleftarrow 0 & = & 2 \\
0 \longrightarrow 0 \longleftarrow k & = & 3 \\
k \xrightarrow{1} k \longleftarrow 0 & = & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \\
0 \longrightarrow k \xleftarrow{1} k & = & \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \\
k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k & = & \begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ & 2 & \end{array}
\end{array}$$

Herhangi bir kuiverın her bir köşesi için yazılan basit, projektif ve injektif temsiller aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 3.6.3

- Vektör uzayları: i köşesinde bir boyutlu diğer köşelerde 0 boyutlu olan ve
- Lineer dönüşümlerinin: tamamı sıfır olan temsile *basit temsil (simple representation)* denir. Yani i köşesindeki basit temsil:

$$S(i)_j = \begin{cases} \text{k}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \qquad ve \qquad \varphi_\alpha = 0$$

olmak üzere $S(i)$=$(S(i)_j, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ biçimindedir.

Tanım 3.6.4

- Vektör uzayları: i'den j'ye giden tüm yolların kümesini taban kabul eden vektör uzayları ve
- Lineer dönüşümleri: i'den j'ye giden bir c yolunun sonuna α okunun eklenmesiyle i'den ℓ'ye giden bir $c\alpha$ yoluna götüren dönüşümler olan $P(i)$=$(P(i)_j, \varphi_\alpha)_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ temsiline *projektif temsil (projective representation)* denir. Yani i köşesindeki projektif temsil:

(i) $P(i)_j$'nin elemanları: c; i'den j'ye giden tüm yollar ve $\lambda_c \in k$ olmak üzere $\sum_c \lambda_c c$ formundadır.

(ii) φ_α lineer dönüşümleri: $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ oku yardımıyla $P(i)_j$'nin bir tabanı ile $P(i)_\ell$'nin bir tabanı arasında aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$P(i)_j \text{ tabanı} \longrightarrow P(i)_\ell \text{ tabanı}$$

$$c = (i|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s|j) \longmapsto c\alpha = (i|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s|\ell)$$

olmak üzere

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c c\right) = \sum_c \lambda_c c\alpha$$

ile tanımlanır.

Tanım 3.6.5

• Vektör uzayları: j'den i'ye giden tüm yolların kümesini taban kabul eden vektör uzayları ve

• Lineer dönüşümleri: j'den i'ye giden bir c yolu $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ oku ile başlıyorsa, α okunun silinmesiyle ℓ'den i'ye giden bir yola, α ile başlamıyorsa c yolunu 0'a götüren dönüşümler olan $I(i) = (I(i)_j, \varphi_\alpha)_{j\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ temsiline *injektif temsil (injective representation)* denir. Yani i köşesindeki injektif temsil:

(i) $I(i)_j$ 'nin elemanları; c; j'den i'ye giden tüm yollar ve $\lambda_c \in k$ olmak üzere $\sum_c \lambda_c c$ formundadır.

(ii) φ_α lineer dönüşümleri: $j \xrightarrow{\alpha} \ell$ oku yardımıyla $I(i)_j$'nin bir tabanı ile $I(i)_\ell$'nin bir tabanı arasında aşağıdaki biçimde tanımlıdır:

$$I(i)_j \text{ tabanı} \xrightarrow{f} I(i)_\ell \text{ tabanı}$$

$$c = (j|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s|i) \longmapsto \begin{cases} (\ell|\beta_2, \ldots, \beta_s|i) & ; \beta_1 = \alpha; \\ 0 & ; \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\varphi_\alpha\left(\sum_c \lambda_c c\right) = \sum_c \lambda_c f(c)$$

ile tanımlanır.

Uyarı 3.6.6 rep$Q$; sonlu boyutlu temsillerin kategorisi olduğundan Q kuiverı yönlendirilmiş döngü içermemelidir. Aksi taktirde $P(i)$ sonsuz boyutlu olacak şekilde bir i köşesi var olup $P(i) \notin \text{rep}Q$ olur. Örneğin; yönlenmiş döngü içeren Q: $1 \rightleftarrows 2$ kuiverı gözönüne alındığında $P(1)$ ve $P(2)$ sonsuz boyutlu temsiller olur.

Uyarı 3.6.7 $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)$; i köşesindeki projektif temsil ve c; i'de başlayan bir yol yani $c = (i|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\ell|j)$ olsun. O zaman $P(i)$'deki lineer dönüşümlerin bileşkesi olarak

$$\varphi_c : \; P(i)_i \longrightarrow P(i)_j$$

$$\varphi_c = \varphi_{\beta_\ell} \cdots \varphi_{\beta_2}\varphi_{\beta_1}$$

ile tanımlıdır. Özel olarak c sabit yol ise $\varphi_c(e_i) = c$ olur.

Tanım 3.6.8

(1) Bir Q kuiverında $s(\alpha) = i$ olacak şekilde bir α oku yok ise i köşesi *batak (sink)* olarak adlandırılır. i köşesindeki projektif temsilin basit temsil olması için gerek ve yeter koşul i'nin batak olmasıdır. Yani;

$$P(i) = S(i) \Leftrightarrow i \text{ bir bataktır.}$$

(2) Bir Q kuiverında $t(\alpha) = i$ olacak şekilde bir α oku yok ise i köşesi *kaynak (source)* olarak adlandırılır. i köşesindeki injektif temsilin basit temsil olması için gerek ve yeter koşul i'nin kaynak olmasıdır. Yani;

$$I(i) = S(i) \Leftrightarrow i \text{ bir kaynaktır.}$$

Aşağıdaki iki örnekte, iki farklı kuiverın tüm köşelerindeki basit, projektif ve injektif temsiller gösterilmiştir.

Örnek 3.6.9

$$\begin{tikzcd} Q: & 1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 4 \arrow[l] \\ & & & 5 & \end{tikzcd}$$

olmak üzere Q'nun basit temsilleri:

$$\begin{tikzcd} S(1) \cong & k \arrow[r, "0"] & 0 & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] & = & 1 \\ & & & 0 & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S(2) \cong & 0 \arrow[r, "0"] & k & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] & = & 2 \\ & & & 0 & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S(3) \cong & 0 \arrow[r, "0"] & 0 & k \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] & = & 3 \\ & & & 0 & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S(4) \cong & 0 \arrow[r, "0"] & 0 & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & k \arrow[l, "0"'] & = & 4 \\ & & & 0 & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} S(5) \cong & 0 \arrow[r, "0"] & 0 & 0 \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "0"] & 0 \arrow[l, "0"'] & = & 5 \\ & & & k & & & \end{tikzcd}$$

Q'nun projektif temsilleri;

$$\begin{tikzcd} P(1) \cong k \arrow[r, "1"] & k & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} P(2) \cong 0 \arrow[r] & k & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 2 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} P(3) \cong 0 \arrow[r] & k & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[l] \\ & & k & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 3 \\ 2\ 5 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} P(4) \cong 0 \arrow[r] & k & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d, "1"] & k \arrow[l, "1"'] \\ & & k & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2\ 5 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} P(5) \cong 0 \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & & k & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 5 \end{array}$$

Q'nun injektif temsilleri;

$$I(1) \cong \begin{tikzcd} k \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \quad 1$$

$$I(2) \cong \begin{tikzcd} k \arrow[r, "1"] & k & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d] & k \arrow[l, "1"'] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \quad \begin{array}{c} 4 \\ 3\ 1 \\ 2 \end{array}$$

$$I(3) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 & k \arrow[l, "1"'] \arrow[d] & k \arrow[l, "1"'] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \quad \begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array}$$

$$I(4) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 & 0 \arrow[l] \arrow[d] & k \arrow[l] \\ & & 0 & \end{tikzcd} = \quad 4$$

$$I(5) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & 0 & k \arrow[l] \arrow[d, "1"] & k \arrow[l, "1"'] \\ & & k & \end{tikzcd} = \quad \begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 5 \end{array}$$

Örnek 3.6.10

$$\begin{tikzcd} Q: 1 \arrow[rr] \arrow[dr] & & 3 \arrow[r] & 4 \\ & 2 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

olmak üzere Q'nun basit temsilleri;

$$S(1) \cong \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} = 1$$

$$S(2) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \\ & k \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} = 2$$

$$S(3) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "0"] & 0 \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} = 3$$

$$S(4) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & k \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} = 4$$

Q'nun projektif temsilleri;

$$P(1) \cong \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}"] \arrow[dr, "1"'] & & k^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] & k^2 \\ & k \arrow[ur, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"'] & & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 1 \\ 2\ 3\ 3 \\ 4\ 4 \end{array}$$

$$P(2) \cong \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "1"] & k \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & \end{tikzcd} = \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$P(3) \cong \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & k \arrow[r, "1"] & k \\ & 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$P(4) \cong \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & k \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} \quad = \quad 4$$

Q'nun injektif temsilleri;

$$I(1) \cong \quad \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} \quad = \quad 1$$

$$I(2) \cong \quad \begin{tikzcd} k \arrow[rr, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \\ & k \arrow[ur, "0"'] & & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

$$I(3) \cong \quad \begin{tikzcd} k^2 \arrow[rr, "{[1 \ \ 0]}"] \arrow[dr, "{[0 \ \ 1]}"'] & & k \arrow[r, "0"] & 0 \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2\ 3 \end{matrix}$$

$$I(4) \cong \quad \begin{tikzcd} k^2 \arrow[rr, "{[1 \ \ 0]}"] \arrow[dr, "{[0 \ \ 1]}"'] & & k \arrow[r, "1"] & k \\ & k \arrow[ur, "1"'] & & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{matrix} 1\ 1 \\ 2\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Uyarı 3.6.11 Kategori teorisinde; bir basit obje, sıfırdan ve kendisinden başka altobjesi olmayan objelerdir. $S(i)$ basit temsillerinin bu özelliğe sahip olduğu açıktır.

Uyarı 3.6.12 Kategori teorisinde; bir projektif obje, $\mathrm{Hom}(P,-)$ funktoru örten morfizmleri örten morfizmlere dönüştürecek şekildeki bir P objesidir. Aşağıda ispatsız olarak verilen önermede $P(i)$ projektif temsillerinin bu özelliğe sahip olduğu ifade edilir.

Önerme 3.6.13 rep$Q$'da bir $g : M \to N$ temsil morfizmi örten ve i köşesindeki projektif temsil $P(i)$ olsun. $\mathrm{Hom}(P(i),-)$ funktoru g'ye uygulanırsa;

$$g_* : \mathrm{Hom}(P(i), M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(P(i), N)$$

temsil morfizmi örten olur.
Diğer bir deyişle; $f : P(i) \longrightarrow N$ herhangi bir morfizm ise aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $f = g \circ h = g_*(h)$ olacak şekilde $h : P(i) \longrightarrow M$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd} & P(i) \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sonuç 3.6.14 rep$Q$'da P projektif ise,

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam dizi parçalanandır.

Uyarı 3.6.15 Kategori teorisinde; bir injektif obje, $\mathrm{Hom}(-,I)$ funktoru birebir morfizmleri örten morfizmlere dönüştürecek şekildeki bir I objesidir. Aşağıda ispatsız olarak verilen önermede $I(i)$ injektif temsillerinin bu özelliğe sahip olduğu ifade edilir.

Önerme 3.6.16 rep$Q$'da bir $g : L \longrightarrow M$ temsil morfizmi birebir ve i köşesindeki injektif temsil $I(i)$ olsun. $\mathrm{Hom}(-, I(i))$ funktoru g'ye uygulanırsa;

$$g^* : \mathrm{Hom}(M, I(i)) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, I(i))$$

temsil morfizmi örten olur.

Diğer bir deyişle, $f : L \longrightarrow I(i)$ herhangi bir morfizm ise aşağıdaki diyagramı değişmeli yapan, yani $f = h \circ g = g^*(h)$ olacak şekilde bir $h : M \longrightarrow I(i)$ morfizmi vardır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, "h"] \\
& I(i) &
\end{tikzcd}$$

Sonuç 3.6.17 rep$Q$'da I injektif ise;

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{g} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

formundaki bir tam dizi parçalanandır.

Aşağıdaki önerme, rep$Q$'da projektif (injektif) temsillerin dik toplamının ve toplananlarının projektif (injektif) olduğunu ifade eder.

Önerme 3.6.18 rep$Q$'daki P, P', I, I' temsilleri için

(1) $P \oplus P'$ projektiftir $\Leftrightarrow$ P ve P' projektiftir.

(2) $I \oplus I'$ injektiftir $\Leftrightarrow$ I ve I' injektiftir.

İspat

(1) ($\Rightarrow$) $P \oplus P'$ projektif olsun. P'nin projektif olduğunu gösterelim. Benzer olarak P''nün projektif olduğu gösterilir. rep$Q$'da $g : M \longrightarrow N$ örten bir temsil morfizmi ve $f : P \to N$ herhangi bir temsil morfizmi olsun. Aşağıdaki diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
& P \oplus P' \arrow[ddl, "h"'] \arrow[d, "p_1"] & \\
& P \arrow[u, bend right, "i_1"'] \arrow[dl, dashed, "h'"] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

p_1; birinci toplanana izdüşüm ve i_1; birinci toplanana doğal gömülme dönüşümleri olmak üzere $p_1 \circ i_1 = 1_P$ olduğu açıktır. $P \oplus P'$ projektif olduğundan $gh = fp_1$ olacak şekilde $h : P \oplus P' \to M$ vardır. Böylece

$$gh' = ghi_1 = fp_1 i_1 = f1_P = f$$

olacak şekilde $h' = hi_1 : P \to M$ morfizmi var olup P projektiftir.

($\Leftarrow$) P ve P' projektif olsun. $P \oplus P'$ projektif olduğunu gösterelim. Aşağıdaki diyagramları gözönüne alalım.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddl, "h_1"'] & \\
 & P \oplus P' \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h'"'] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, "i_2"] \arrow[ddl, "h_2"'] & \\
 & P \oplus P' \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "h'"'] & \\
M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

i_1 ve i_2 sırasıyla birinci ve ikinci toplanana doğal gömülme dönüşümleri olmak üzere P projektif olduğundan $gh_1 = fi_1$ olacak şekilde $h_1 : P \to M$ morfizmi vardır. P' projektif olduğundan $gh_2 = fi_2$ olacak şekilde $h_2 : P' \to M$ morfizmi vardır. Her $p + p' \in P \oplus P'$ için $h' = (h_1, h_2) : P \oplus P' \to M$ morfizmi $h'(p + p') = h_1(p) + h_2(p')$ ile tanımlı olmak üzere

$$gh'(p + p') = gh_1(p) + gh_2(p') = fi_1(p) + fi_2(p') = f(p + p')$$

olduğundan $gh' = f$ olup $P \oplus P'$ projektiftir.

(2) (1) şıkkına benzer olarak ispatlanır. $\square$

Önerme 3.6.19 $S(i)$, $P(i)$ ve $I(i)$ temsilleri ayrıştırılamazdır.

İspat $S(i)$ basit temsillerin, tanımından dolayı, ayrıştırılamaz olduğu açıktır. $P(i) = (P(i)_j, \varphi_\alpha)_{j \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ projektif temsillerinin ayrıştırılamaz olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $P(i)$ ayrıştırılabilir olsun. Bu durumda $M \neq 0$ ve $N \neq 0$

olmak üzere $P(i) \cong M \oplus N$ biçiminde yazılır. Diğer yandan Q yönlendirilmiş döngü içermediği için $P(i)_i = k$ olup, buradan $k = P(i)_i \cong M_i \oplus N_i$ bulunur. Genelliği bozmaksızın $P(i)_i = M_i$ ve $N_i = 0$ kabul edilebilir. $N_\ell \neq 0$ olacak şekilde bir ℓ köşesi seçilsin. $c = (i|\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s|\ell)$ bir yol olmak üzere M_i'nin tek taban elemanı olan e_i'yi M_ℓ'nin bir elemanı olan $\varphi_c(e_i) = c$'ye götüren bir

$$\varphi_c : P(i)_i = M_i \oplus 0 \to P(i)_\ell = M_\ell \oplus N_\ell$$

lineer dönüşümü vardır. Buradan $N_\ell = 0$ olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $P(i)$ ayrıştırılamaz bir temsildir. □

Önerme 3.6.20 M temsilinin rep$Q$'da basit temsil olması için gerek ve yeter koşul $M \cong S(i)$ olacak şekilde bir $i \in Q_0$ var olmasıdır.

İspat ($\Leftarrow$) $M \cong S(i)$ ise $S(i)$'ler basit temsil olduğundan ispat açıktır.
($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $M = (M_i, \varphi_\alpha)$ basit temsil olsun. $S(i)$, M'nin alttemsili olacak şekilde bir $i \in Q_0$ köşesinin var olduğunu göstermeliyiz. i köşesinin batak olup olmamasına göre iki durum sözkonusudur. Eğer i bir batak ise, $M \cong S(i)$ olacak şekilde bir $i \in Q_0$ bulunmuş olur ve ispat tamamlanır. Eğer i bir batak değil ise $i \xrightarrow{\alpha} j$ oku vardır. Diğer yandan i köşesinde M temsilinin sıfırdan farklı olması gerektiğinden $M_i \neq 0$ ve $M_j = 0$ olacak şekilde $i \in Q_0$ seçilir. Q yönlendirilmiş döngü içermediği için böyle bir i her zaman vardır. Birebir olan herhangi bir $f_i : S(i)_i \cong k \to M_i$ lineer dönüşümü aşikar olarak bir $f : S(i) \to M$ morfizmine $i \neq j$ iken $f_j = 0$ alınarak genişletilir. Her $\ell \xrightarrow{\alpha} i$ ve $i \xrightarrow{\beta} j$ oku için

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"] & S(i)_i \arrow[r, "0"] \arrow[d, "f_i"] & 0 \arrow[d, "0"] \\ M_\ell \arrow[r, "\varphi_\alpha"] & M_i \arrow[r, "\varphi_\beta"] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $f : S(i) \to M$ temsil morfizminin birebir olduğu görülür. Bu durumda $S(i)$; M'nin bir alttemsili olur. Fakat M basit temsil olduğundan $S(i) = 0$ veya $S(i) \cong M$ dir. $S(i) \neq 0$ olduğundan $S(i) \cong M$ elde edilir. □

Uyarı 3.6.21 Q yönlendirilmiş döngü içeren bir kuiver ise Önerme 3.6.20 sağlanmaz. Örneğin;

$$Q \quad : \quad \alpha \circlearrowright 1$$

olsun. Her bir $\lambda \in k$ için f_λ; λ ile çarpım dönüşümleri olmak üzere

$$M : \quad f_\lambda \circlearrowright k$$

temsili hiçbir i köşesindeki basit temsile izomorf değildir.

Teorem 3.6.22 $M = (M_i, \psi_\alpha) \in \mathrm{rep}Q$ olsun. Q'daki herhangi bir i köşesi için

$$\mathrm{Hom}(P(i), M) \cong M_i$$

dir.

İspat Bir Q kuiverının herbir i köşesindeki sabit yol $e_i = (i||i)$ olsun. $\{e_i\}$ kümesi $P(i)_i$ vektör uzayları için bir tabandır.

$$\phi : \mathrm{Hom}(P(i), M) \longrightarrow M_i$$

$$f = (f_j)_{j \in Q_0} \longmapsto f_i(e_i)$$

ile tanımlanan ϕ dönüşümü, $P(i)$'den M'ye giden $f = (f_i)_{i \in Q_0}$ temsil morfizminin f_i (lineer dönüşümleri) bileşenleri yardımıyla tanımlandığından, iyi tanımlı olduğu açıktır.

Her $f, g \in \mathrm{Hom}(P(i), M)$ ve her $\lambda \in k$ için $\phi(f+g) = (f+g)_i(e_i) = f_i(e_i) + g_i(e_i) = \phi(f) + \phi(g)$ ve $\phi(\lambda f) = (\lambda f)_i(e_i) = \lambda f_i(e_i) = \lambda \phi(f)$ olduğundan ϕ; vektör uzayları arasında bir lineer dönüşümdür.

Şimdi ϕ'nin birebir olduğunu gösterelim. $f \in \ker\phi$ alalım. Bu durumda $\phi(f) = f_i(e_i) = 0$ olur. Buradan f_i lineer dönüşümleri e_i taban elemanlarını sıfıra götürdüğü için sıfır dönüşümü olur. Herhangi bir j köşesi için $f_j : P(i)_j \to M_j$ lineer dönüşümlerinin de sıfır dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. Bunun için f temsil morfizmi olduğundan aşağıdaki değişmeli diyagramı gözönüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc} P(i) & : & P(i)_i & \xrightarrow{\varphi_c} & P(i)_j \\ f \big\downarrow & & f_i \big\downarrow & & \big\downarrow f_j \\ M & : & M_i & \xrightarrow{\varphi'_c} & M_j \end{array}$$

$P(i)$'nin tanımıdan; $P(i)_j$, i'den j'ye giden tüm yolları taban kabul ettiğinden $P(i)_j$'nin bir tabanı $c = (i|\alpha_1, \ldots, \alpha_t|j)$ yolu olsun. Bu durumda $\varphi_c = \varphi_{\alpha_t} \circ \ldots \circ \varphi_{\alpha_1}$ ve $\varphi'_c = \varphi'_{\alpha_t} \circ \ldots \circ \varphi'_{\alpha_1}$ olmak üzere $\varphi_c(e_i) = c$ olduğu kullanılarak diyagramın değişmeli olmasından her e_i taban elemanı için

$$f_j \varphi_c(e_i) = \varphi'_c f_i(e_i) = 0 \Rightarrow f_j(c) = 0$$

elde edilir. Böylece f_j lineer dönüşümleri $P(i)_j$'nin taban elemanlarını sıfıra götürdüğü için sıfır dönüşümü olur. Bundan dolayı $f = (f_i)_{i \in I} = 0$ olup ker$\phi = 0$ bulunur. Şimdi ϕ'nin örten olduğunu gösterelim. $m_i \in M_i$ alalım. $\phi(f) = f_i(e_i) = m_i$ olacak şekilde bir $f : \mathrm{Hom}(P(i), M) \to M_i$ morfizmini şu şekilde yapılandıralım: $f_i(e_i) = m_i$ olacak şekildeki $f_i : P(i)_i \to M_i$ bileşenini sabitleyelim. Bu f_i'yi Q'daki yolları takip ederek f'ye genişletelim. Daha açık olarak Q'da i'den j'ye bir c yolu için $f_j(c) = \varphi'_c(m_i)$ ile tanımlansın. Böylece f_j dönüşümleri $P(i)_j$'nin bir tabanı üzerinde tanımlanarak tüm $P(i)_j$ vektör uzayına genişletilebilir ve tanımından dolayı temsil morfizmi olma özelliğini de sağladığından $f \in \mathrm{Hom}(P(i), M)$ bulunur. Bundan dolayı ϕ örtendir. Sonuç olarak ϕ bir izomorfizmadır. □

Teorem 3.6.22'in bir sonucu olarak; M temsili yerine $P(j)$ projektif temsili alınırsa $P(i)$'den $P(j)$'ye giden temsil morfizmlerinin kümesi $P(j)_i$ vektör uzayına, M temsili yerine $P(i)$ projektif temsili alınırsa $P(i)$'den $P(i)$'ye giden temsil morfizmlerinin kümesi $P(i)_i$ vektör uzayına (ki bu da i'den i'ye sadece sabit yol var olduğundan bir boyutlu k vetör uzayına) izomorf olduğu aşağıda ifade edilmiştir.

Sonuç 3.6.23 $i, j \in Q_0$ olmak üzere

(1) $\mathrm{Hom}(P(i), P(j))$ vektör uzayının; Q'da j'den i'ye giden tüm yollardan oluşan bir tabanı vardır. Özel olarak,

$$\mathrm{Hom}(P(i), P(i)) = \mathrm{End}(P(i)) \cong k.$$

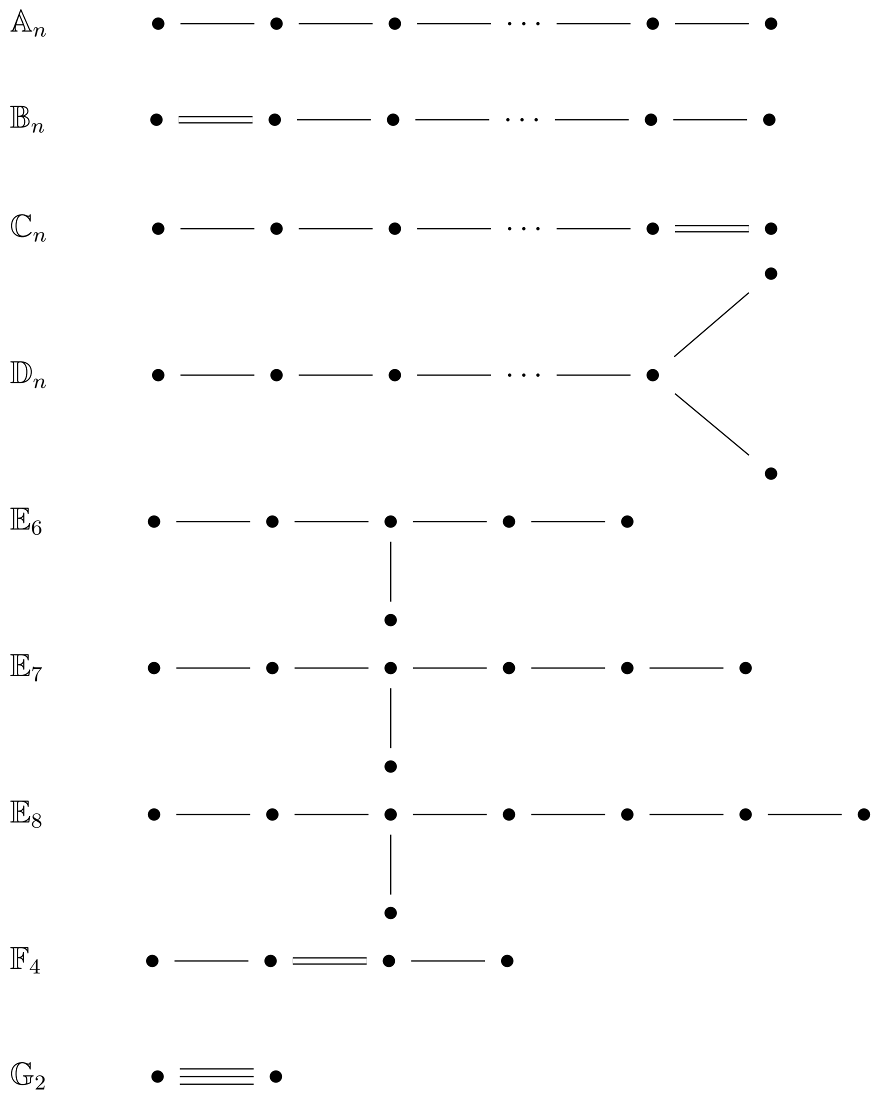
(2) Eğer $A = \oplus_{i \in Q_0} P(i)$ ise, $End(A) = \mathrm{Hom}(A, A)$ vektör uzayının Q'daki tüm yollardan oluşan bir tabanı vardır.

Sonuç 3.6.23 gereğince " j'nin bir batak olması için gerek ve yeter koşul $P(j)$ temsilinin basit olmasıdır " ifadesi kullanılarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.6.24 $P(j)$ temsili bir basit temsildir ancak ve ancak her $i \neq j$ için $\mathrm{Hom}(P(i), P(j)) = 0$'dır.

4. KUİVER TİPLERİ

Kuiverlar altında yatan çizgelere (graph) göre sınıflandırılır. 1940'lı yılların ortalarında sovyet matematikçi Eugene Dynkin tarafından yarıbasit Lie cebirlerinin sınıflandırılmasında *Dynkin (Coxeter-Dynkin)* diyagramları adı verilen aşağıdaki diyagramlar kullanılmıştır (Knapp 2002).



Yukarıda da görüldüğü gibi $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ tipli diagramlarda sadece bir tane paralel kenar bulunur ve $\mathbb{A}_n$; $n \geq 1$ için $\mathbb{D}_n$ ise $n \geq 4$ için tanımlıdır. Bu bölümde ilgileneceğimiz bu tip diagramlara *basitçe-bağlı* ya da *tekli-bağlı* (*simply-laced* or *single-laced*) Dynkin diagramı denir (Schiffler 2014).

Bu bölümde Peter Gabriel tarafından ispatlanan “Gabriel Teoremi”nin ayrıntılı ispatı verilecektir (Gabriel 1972). Bu teoremin birinci kısmında basitçe-bağlı Dynkin diyagramları yardımıyla sonlu kuiverlar için bir karakterizasyon verilmiştir. İkinci kısmında ise bir kuiverın her ayrıştırılamaz temsiline kök sistemlerinden bir pozitif kök karşılık geldiği ifade edilmiştir. Bu ikinci kısım Bernstein vd. (1973) tarafından coxeter funktorları yardımıyla Weyl grupları ve köklerin tekniği kullanılarak farklı bir şekilde ispatlanmıştır.

Her kuiver aşağıda belirtilen tiplerden biri formundadır. Kuiverların bu tiplerine göre ayrıştırılamaz temsillerinin davranışı farklıdır. Kuiver temsil teorisinin temel amacı, bir kuiverın tüm ayrıştırılamaz temsillerinin izomorfizma sınıflarını belirlemek olduğundan verilen bir kuiverın tipine göre bu sınıflandırmayı yapmak önemlidir.

4.1 Sonlu Tipli Kuiverlar

Bu bölümde Cummin (2011) ve Schiffler (2014) temel alınarak; sonlu tipli kuiverlar tanıtılarak bazı örnekler verilecektir. Bir kuiverın sonlu tipli olması için bir gerek ve yeter koşul içeren Gabriel teoremi ifade ve ispat edilecektir.

Tanım 4.1.1 Bir Q kuiverının ayrıştırılamaz temsillerinin izomorfizma sınıflarının sayısının sonlu ise Q'ya *sonlu (yörünge) tipli (finite (orbit) type)* kuiver denir.

Örnek 4.1.2 $Q \;:\; 1 \xrightarrow{\alpha} 2$ kuiverının ayrıştırılamaz temsilleri sadece $k \xrightarrow{0} 0$, $k \xrightarrow{0} 0$ ve $k \xrightarrow{1} k$ olduğundan bu kuiver sonlu tiplidir.

Örnek 4.1.3 $Q \;:\; 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ kuiverı sonlu tipli bir kuiverdır. Çünkü aşağıda gösterilen sadece 6 tane ayrıştırılamaz temsile sahiptir.

$$k \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \quad , \quad 0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{0} 0$$

$$0 \xrightarrow{0} 0 \xleftarrow{0} k \quad , \quad k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{0} 0$$

$$0 \xrightarrow{0} k \xleftarrow{1} k \quad , \quad k \xrightarrow{1} k \xleftarrow{1} k$$

Örnek 4.1.4 Örnek 3.1.10'daki S_r yıldız kuiverı $r < 4$ için bir sonlu tipli kuiverdır. Çünkü $r = 1$ için S_1; A_2-tipli Dynkin diyagrama, $r = 2$ için S_2; A_3-tipli Dynkin diyagrama, $r = 3$ için S_3; D_4-tipli Dynkin diyagrama sahiptir. Fakat $r \geq 4$ için S_r yıldız kuiverının ayrıştırılamaz temsilerinin sayısı sonlu olmadığından sonlu tipli kuiver değildir (Brion 2000).

Uyarı 4.1.5 Ringel (2012)'e göre farklı Dynkin tipli kuiverların ayrıştırılamaz temsillerinin sayısı aşağıdaki biçimde formüle edilmiştir:

$\mathbb{A}_n$	$\mathbb{D}_n$	$\mathbb{E}_6$	$\mathbb{E}_7$	$\mathbb{E}_8$
$\frac{1}{2}n(n+1)$	$n(n-1)$	36	69	120

Öncelikle Gabriel teoreminin ispatı için gerekli olan bazı kavramları verelim.

Tanım 4.1.6 Q bir kuiver, $\mid Q_0 \mid= r$ olmak üzere $\underline{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_r)$ olsun. Q'nun *boyut vektörü* $\underline{n}$ *olan temsillerinin uzayı (kategorisi)*

$$\operatorname{rep}_k(Q, \underline{n}) := \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \operatorname{Hom}(k^{n_{s(\alpha)}}, k^{n_{t(\alpha)}}).$$

ile tanımlanır.

k cismi üzerindeki $m \times n$ tipindeki matrislerin kümesinin $\operatorname{mat}_{m \times n}(k)$ ile gösterildiği ve Uyarı 3.1.7 gözönüne alınarak

$$\operatorname{rep}_k(Q, \underline{n}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \operatorname{mat}_{n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}}(k)$$

biçiminde gösterilebilir. Bu durumda her bir $\alpha \in Q_1$ için p_α; $n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}$ tipinde bir matris olmak üzere $\operatorname{rep}_k(Q, \underline{n})$'de bir M temsili $p := (p_\alpha)_{\alpha \in Q_1}$ sıralısı ile özdeş alınabilir.

Uyarı 4.1.7 Şimdi $\operatorname{rep}_k(Q, \underline{n})$'nin boyutunun nasıl hesaplandığını ifade edelim. $1 \leq i, j \leq r$ köşelerini ve $\alpha \in Q_1$ okunu sabitleyelim. $\operatorname{mat}_{n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}}(k)$ vektör uzayının herbir E^α_{ij} taban elemanının ij. bileşeni 1, diğer bileşenleri 0'dır. E^α_{ij} tabanındaki elemanlar bulunurken matrisin birinci satırında 1 bileşeni $n_{t(\alpha)}$ kadar görünür ve bu durum $n_{s(\alpha)}$ satır kadar tekrarlanır. Böylece $\operatorname{mat}_{n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}}(k)$'nin bir tabanında $n_{s(\alpha)}n_{t(\alpha)}$ kadar matris bulunur. Temsil uzayı $\mathrm{mat}_{n_{t(\alpha)}\times n_{s(\alpha)}}(k)$ vektör uzaylarının bir dik toplamı olduğundan temsil uzayının boyutu

$$\dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) = \sum_{\alpha\in Q_1} n_{s(\alpha)}n_{t(\alpha)}$$

ile hesaplanır.

Yukarıda ifade edilen temsil uzayının boyutunun hesaplanmasını aşağıdaki örnekle açıklayalım.

Örnek 4.1.8 Q: $1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$ kuiverını gözönüne alalım. Q'nun boyut vektörü $\underline{n} = (2,1,3)$ olan M temsilinin temsil uzayı aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned}\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n}) =& \mathrm{Hom}(k^2,k)\oplus \mathrm{Hom}(k,k^3)\\ =& \mathrm{mat}_{1\times 2}(k)\oplus \mathrm{mat}_{3\times 1}(k)\end{aligned}$$

Temsil uzayının taban elemanları

$$E_{ij}^{\alpha} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$E_{ij}^{\beta} = \left\{\begin{bmatrix} 1\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1 \end{bmatrix}\right\}$$

biçimindedir. Temsil uzayının boyutu;

$$\dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) = \sum_{\alpha\in Q_1} n_{s(\alpha)}n_{t(\alpha)} = 2+3=5$$

olur.

Tanım 4.1.9 k bir cisim ve V bir k-vektör uzayı olmak üzere tüm terslenebilir $\phi : V \to V$ lineer dönüşümlerinin kümesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur, bu gruba *genel lineer grup (general linear group)* denir ve $GL(V)$ ile gösterilir. Bir k cismi üzerindeki *n.dereceden genel lineer grup* $\mathrm{mat}_{n\times n}(k)$'nın $n\times n$ tipindeki tersinir matrislerden oluşan bir altkümesidir ve $GL(n)$ ile gösterilir. $GL(n)$; matrislerdeki çarpma işlemine göre bir gruptur. Ayrıca V bir n-boyutlu vektör uzayı ise $GL(n)\cong GL(V)$ olur.

Uyarı 4.1.7'de ifade edilen metoda benzer olarak $GL(\underline{n})$'nin boyutu

$$\dim(GL(\underline{n})) = \sum_{i \in Q_0} n_i^2$$

formülü ile hesaplanır.

Tanım 4.1.10 G bir grup X bir küme olsun. G'nin X üzerine bir *etkisi (action)* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $* : G \times X \to X$ fonksiyonudur:

(i) Her $g, h \in G$ ve $x \in X$ için $gh * x = g * (h * x)$

(ii) Her $x \in X$ için $e \in G$ birim eleman olmak üzere $e * x = x$

G'nin X üzerinde bir etkisi varsa X bir G-*küme* olarak adlandırılır.

Uyarı 4.1.11 $GL(n_i)$; $M_i = k^{n_i}$'den kendisi üzerine gelen tüm tersinir lineer dönüşümlerin kümesi olmak üzere $GL(\underline{n}) := \prod_{i \in Q_0} GL(n_i)$ olarak tanımlansın. Şimdi $GL(\underline{n})$ genel lineer grubunun $\text{rep}_k(Q, \underline{n})$ temsil uzayı üzerine etkisini tanımlayalım: $g_{t(\alpha)} \in GL(n_{t(\alpha)}), p_\alpha \in \text{mat}_{n_{t(\alpha)} \times n_{s(\alpha)}}(k), g_{s(\alpha)}^{-1} \in GL(n_{s(\alpha)})$ olmak üzere $g = (g_i) \in GL(\underline{n})$, $M = (M_i, \varphi_\alpha) = (p_\alpha) \in rep_k(Q, \underline{n})$ için

$$\begin{tikzcd} k^{n_i} \arrow[loop above, "g_{s(\alpha)}"] \arrow[rr, "p_\alpha"] & & k^{n_j} \arrow[loop above, "g_{t(\alpha)}"] \end{tikzcd}$$

$$g * M = (g_i) * (p_\alpha) := g_{t(\alpha)} p_\alpha g_{s(\alpha)}^{-1}$$

ile tanımlanan eşlenik olma etkisi ile $\text{rep}_k(Q, \underline{n})$; bir $GL(\underline{n})$-kümedir.
Bu etki altında bir M temsilinin *yörüngesi* (*orbit*)

$$\mathcal{O}_M := \{g * M \mid g \in GL(\underline{n})\}$$

ile tanımlıdır ve $rep_k(Q, \underline{n})$'nin bir altkümesidir.

Bu durumu bir örnekle açıklayalım.

Örnek 4.1.12 $Q: \; 1 \longrightarrow 2$ ve $\underline{n} = (n_1, n_2)$ olsun. Bu durumda $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$ uzayı, $n_2 \times n_1$ tipindeki matrislerin uzayına izomorf olup $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'de bir M temsili $n_2 \times n_1$ tipindeki bir p matrisi olarak gözönüne alınabilir. $GL(\underline{n})$ genel lineer grubu; bileşenleri $n_1 \times n_1$ ve $n_2 \times n_2$ tipindeki tersinir kare matrisler olan (g_1, g_2) elemanlarından oluşur. Bir M temsilinin $\mathcal{O}_M = \{g_2 p g_1^{-1} \mid (g_1, g_2) \in GL(\underline{n})\}$ yörüngesinin elemanları ise rankı p'nin rankına eşit tüm matrislerdir.

Aşağıdaki önermede, bir temsilin yörüngesinin o temsilin izosınıfı olduğu ifade edilir.

Önerme 4.1.13 Bir M temsilinin $\mathcal{O}_M$ yörüngesi M temsilinin izosınıfıdır. Yani;

$$\mathcal{O}_M = \{M' \in repQ \mid M' \cong M\} = \mathrm{isoclass} M$$

Tanım 4.1.14 X bir küme ve G; X üzerine etki eden bir grup olsun. Bir $x \in X$ elemanının *sabitleyicisi (stabilizer)*

$$G_x = \{g \in G \mid g * x = x\}$$

ile tanımlıdır. *İzotropy grubu* olarak ta bilinen bu grup her $x \in X$ için G'nin bir altgrubudur.

Buna göre bir M temsilinin *sabitleyicisi* (*stabilizer*)

$$\mathrm{Stab} M = \{g \in GL(\underline{n}) \mid g * M = M\}$$

ile tanımlanan ve M temsilinin otomorfizmalarının $\mathrm{Aut} M$ kümesine karşılık gelen bir kümedir. $rep_k(Q, \underline{n})$'de $M = p = (p_\alpha)$ olmak üzere $\mathrm{Stab} M = G_p$ biçiminde de gösterilebilir.

Önerme 4.1.15 Boyut vektörü $\underline{n}$ olan herhangi bir $M = p = (p_\alpha) \in rep_k(Q, \underline{n})$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $\dim(\mathcal{O}_p) = \dim GL(\underline{n}) - \dim G_p$

(ii) $\overline{\mathcal{O}_M}$ yörünge kapanışı; $\mathcal{O}_M$ ile $\mathcal{O}_M$'nin boyutundan daha küçük boyutlu tüm yörüngelerin birleşimidir.

Önerme 4.1.16 $\psi : G \to H$ cebirsel grup homomorfizması olsun. kerψ çekirdeği G'de (Zariski topolojiye göre) kapalı, imψ görüntüsü H'de (Zariski topolojiye göre) kapalı ve $\dim(\ker \psi) + \dim(\mathrm{im}\ \psi) = \dim G$'dir.

Şimdi Uyarı 4.1.11'de tanımlanan $GL(\underline{n})$ genel lineer grubunun özel bir altgrubunu tanımlayalım.

Tanım 4.1.17 $k^* = k \setminus \{0\}$ olmak üzere $k^*\mathbb{I}_{\underline{n}} = \{(\lambda I_{n_i})_{i \in Q_0} \mid \lambda \in k^*\}$ kümesi $GL(\underline{n})$'nin merkezinde kapsanan bir altgruptur. Bundan dolayı $GL(\underline{n})$'nin bir normal altgrubu olup $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$ temsil uzayına aşikar olarak etki eder. Böylece

$$GL(\underline{n})/k^*\mathbb{I}_{\underline{n}}$$

bölüm grubu tanımlıdır ve derecesi $\underline{n}$ boyut vektörü olan *projektif genel lineer grup* olarak adlandırılır ve $PGL(\underline{n})$ ile gösterilir.

Şimdi projektif genel lineer grubun boyutunu hesaplayalım. $GL(\underline{n})$ ve $PGL(\underline{n})$ birer cebirsel grup olduğundan $\psi : GL(\underline{n}) \to PGL(\underline{n})$ kanonik epimorfizması vardır. ψ örten olduğundan im$\psi = PGL(\underline{n})$ dir. Ayrıca kerψ, 1×1 tipindeki terslenebilir skaler matrislerin uzayı olan $GL(1)$'e izomorf olduğundan dim$ker\psi = 1$ olur. Önerme 4.1.16 gereğince

$$\dim(PGL(\underline{n})) = \dim GL(\underline{n}) - 1$$

olarak bulunur.

Tanım 4.1.18 Q bir kuiver, $\underline{m}$ ve $\underline{n}$; Q'nun iki temsilinin boyut vektörleri olsun. Q'nun *Euler formu* (ya da *Ringel formu*) Q_0'ın kardinalitesi r olmak üzere $\mathbb{Z}^r$ üzerinde

$$< \underline{m}, \underline{n} >_Q = \sum_{i \in Q_0} m_i n_i - \sum_{\alpha \in Q_1} m_{t(\alpha)} n_{s(\alpha)}$$

ile tanımlı bir bilineer formdur.

Tanım 4.1.19 Bir Q kuiverının *Tits formu*; bir $\underline{n}$ boyut vektörü için Euler formunun kuadratik formudur ve

$$q_Q(\underline{n}) := < \underline{n}, \underline{n} > = \sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} n_{t(\alpha)} n_{s(\alpha)}$$

ile tanımlıdır.

Örnek 4.1.20 $Q: \ 1 \longrightarrow 2 \longleftarrow 3$ kuiverının herhangi $\underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$ boyut vektörüne karşılık gelen tits formu $q_Q(\underline{n}) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 - n_1 n_2 - n_2 n_3$ biçimindedir.

Tanım 4.1.21 Q bir kuiver ve M; boyut vektörü $\underline{n}$ olan Q'nun bir temsili olsun. Her $0 \neq \underline{n} = (n_i)_{i \in Q_0}$ için

$$q_Q(\underline{n}) > 0$$

oluyorsa q'ya *pozitif tanımlı (positive definite)* denir. Her $\underline{n}$ için

$$q_Q(\underline{n}) \geq 0$$

oluyorsa q'ya *pozitif yarı-tanımlı (positive semi-definite)* denir.
Herhangi $\underline{n}$ boyut vektörü için $\widehat{Q}$ ile ilişkili q tits formu pozitif tanımlı ise $\widehat{Q}$ çizgesi pozitif tanımlı olarak adlandırılır.

Aşağıdaki önerme; Gabriel Teoreminin birinci kısmının "$\Rightarrow$" yönlü ispatında kullanılacak olup pozitif tanımlı çizgeler ve Dynkin diyagramları arasındaki ilişkiyi ortaya koyması bakımından önemlidir. Bu önerme Bernstein vd. (1973)'ne dayanarak Webster (2005) tarafından aşağıdaki biçimde ispatlanmıştır.

Önerme 4.1.22 $\widehat{Q}$ bağlantılı olacak şekilde Q bir kuiver olsun. q_Q tits formunun pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $\widehat{Q}$'nın; basitçe-bağlı $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7$ ya da $\mathbb{E}_8$ tipli Dynkin diagram olmasıdır.

İspat. q_Q tits formunun pozitif tanımlı olduğunu kabul edelim. Köşelerinin kümesi $\widehat{Q_0}$'ın bir altkümesi, kenarlarının kümesi de $\widehat{Q_1}$'in bir alkümesi olan $\widehat{Q'}$ çizgesine $\widehat{Q}$'nın bir altçizgesi denildiği ve q_Q pozitif tanımlı iken $q_{Q'}$'nün de pozitif tanımlı olduğu gözönünde bulundurularak ispatı aşağıdaki durumları inceleyerek yapalım:

(1) Q kuiverı döngüler (loops) içermez.
    Eğer Q bir döngü içerirse, bir köşesinde $m \geq 1$ tane döngü bulunan bir dolu Q' kuiverı vardır. Bu köşedeki değeri 1 olan $\underline{n}$ boyut vektörünü alırsak $q_{Q'} = 1 - m$ olur ki bu durum kabulümüz ile çelişir.

(2) n; $\widehat{Q}$'daki köşelerin sayısı ve m; $\widehat{Q}$'daki kenarların sayısı ise, $m < n$ dir.
    Yani iki köşe en fazla bir kenarla bağlanabilir. $i \in Q_0$ köşesindeki boyut $n_i = 1$ olduğu gözönüne alınırsa $q_Q = n - m$ olur. Aksi durumda çelişki elde edilir.

(3) Her köşe en fazla üç köşe ile bağlı olabilir.

Kabul edelim ki $j \in Q_0$ köşesi l_1, l_2, l_3, l_4 köşeleriyle bağlı olsun. Bu durumda j, l_1, l_2, l_3, l_4 köşelerini içeren $\widehat{Q'}$ dolu altçizgesini gözönüne alalım.Bu altçizge (2. durumdan) j'yi l_1, l_2, l_3, l_4'e bağlayan sadece dört kenar içerebilir. $n_j = 2$ ve $i = 1, 2, 3, 4$ için $n_{l_i} = 1$ olarak alınırsa $q_Q = 0$ olur ki bu durum kabulümüz ile çelişir.

(4) $\widehat{Q}$; üç köşeyle bağlı olan bir köşe içermezse, $\widehat{Q}$; $\mathbb{A}_n$ tipli diagramdır.

Bir $j \in Q_0$ köşesini alalım. Bu köşe en fazla l_1 ve l_{-1} köşeleriyle bağlı olabilir. Bu köşeler de en fazla l_2 ve l_{-2} köşeleriyle bağlı olabilir. Bu durumda herhangi iki l_i ve l_{-i} köşeleri bileşensel olarak farklı olmalı ya da bir döngü üzerinde bulunmalıdır ki bu 2. durum ile çelişir.

(5) $\widehat{Q}$; üç köşeyle bağlı olan en fazla bir köşe içerebilir.

Aksi durumda aşağıdaki biçimde bir $\widehat{Q'}$ çizgesi içerseydi

$$\begin{tikzcd}
l_1 \arrow[r, dash] & x \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \cdots \arrow[r, dash] & y \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & k_1 \\
& l_2 & & k_2 &
\end{tikzcd}$$

$\underline{n}$ boyut vektörünün l_1, l_2, k_1, k_2 köşelerindeki bileşenleri 1, diğer köşelerdeki bileşenleri 2 alınır ise $q_{Q'} = 0$ olur ki bu durum kabulümüz ile çelişir.

(6) 4. durumu ispatlamak için kullanılan prosedür tekrar edilir ve $r \leq p \leq q$ olduğu kabul edilerek aşağıdaki durumlar değerlendirilir.

(7) $r = 1$ durumunda, çizge aşağıdaki biçimde bir dolu altçizge içerirse

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\
& & \bullet \arrow[d, dash] & & \\
& & \bullet & &
\end{tikzcd}$$

ve boyut vektörü

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 1 \\ & & 2 \arrow[d, dash] & & \\ & & 1 & & \end{tikzcd}$$

biçimde alınırsa $q_{Q'} = 0$ olur ki bu durum kabulümüz ile çelişir.

(8) $q \leq 2$ durumunda, Q aşağıdaki biçimde bir dolu altçizge içerir ve:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\ & & & \bullet & & & \end{tikzcd}$$

ve boyut vektörü

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 4 \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & 3 \arrow[r, dash] & 2 \arrow[r, dash] & 1 \\ & & & 2 & & & \end{tikzcd}$$

biçiminde alınırsa $q_{Q'} = 0$ olur ki bu durum kabulümüz ile çelişir.

(9) $q = 1$ durumunda p keyfi olabilir. Bu durum bize $\widehat{Q}$'nın $\mathbb{D}_n$ tipli olmasını verir.

(10) $q = 2$ durumunda $p \leq 4$ olur. Kuiver

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\ & & \bullet & & & & & \end{tikzcd}$$

biçiminde ve boyut vektörü

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \arrow[r, dash] & \bullet \\ & & \bullet & & & & & \end{tikzcd}$$

biçimindeyse çelişki elde edileceğinden

Tüm durumların sonucu olarak $\widehat{Q}$ sadece $\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8$ tipli olmalıdır. $\square$

Teorem 4.1.23 (Gabriel Teoremi, birinci kısım) Bir Q kuiverının sonlu (yörünge) tipli olması için gerek ve yeter koşul Q'nun altında yatan yönlendirilmemiş $\widehat{Q}$ çizgesinin basitçe-bağlı $\mathbb{A}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{E}$ tipli Dynkin diagram olmasıdır.

İspat $(\Rightarrow)$ Önerme 4.1.22 gereğince q_Q tits formunun pozitif tanımlı olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Kabul edelim ki Q sonlu (yörünge) tipli bir kuiver olsun. Bu durumda Tanım 4.1.1 gereğince Q'nun boyut vektörü $\underline{n}$ olan sonlu sayıda ayrıştırılamaz temsili vardır. Böylece Önerme 4.1.13 gereğince sonlu sayıda yörünge var olup bu yörüngeleri $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \ldots, \mathcal{O}_l$ ve bu yörüngelerin kapanışlarını $\overline{\mathcal{O}_1}, \overline{\mathcal{O}_2}, \ldots, \overline{\mathcal{O}_l}$ ile gösterelim. Bu kapanışlar $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'nin Zariski-kapalı altkümeleridir. Bir $\mathcal{O}$ yörüngesinin $\overline{\mathcal{O}}$ kapanışı Önerme 4.1.15'den kendi yörüngesi ile birlikte $\mathcal{O}$'nun boyutundan daha küçük boyutlu yörüngelerin birleşimi olduğundan her $i = 1, 2, \ldots, l$ için $\mathcal{O}_i \subseteq \overline{\mathcal{O}_i}$ olur. $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'nin her objesi bir yörüngeye sahip olduğundan ve $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$ objelerin sonsuz birleşiminden oluştuğundan

$$\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n}) = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{O}_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \overline{\mathcal{O}_i}$$

olur. Burada yörüngelerin sayısı sonlu olduğundan bu birleşim sonludur. Fakat bununla birlikte bu yörünge kapanışları $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'de kendilerini kapsandığından

$$\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n}) = \bigcup_{i=1}^{l} \overline{\mathcal{O}_i}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'e eşit olan Zariski-kapalı kümelerin sonlu bir birleşimi elde edilir. Şimdi bu Zariski-kapalı kümelerin ya tamamı $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'de öz olarak kapsanır ya da bu yörünge kapanışlarının en az biri öz değildir ve $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'nin tamamına eşittir.

İlk olarak Zariski-kapalı kümelerin tamamının $\mathrm{rep}_k(Q, \underline{n})$'de öz olduğunu kabul edelim. Zariski topolojinin tüm öz kapalı kümeleri: $\mathcal{I}$; n değişkenli $k[t_1, t_2, \ldots, t_n]$ polinom halkasının bir ideali olmak üzere

$$V(\mathcal{I}) := \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n | f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \forall f \in \mathcal{I}\}$$

biçimindedir. Bu öz kapalı altkümeler gözardı edilebilir bir alana sahip olduğundan Zariski topolojideki tüm öz kapalı kümelerin tümleyenleri yoğundur. Kabulden, bu öz kapalı altkümelerin sonlu birleşimi $\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})$'nin tamamına eşit olduğundan, bu öz kapalı kümelerin tümleyenlerinin sonlu kesişimi, yoğun kümelerin bir sonlu kesişimi olarak boş kümeyi verir. Bu durum Uyarı 2.3.2 ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlış olup bu $\mathcal{O}_i$ kapalı kümelerinin en az biri $\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})$'nin tamamına eşit olmak zorundadır. Buradan Tanım 2.3.1 gereğince $\mathcal{O}_i$ yörüngeleri yoğun olmalıdır. Bir $p \in \mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})$ için $\mathcal{O}_p$ kapanışı $\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})$'ye eşit olan yörünge yani $\dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) = \dim(\mathcal{O}_p) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_p)$ olsun. $G := GL(\underline{n})$ diyelim. Önerme 4.1.15 gereğince

$$\dim(\mathcal{O}_p) = \dim(G) - \dim(G_p)$$

ve id $\in G_p$ olduğundan $\dim(G_p) \geq 1$ olup

$$\dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) < \dim(G)$$

elde edilir. Tanım 4.1.17'dan $\dim(PGL(\underline{n})) = \dim GL(\underline{n}) - 1$ olduğundan

$$\dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) \leq \dim(PGL(\underline{n}))$$

olur. Tanım 4.1.9; G'nin boyutunu, Tanım 4.1.6; $\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})$'nin boyutunu verdiğinden ve Tanım 4.1.19 kullanılarak

$$\begin{aligned}
\dim(PGL(\underline{n})) - \dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) \geq 0 &\Rightarrow \dim GL(\underline{n}) - 1 - \dim(\mathrm{rep}_k(Q,\underline{n})) \geq 0 \\
&\Rightarrow \sum_{i \in Q_0} n_i^2 - \sum_{\alpha \in Q_1} n_{t(\alpha)} n_{s(\alpha)} \geq 0 \\
&\Rightarrow q_Q(\underline{n}) - 1 \geq 0 \\
&\Rightarrow q_Q(\underline{n}) \geq 1
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Önerme 4.1.22 gereğince $\widehat{Q}$'nın $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ tipli basitçe-bağlı bir Dynkin diyagramı olduğu görülür. □

Şimdi Gabriel teoreminin ikinci kısmını ispatlamak için gerekli olan bazı kavramları tanıtalım.

Tanım 4.1.24 Bir pozitif yarı-tanımlı kuadratik form için gerçek (real) ve sanal (imaginary) olmak üzere iki tip kök vardır. Her $0 \neq \underline{n}$ için $q_Q(\underline{n}) = 1$ ise $\underline{n}$'ye *gerçek kök* (*real root*), $q_Q(\underline{n}) = 0$ ise $\underline{n}$'ye *sanal kök* (*imaginary root*) denir. $\mathbb{Z}^n$'deki tüm

$\underline{n} = (n_i)_{i \in Q_0}$ köklerin kümesi Φ ile gösterilir.
i. bileşeni 1 diğer bileşenleri 0 olan taban vektörü $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ olmak üzere $\mathbb{Z}^n$'nin her elemanı, özel olarak her kök, $a_i \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\sum_i a_i e_i$ biçiminde yazılır. Her $a_i \geq 0$ ise bir $\underline{n} = \sum_i a_i e_i$ kökü *pozitif*, her $a_i \leq 0$ ise bir $\underline{n} = \sum_i a_i e_i$ kökü *negatif* olarak adlandırılır. Pozitif köklerin kümesi Φ^+ ve negatif köklerin kümesi Φ^- ile gösterilir.

Teorem 4.1.25 (Gabriel Teoremi, ikinci kısım) Q; basitçe-bağlı $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ tipli Dynkin diyagramına sahip olacak şekilde bir kuiver olsun. Q'nun boyut vektörü $\underline{n}$ olan bir (tek) ayrıştırılamaz temsilinin var olması için gerek ve yeter koşul $\underline{n} \in \Phi^+$ olmasıdır.

İspat Bir Q kuiverının ayrıştırılamaz temsillerinin ind$Q$ izosınıflarından pozitif köklerin kümesine $\psi(M) = \underline{\dim} M$ ile tanımlı ψ : ind$M \to \Phi^+$ dönüşümünün bir izomorfizma olduğu gösterilir.
Diğer yandan $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ Dynkin tipli kuiverların sahip oldukları pozitif kökler aşağıda gösterilmiştir. Bir Q kuiverı için $\mid Q_0 \mid = n$ ve $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ bir kök olmak üzere

- $\mathbb{A}_n$ tipinde bir kuiverın pozitif köklerinin bileşenleri her $i \in Q_0$ için $\alpha_i \leq 1$ biçiminde ve köklerinin sayısı $\frac{n(n+1)}{2}$ dir. Örneğin $\mathbb{A}_3$'ün pozitif kökleri:

$$100, 010, 001, 110, 011, 111$$

  biçimindedir.

- $\mathbb{D}_n$ tipinde bir kuiverın pozitif köklerinin bileşenleri $1, n-1, n$ köşeleri hariç her $i \in Q_0$ için $\alpha_i \leq 2$ biçiminde ve köklerinin sayısı $n(n-1)$ dir. Örneğin $\mathbb{D}_5$'in pozitif kökleri:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & \\
100 & , & 010 & , & 001 & , & 100 & , & 100 & , & 110 & , & 011 & , & 001 & , & 001 & , & 111 & , \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
011 & , & 011 & , & 001 & , & 111 & , & 111 & , & 011 & , & 111 & , & 012 & , & 112 & , & 122 & , \\
0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 &
\end{array}$$

  biçimindedir.

- $\mathbb{E}_6$ tipinde bir kuiverın kökleri $\alpha \leq \begin{matrix} 12321 \\ 2 \end{matrix}$ biçiminde olup 36 tanedir. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{matrix} 11111 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 11211 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 12211 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 11221 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 12221 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 12321 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 12321 \\ 2 \end{matrix}$$

- $\mathbb{E}_7$ tipinde bir kuiverın kökleri $\alpha \leq \begin{matrix} 234321 \\ 2 \end{matrix}$ biçiminde olup 63 tanedir. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{matrix} 111111 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 112111 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 124321 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 134321 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 122221 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 123211 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 123321 \\ 2 \end{matrix}$$

- $\mathbb{E}_8$ tipinde bir kuiverın kökleri $\alpha \leq \begin{matrix} 2265432 \\ 3 \end{matrix}$ biçiminde olup 120 tanedir. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$$\begin{matrix} 1111111 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1121111 \\ 1 \end{matrix}, \begin{matrix} 1232211 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 1344321 \\ 2 \end{matrix}, \begin{matrix} 2465321 \\ 3 \end{matrix}, \begin{matrix} 2354321 \\ 3 \end{matrix}, \begin{matrix} 2465421 \\ 3 \end{matrix}$$

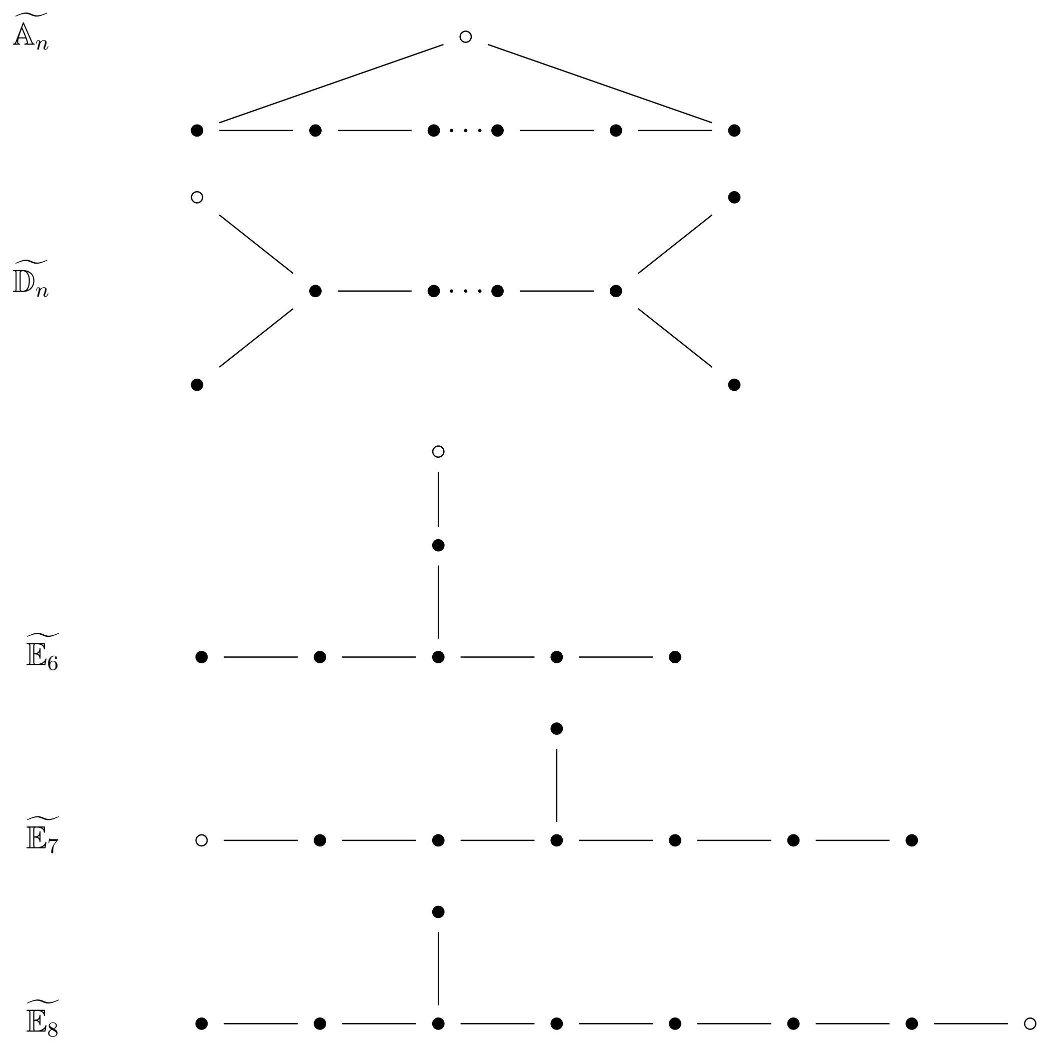
4.2 Evcil Tipli Kuiverlar

Bu bölümde sonlu tipli olmayan kuiverların bir sınıfı tanıtılacaktır.

Tanım 4.2.1 Bir kuiverın sonsuz sayıda ayrıştırılamaz temsili var ve bu temsillerdeki vektör uzaylarının boyutu en fazla 1 ise, bu kuiver *evcil tipli (tame type) kuiver* olarak adlandırılır.

Örnek 4.2.2 Örnek 3.1.9'daki r-oklu Kronecker K_r kuiverı gözönüne alınırsa $r = 1$ durumunda K_1; A_2-tipli Dynkin diyagrama sahip olduğundan sonlu tipli kuiverdır. $r \geq 2$ durumunda K_2'nin ayrıştırılamaz temsillerinin izomorfizma sınıflarının sayısı sonsuz olduğundan tame tipli kuiverdır (Brion 2000).

Tanım 4.2.3 $\mathbb{A}, \mathbb{D}$ ya da $\mathbb{E}$ tipli Dynkin diagramlarına bir köşenin (ve bazı kenarların) eklenmesiyle elde edilen ve *Öklid diagramları* (*Euclidean diagrams*) ya da *afin Dynkin diagramları* (*affine Dynkin diagrams*) olarak adlandırılan diagramların listesi aşağıda verilmiştir.



Öklid diagramının kendisi bir Dynkin diagramı değildir fakat Öklid diagramından herhangi bir köşe silindiğinde Dynkin diagramlarının bir birleşimi elde edilir. Bu nedenle Öklid diagramlarına genişletilmiş (extended) Dynkin diagramları da denir.

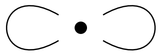
Donovan ve Freislich (1973) ve Nazarova (1973) tarafından sonlu tipli olmayan kuiverlar için aşağıdaki karakterizasyon verilmiştir.

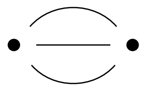
Teorem 4.2.4 Bir kuiverın tame tipli kuiver olması için gerek ve yeter koşul o kuiverın altında yatan çizgenin; $\mathbb{A}, \mathbb{D}, \mathbb{E}$ tipli Dynkin diagramları ile $\widetilde{\mathbb{A}}, \widetilde{\mathbb{D}}$ ya da $\widetilde{\mathbb{E}}$ tipli genişletilmiş Dynkin diagramlarının bir birleşimi olmasıdır.

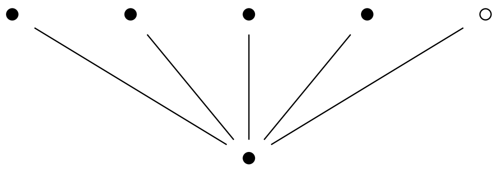
4.3 Vahşi Tipli Kuiverlar

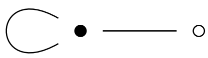
Tanım 4.3.1 Kuiverın temsil teorisi, en az çift döngü kuiverın temsil teorisi kadar karmaşık ise bu kuivera *vahşi* (*wild*) tipli kuiver denir.

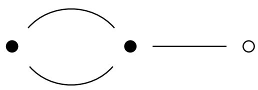
Örnek 4.3.2 Ringel (2012) tarafından vahşi tipli kuiverların aşağıdaki listesi verilmiştir.

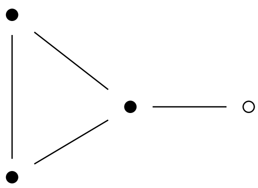
$\mathbb{L}_2$ 

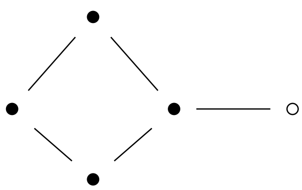
$\mathbb{K}_3$ 

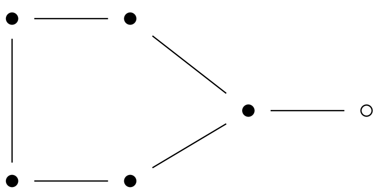
$\mathbb{S}_5$ 

$\widetilde{\widetilde{\mathbb{A}}}_0$ 

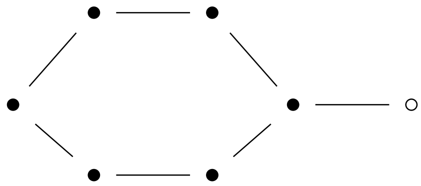
$\widetilde{\widetilde{\mathbb{A}}}_1$ 

$\widetilde{\widetilde{\mathbb{A}}}_2$ 

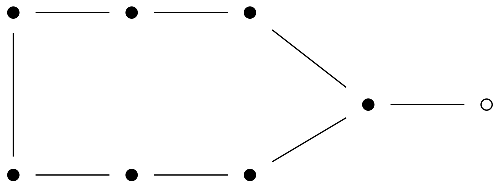
$\widetilde{\widetilde{\mathbb{A}}}_3$ 

$\widetilde{\widetilde{\mathbb{A}}}_4$ 

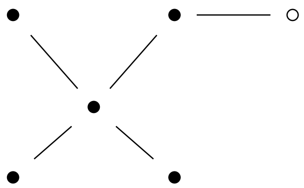
$\tilde{\tilde{\mathbb{A}}}_5$



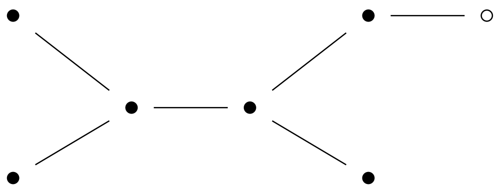
$\tilde{\tilde{\mathbb{A}}}_6$



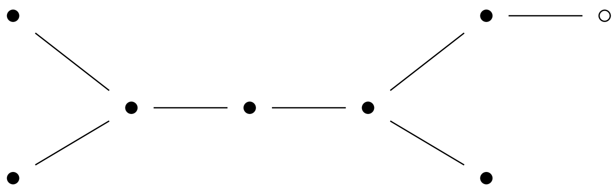
$\tilde{\tilde{\mathbb{D}}}_4$



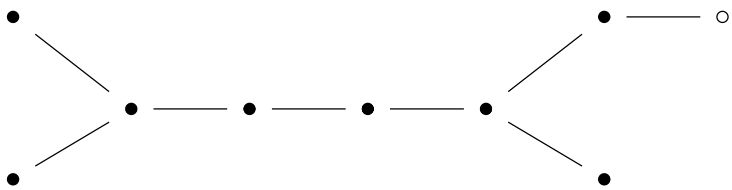
$\tilde{\tilde{\mathbb{D}}}_5$



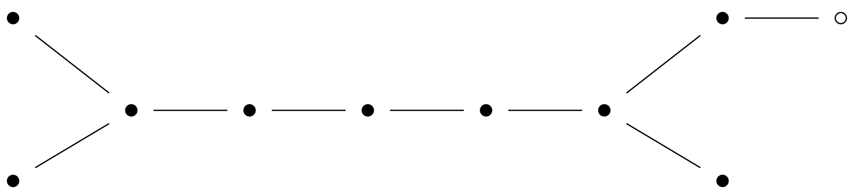
$\tilde{\tilde{\mathbb{D}}}_6$



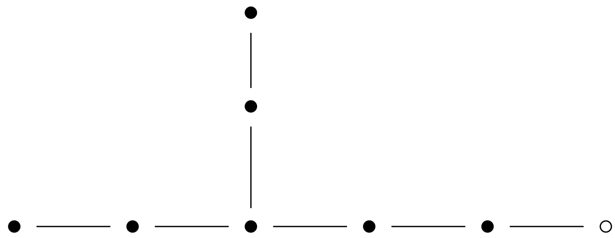
$\tilde{\tilde{\mathbb{D}}}_7$



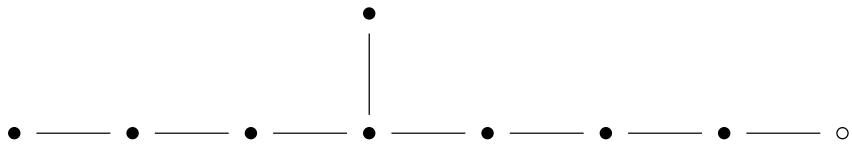
$\tilde{\tilde{\mathbb{D}}}_8$



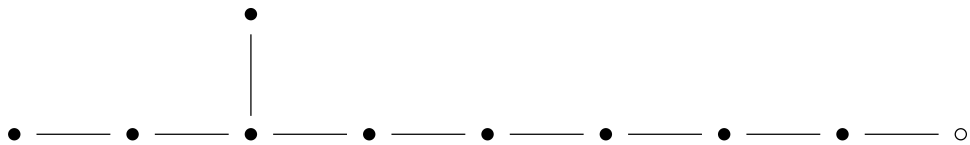
$\tilde{\tilde{\mathbb{E}}}_6$



$\tilde{\tilde{\mathbb{E}}}_7$



$\tilde{\tilde{\mathbb{E}}}_8$



5. KAYNAKLAR

Anderson F. W. and Fuller K. R. (1992). Rings and Categories of Modules, Graduate Text in Mathematics, Springer -Verlag New York, Inc.

Assem, I. Simson, D. and Skowronski, A. (2006). Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, 1: Techniques of Representation Theory *London Mathematical Society Student Texts* **65**, Cambridge University Press.

Bernstein, I. N., Gel'fand I. M. and Ponomarev,V. A. (1973). Coxeter Functors and Gabriel's Theorem, *Russ. Math. Surv.*, **28**: 17-32

Derksen, H. and Weyman, J. (2005). Quiver Representations. *Notices of the AMS*, **52(2)**: 200-206.

Donovan P. and Freislich M. R. (1973). The Representation Theory of Finite Graphs and Associated Algebras, Carleton Math. Lecture Notes 5, Carleton University, Ottawa.

Enochs, E. E. and Jenda, O.M.G. (2000). Relative Homological Algebra. Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 10785 Berlin, Germany.

Gabriel, P. (1960). Sur les catégories abéliennes localement noethériennes et leurs applications aux algébres étudiées par Dieudonné. Séminaire Serre, Collége de France, Paris.

Gabriel, P. (1972). Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Math*, **6**: 71-103

Gabriel, P. (1973). Indecomposable representations II. *Symposia Mat. Inst. Naz. Alta Mat.*, **11**: 81-104.

Kac, V. G. (1980). Infinite root systems, representations of graphs and invaryant theory. Inventiones Mathematicae, **56**: 57-92.

Kac, V. G. (1982). Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory II, *J. Algebra* **78 (1)**, 141162.

Knapp, A. W. (2002). Lie groups beyond an introduction. *Springer Science, Businees Media*, Birkhäuser.

Nazarova L. A. (1973). Representations of quivers of infinite type (Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **37**: 752791.

Schiffler, R. (2014). Quiver Representations. Springer International Publishing, Switzerland.

Thrall, R. M. (1947). On ahdir algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53 (22)**: 49-50.

İnternet Kaynakları

Brion, M. (2008). Lecture Notes - Representations of Quivers. https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ mbrion/notes-quivers-rev.pdf, 14.10.2019

Cummin, E. (2011). Representations of Quivers and Gabriels Theorem. http://people.bath.ac.uk/ac886/students/emmaCummin.pdf, 14.10.2019

Ringel C. M. (2012). Dynkin quivers, Euclidean quivers, wild quivers. https://www.math.uni-bielefeld.de/ sek/kau/, 14.10.2019

Webster, K. (2005) Quiver Representations and Gabriel's Theorem. http://mathserver.neu.edu/ king-chris/Webster.pdf, 14.10.2019

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Tuğçe HASIRCIOĞLU
Doğum Yeri ve Tarihi	:	Afyonkarahisar, 02.11.1992
Yabancı Dili	:	İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	:	0 506 812 89 49/tugcehasircioglu@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	:	Afyon Cumhuriyet Lisesi, (2006-2010)
Lisans	:	Uşak Üniversitesi, (2011-2016)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Afyon Birey Özel Öğretim Kursu, (2018-2019)

Yayınları (SCI ve Diğer)