DEFERRED CESÀRO VE DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meryem Ece ALKAN

Danışman
Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DEFERRED CESÀRO VE DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

Meryem Ece ALKAN

Danışman

Prof. Dr. Fatih NURAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ekim 2020

TEZ ONAY SAYFASI

Meryem Ece ALKAN tarafından hazırlanan "Deferred Cesàro ve Deferred İstatistiksel Yakınsak Diziler" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 15 / 10 / 2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Fatih NURAY

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Cumhuriyet Üniversitesi, Cumhuriyet Meslek Yüksekokulu

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...... /...... /......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....
Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

15 / 10 / 2020

Meryem Ece ALKAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DEFERRED CESÀRO VE DEFERRED
İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

Meryem Ece ALKAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Fatih NURAY

Bu çalışma beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez konusunun önemini anlatan ve tarihsel geçmişine değinen genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, diğer bölümler için temel teşkil eden tanım ve teoremler yer almıştır. Üçüncü bölümde, deferred Cesàro yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık tanımları verilerek arasındaki ilişkileri inceleyen teoremler ve ispatlara değinilmiştir. Dördüncü bölümde, deferred hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli deferred hemen hemen yakınsaklık ve deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaklık tanımlanarak aralarındaki ilişkileri inceleyen teoremler ve ispatlara yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise hemen hemen asimptotik istatistiksel denk dizi, deferred hemen hemen asimptotik denklik, asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denklik, kuvvetli $r-$deferred hemen hemen asimptotik denklik tanımları ve aralarındaki kapsam bağıntılarını veren teoremler ispatlanmıştır.

2020, v + 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, deferred Cesàro yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık, deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaklık, hemen hemen asimptotik istatistiksel denklik, asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denklik.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

DEFERRED CESÀRO AND DEFERRED
STATISTICAL CONVERGENCE OF SEQUENCES

Meryem Ece ALKAN
Afyon Kocatepe University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Fatih NURAY

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, a general literature information is given about the importance of the thesis subject and its historical background. In the second chapter, definitions and theorems that form the basis for other chapters are included. In the third chapter, it is mentioned that deferred Cesàro convergence and deferred statistical convergence definitions are given theorems and proofs that examine the relationships between them. In the fourth chapter, it is indicated by determining that deferred almost convergence, strongly deferred almost convergence and deferred almost statistical convergence are defined and theorems and proofs that examine the relations between them. In the fifth chapter, it is provided that, almost asymptotic statistically equivalent sequence, deferred almost asymptotic equivalence, asymptotically deferred almost statistical equivalence, strong *r*-deferred almost asymptotic equivalence definitions and theorems that give the scope relations between them.

2020, v + 39 pages

Keywords: Statistical convergence, deferred Cesàro convergence, almost convergence, deferred almost statistical convergence, almost asymptotic statistical equivalence, asymptotically deferred almost statistical equivalence.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde bana yol gösteren, sözleriyle ufkumu aydınlatan, anlayışlı yaklaşımları ve yardımsever tutumuyla çalışmama büyük katkı sağlayan, bilhassa akademisyen yönünü örnek aldığım saygıdeğer danışman hocam Sayın Prof. Dr. Fatih NURAY'a ve yaşamım boyunca fedakârane davranışlarıyla ve bana duydukları sonsuz güvenle mütemadiyen desteklerini hissettiğim, varlıkları her zaman bana güç veren kıymetli aileme müteşekkirim.

Bu çalışma, babam kadar sevdiğim ve her daim yüreğimin en mukaddes köşesinde yer alacak olan rahmetli dedem Hacı Mustafa ALKAN'a armağanımdır.

Meryem Ece ALKAN
Afyonkarahisar 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$x=(x_k)$	Reel sayı dizisi
ω	Reel yada kompleks diziler uzayı
$\underline{\delta}(K)$	K kümesinin alt yoğunluğu
$\overline{\delta}(K)$	K kümesinin üst yoğunluğu
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$x \overset{L}{\sim} y$	L katlı asimptotik denk diziler
$x \overset{S_L}{\sim} y$	L katlı asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{D_L}{\sim} y$	L katlı deferred asimptotik denk diziler
$x \overset{D_L^r}{\sim} y$	L katlı kuvvetli r-deferred Cesàro asimptotik denk diziler
$x \overset{C_L^r}{\sim} y$	L katlı kuvvetli r- Cesàro asimptotik denk diziler
$x \overset{DS_L}{\sim} y$	L katlı asimptotik deferred istatistiksel denk diziler
$x \overset{S_\vartheta^L}{\sim} y$	L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler
S_λ	λ −istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
$D[p,q]$	$D_{p,q}$- yakınsak dizilerin kümesi
$DS[p,q]$	Deferred istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$\widehat{D}[p,q]$	Deferred hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$\widehat{D}_r[p,q]$	Kuvvetli r-deferred hemen hemen yakınsak dizilerin kümesi
$\widehat{D}S[p,q]$	Deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$x \overset{\hat{S}}{\sim} y$	L katlı hemen hemen asimptotik istatistiksel denk diziler
$x \overset{\hat{S}_\lambda}{\sim} y$	L katlı hemen hemen λ −asimptotik denk diziler
$x \overset{\widehat{D}_L}{\sim} y$	L katlı deferred hemen hemen asimptotik denk diziler
$x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$	L katlı kuvvetli r −deferred hemen hemen asimptotik denk diziler
$x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$	L katlı asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denk diziler

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı analiz ve fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturmaktadır. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli pozitif tamsayıların doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund tarafından 1935 yılında yayınlanan monografisinde verilmiştir. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 de I.J. Steinhaus ve H. Fast tarafından ayrı ayrı tanımlanmıştır. Bu kavram Fourier Analizi, Sayı Teorisi, Ölçü Teorisi, Trigonometrik Seriler ve Banach uzayları gibi matematiğin çeşitli alanlarında ele alınmıştır. Son zamanlarda bu konu toplanabilme teorisinde aktif bir çalışma konusu olmaktadır.

İstatistiksel yakınsaklığın reel ve kompleks diziler ile ilişkisi Buck (1953) tarafından verilmiştir. Toplanabilme teorisi ile ilişkisi Schoenberg (1959) tarafından verilmiş olup daha sonra Šalát (1980), Connor (1988,1992), Fridy ve Miller (1991), Et ve Şengül (2014) ve başka birçok kişi tarafından toplanabilme teorisi ile ilişkilendirilmiştir. Toplanabilme teorisinde kullanılan dönüşümlerin neredeyse tamamı istenmeyen birtakım özelliklere sahiptir. Ancak deferred Cesàro dönüşümü, Cesàro'nun ve diğer iyi bilinen dönüşümlerin sahip olmadığı yararlı özelliklere sahiptir.

R.P. Agnew 1932 de reel veya kompleks terimli bir (x_k) dizisi için deferred Cesàro ortalamasını tanımlamıştır. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile Cesàro toplanabilirlik, kuvvetli Cesàro toplanabilirlik ve kuvvetli p- Cesàro toplanabilirlik arasındaki ilişkiler Connor (1988) tarafından verilmiştir. Sonraki yıllarda ise Fridy ve Orhan (1993), lacunary dizi kavramından faydalanarak yakınsaklık alanında önemli bir yere sahip olan lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır.

Dizilerin hemen hemen yakınsaklığı fikri Lorentz (1948) tarafından ortaya çıkmıştır. Dizilerin kuvvetli hemen hemen yakınsaklığı Maddox ve Freedman tarafından aynı yılda (1978) fakat birbirinden bağımsız olarak verilmiştir. Banach uzaylarında hemen hemen yakınsaklık kavramı Kurtz (1972) tarafından ele alınmıştır. Savaş (1990), hemen hemen yakınsaklık ve hemen hemen toplanabilme kavramlarını inceleyenler arasında yer almıştır. Son zamanlarda hemen hemen yakınsaklık ile ilgili Das ve Nanda (1992), Jalal

(2004), Mishra ve Jaiswal (2004/05), Shaw ve Lin (2007) çalışma yapanlar arasında yer almaktadır.

Marouf (1993) asimptotik denk dizileri ve asimptotik regüler matrisleri tanımlamıştır. Patterson (2003) bu tanımların asimptotik istatistiksel denk analoğunu ve negatif olmayan toplanabilme matrisleri için doğal regülerlik koşullarını sunarak bu kavramları genişletmiştir. Son zamanlarda asimptotik denk diziler Patterson (2003), Patterson ve Savaş (2006), Savaş ve Başarır (2006), Başarır ve Altundağ (2008), Braha (2012), Ulusu ve Nuray (2013) gibi birçok kişi tarafından çalışılmaktadır.

Bu tez çalışmasının birinci bölümü giriş için ayrılmıştır.

İkinci bölümde bu çalışma için gerekli olan tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde deferred Cesàro yakınsak ve deferred istatistiksel yakınsak dizi tanımları ve aralarındaki ilişkiyi ifade eden teoremler ispatlarıyla birlikte incelenmiştir.

Tez çalışmamızın dördüncü bölümünde hemen hemen yakınsak dizi tanımından hareketle deferred hemen hemen yakınsak, kuvvetli deferred hemen hemen yakınsak, deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak dizi tanımları verilmiş ve aralarındaki ilişkileri ifade eden teoremler ispatlanmıştır.

Beşinci bölümde deferred hemen hemen asimptotik denk, kuvvetli r-deferred hemen hemen asimptotik denk, deferred hemen hemen istatistiksel denk dizi tanımları verilmiş olup aralarındaki ilişkileri ifade eden teoremler ispatlanmıştır.

Tezin sonunda ise çalışmada yararlanılan kaynaklar verilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümler için temel teşkil eden tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir. Diziler değer kümelerine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir (Balcı 1999).

Tanım 2.2 $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa (x_k) dizisine sınırlı dizi denir (Balcı 1999).

Tanım 2.3 (x_k) bir reel sayı dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $k > k_0$ olduğunda $|x_k - l| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa (x_k) dizisi l ye yakınsaktır denir ve

$$\lim x_k = l \text{ veya } (x_k) \to l$$

şeklinde gösterilir (Balcı 1999).

Tanım 2.4 $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin eleman sayısını $|K|$ ile gösterelim. Yani,

$$|K| = cardK$$

olsun. K, $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesi ve

$$K_n = \{k \leq n : \ k \in K\}$$

olsun. Buna göre K kümesinin sırasıyla alt ve üst yoğunluğu,

$$\underline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} inf \frac{|K_n|}{n}, \quad \overline{\delta}(K) = \lim_{n\to\infty} sup \frac{|K_n|}{n}$$

dır. $\frac{|K_n|}{n}$ dizisinin limitinin var olması durumunda yani,

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$$

eşitliğinin sağlanması halinde, bu limite $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir. Yani,

$$\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K) = \delta(K)$$

ise $K \subset \mathbb{N}$ kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \ k \in K\}|$$

dır (Niven vd. 1991).

Tanım 2.5 $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda S-lim$x = L$ veya $x_k \to L(S)$ yazılır. Eğer $L = 0$ ise, $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir (Fast 1951).

Tanım 2.6 $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olsun. Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k \geq N$ ve her $k \notin A$ için $|x_k - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen her k için yakınsaktır denir (Buck 1953).

Bir x=(x_k) dizisi sıfır yoğunluğa sahip bir cümlenin dışındaki her k için bir P özelliğine sahip ise x dizisi hemen her k için P özelliğine sahiptir denir ve ‘’ h.h.k ’’ ile gösterilir.

Tanım 2.7 Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ve h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ ise yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine İstatistiksel Cauchy dizisi denir (Fridy 1985).

Tanım 2.8 $x = (x_k)$ bir dizi ve p pozitif bir reel sayı olsun. Eğer

$$\lim_{n} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p- Cesàro toplanabilirdir denir (Connor 1988).

Tanım 2.9 Pozitif tamsayıların artan bir dizisi θ=$\{k_r\}$ olsun. Eğer k_0= 0 olmak üzere r $\to \infty$ için $h_r = k_r$ - $k_{r-1} \to \infty$ ise $\theta = \{k_r\}$ dizisine lacunary dizisi denir (Freedman vd. 1978).

$\theta = \{k_r\}$ lacunary dizisi ile oluşturulan aralıklar I_r : =(k_{r-1}, k_r] ile gösterilecek ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

Tanım 2.10 θ={k_r} bir lacunary dizisi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak veya S_θ yakınsaktır denir. Bu durum $S_\theta - lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\theta)$ sembolleriyle gösterilir (Fridy ve Orhan 1992).

Tanım 2.11 İki negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için

$$\lim_k \frac{x_k}{y_k} = 1$$

ise $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine asimptotik denk diziler denir ve $x \sim y$ ile gösterilir. Eğer limit L ise $x \overset{L}{\sim} y$ kullanılır (Marouf 1993).

Tanım 2.12 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\left\{k \leq n : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise bu dizilere L katlı asimptotik istatistiksel denk diziler denir ve $x \overset{S_L}{\sim} y$ ile gösterilir. Eğer L=1 ise x ve y dizilerine basitçe asimptotik istatistiksel denk diziler denir ve $x \overset{S}{\sim} y$ ile gösterilir (Patterson 2003).

Tanım 2.13 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \frac{x_k}{y_k} = L$$

ise $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı deferred asimptotik denktir denir ve $x \overset{D_L}{\sim} y$ ile gösterilir. L =1 olduğunda basitçe deferred asimptotik denktir denir ve $x \overset{D}{\sim} y$ ile gösterilir (Koşar vd. 2017).

Tanım 2.14 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right|^r = 0$$

ise $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizilerine L katlı kuvvetli r-deferred Cesàro asimptotik denktir denir ve $x \overset{D_L^r}{\sim} y$ ile gösterilir. L=1 ise basitçe kuvvetli r-deferred Cesàro asimptotik denktir denir ve $x \overset{D^r}{\sim} y$ ile gösterilir. $q(n) = n,\ p(n) = 0$ durumunda kuvvetli r- Cesàro asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{C_L^r}{\sim} y$ ile gösterilir (Koşar vd. 2017)

Tanım 2.15 Negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri ve $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \left|\left\{p(n) < k \le q(n) : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise L katlı asimptotik deferred istatistiksel denktir denir ve $x \overset{DS_L}{\sim} y$ ile gösterilir. L =1 ise basitçe asimptotik deferred istatistiksel denktir denir ve $x \overset{DS}{\sim} y$ ile gösterilir (Koşar vd. 2017).

Tanım 2.16 θ bir lacunary dizi, negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri için $\forall\varepsilon > 0$ olacak şekilde

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \left|\left\{k \in I_r : \left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise bu dizilere L katlı asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler denir ve $x \overset{S_\theta^L}{\sim} y$ ile gösterilir. $L = 1$ ise basitçe asimptotik lacunary istatistiksel denk diziler denir (Patterson ve Savaş 2006).

Tanım 2.17 $\lambda = (\lambda_n)$, $\lim_n \lambda_n = \infty$ olacak şekilde pozitif sayıların azalmayan bir dizisi ve $I_n = [n - \lambda_n + 1, n]$ olmak üzere $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \ge \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine L ye λ-istatistiksel yakınsaktır veya S_λ-yakınsaktır denir.

Bu durumda $S_\lambda - lim x = L$ veya $x_k \to L(S_\lambda)$ yazılır ve

$$S_\lambda = \{x : \exists L \in \mathbb{R}, S_\lambda - lim x = L\}$$

dır (Mursaleen 2000).

Tanım 2.18 X ve Y, tüm diziler uzayı olan ω nın iki alt cümlesi ve $\mathrm{A} = (a_{nk})$ reel yada kompleks terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in \mathrm{X}$ ve her $n \geq 1$ için

$$y_n := \mathrm{A}_n x := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise $y = (y_n) = (\mathrm{A}_n x) = \mathrm{A}x$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer her $x \in \mathrm{X}$ için $y = (\mathrm{A}_n x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in \mathrm{Y}$ ise $\mathrm{A} = (a_{nk})$ matrisi X den Y ye bir matris dönüşümünü tanımlar denir (Maddox 1970).

Tanım 2.19 X dizi uzayını, Y içine dönüştüren bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir ve eğer A, X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = c$ (yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere) $A \in (c, c)$ ise A matrisine konservatif matris ve $A \in (c, c; p)$ ise bu durumda A matrisine regüler matris (ya da kısaca regülerdir) denir (Maddox 1970).

Teorem 2.20 (Silverman-Toeplitz) $A = (a_{n,k})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\exists M > 0$ için, $\|A\| = sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \leq M < \infty$,

(ii) $\lim_{n \to \infty} a_{n,k} = 0, \ k = 0,1,2, \ldots,$

(iii) $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1,$

koşullarının sağlanmasıdır (Maddox 1970).

Tanım 2.21 l_∞ üzerinde tanımlı bir $L: l_\infty \to \mathbb{R}$ lineer fonksiyoneli aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa L ye bir Banach limiti denir.

(i) Her $n = 0,1,2, \ldots$ için $x_n \geq 0$ olmak üzere $L(x) \geq 0$,

(ii) $e = (1,1, \ldots)$ olmak üzere $L(e) = 1$,

(iii) D, ω üzerinde $D\big((x_n)\big) = (x_{n+1})$ olmak üzere $L(x) = L(Dx)$

(Banach 1932).

Tanım 2.22 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli hemen hemen yakınsaktır denir (Maddox 1978).

Tanım 2.23 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, $0 < p < \infty$ olmak üzere, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x_{k+m} - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi L sayısına kuvvetli p -hemen hemen yakınsaktır denir (Mursaleen ve Edely 2009).

3. DEFERRED CESÀRO ve DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

Bu bölümde deferred Cesàro yakınsaklık, $D_{p,q}$-yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklık tanımları verilecek ve kapsam bağıntıları başlığı altında kuvvetli deferred Cesàro ile deferred istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

3.1 Tanımlar

Tanım 3.1.1 $p = \{p(n): n \in \mathbb{N}\}$ ve $q = \{q(n): n \in \mathbb{N}\}$

$$p(n) < q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty \tag{3.1}$$

şartlarını sağlayan negatif olmayan tamsayıların dizileri olmak üzere $x = (x_k)$ reel ya da kompleks değerli dizisinin deferred Cesàro ortalaması

$$\left(D_{p,q}x\right)_n := \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k\,, \quad n = 1,2,3,\dots$$

biçiminde tanımlanır. $\left(D_{p,q}x\right)_n$ dönüşüm dizisine $x = (x_k)$ dizisinin deferred Cesàro ortalaması denir (Agnew 1932).

Tanım 3.1.2 Bir $x = (x_k)$ dizisi ve l sayısı verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k = l$$

ise $x = (x_k)$ dizisine l sayısına $D_{p,q}$-yakınsaktır denir. $D_{p,q}$-yakınsak dizilerin kümesi $D[p,q]$ sembolü ile gösterilir (Agnew 1932).

Tanım 3.1.3 Bir $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_k - l| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına kuvvetli $D_{p,q}$-yakınsak denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = l\ (D[p,q])$ ile gösterilir (Agnew 1932).

Tanım 3.1.4 x=(x_k) reel ya da karmaşık terimli bir dizi, $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ise $p(n) < q(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$ koşullarını sağlayan diziler olsun. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_{D_{p,q}}(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), k \in K\}|$$

limiti var ve sonlu ise bu sayıya K'nın deferred yoğunluğu denir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2013).

Tanım 3.1.5 Bir x=(x_k) dizisi verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k : p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise x=(x_k) dizisi $l\in\mathbb{R}$ ye deferred istatistiksel yakınsaktır denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ ($DS[p,q]$) ile gösterilir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2013).

Aşağıdaki önermeler geçerlidir:

(i) Eğer $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ ise bu takdirde Tanım 3.1.5'den istatistiksel yakınsak dizi elde edilir.

(ii) $q(n) = k_n$ ve $p(n) = k_{n-1}$ olarak alırsak (negatif olmayan tamsayıların herhangi bir lacunary dizisi için n→ ∞ iken k_n- $k_{n-1} \to \infty$) bu takdirde Tanım 3.1.5'den lacunary istatistiksel yakınsak dizi elde edilir.

(iii) $q(n) = \lambda_n$ ve $p(n) = 0$ olursa (λ_n doğal sayıların artan bir dizisidir öyle ki $\lim_n \lambda_n = \infty$.) bu takdirde Tanım 3.1.5'den λ-istatistiksel yakınsak dizi elde edilir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

3.2 Kapsam Bağıntıları

Bu kısımda $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (3.1)'de verilen koşullarını sağlayan dizileri olmak üzere, ilk olarak kuvvetli deferred Cesàro yakınsaklık ile deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ele alınacak olup sonrasında ise istatistiksel yakınsaklık ve deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri üzerine konan koşullar altında ele alınacaktır.

Teorem 3.2.1 $x_n \to l(D[p,q])$ ise bu takdirde $x_n \to l(DS[p,q])$ dir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: $x_n \to l(D[p,q])$ olsun. Keyfi bir ε>0 için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p+1}^{q(n)} |x_k - l|$$

$$= \frac{1}{q(n)-p(n)} \left(\sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} + \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)} \right) |x_k - l|$$

$$\geq \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} |x_k - l|$$

$$\geq \varepsilon \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{p(n) < k \leq q(n): |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında n→ ∞ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu ise $x = (x_n)$ dizisinin l sayısına deferred istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Sonuç 3.2.2 $x_n \to l$ (n→ ∞) ise bu takdirde $x_n \to l\ (DS[p,q])$ (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Uyarı 3.2.3 Teorem 3.2.1 ve Sonuç 3.2.2 nin karşıtı genelde doğru değildir. Şimdi bunu bir örnek ile gösterelim (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Örnek 3.2.4 $q(n)$ monoton artan bir dizi ve $m_0 \neq 0$ doğal sayıların keyfi bir sabiti olmak üzere x=(x_k) dizisini göz önüne alalım.

$$x_k := \begin{cases} k^2, & \left[|\sqrt{q(n)}|\right] - m_0 < k \leq \left[|\sqrt{q(n)}|\right], \quad n = 1,2,3,... \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

Eğer 0< $p(n) \leq \left[|\sqrt{q(n)}|\right]$-$m_0$ koşulunu sağlayan $p(n)$ dizisi için $D[p,q]$ göz önüne alınırsa bu takdirde keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n) < k \leq q(n): |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| = \frac{m_0}{q(n)-p(n)} \to 0$$

sağlanır. Bu ise, x=(x_k) dizisi verilmiş $q(n)$ ve özel seçilmiş $p(n)$ için $x_n \to l$ (D$S[p,q]$)

olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{p(n)+1}^{q(n)}|x_k-0| \geq \frac{m_0\left([|\sqrt{q(n)}|]-m_0\right)^2}{q(n)-p(n)} \to m_0\ ,$$

sağlanır. Bu ise n→ ∞ iken (x_k) dizisinin sıfıra $D[p,q]$ yakınsamadığını gösterir. Buradan açıktır ki dizi olağan durumda sıfıra yakınsak değildir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Teorem 3.2.5 $x=(x_n)\in l_\infty$ ve $x_n \to l(DS[p,q])$ ise bu takdirde $x_n \to l(D[p,q]\,)$ dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat $x=(x_n)\in l_\infty$ ve $x_n \to l(DS[p,q])$ olduğunu kabul edelim. (x_n) dizisi sınırlı olduğundan $\forall n$ için $|x_n-l|\leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı vardır. Böylece,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|$$

$$=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left(\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}\right)|x_k-l|$$

$$\leq \frac{1}{q(n)-p(n)}\left(M\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}1+\ \varepsilon\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}1\right)$$

$$\leq M\frac{1}{q(n)-p(n)}|\{k: p(n)<k\leq q(n),\ \ |x_k-l|\geq \varepsilon\}|$$

$$+\ \varepsilon\frac{1}{q(n)-p(n)}|\{k: p(n)<k\leq q(n),\ \ |x_k-l|< \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|=0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.6 $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı ise bu takdirde $x_n \to l(S)$ ise $x_n \to l$ (DS$[p,q]$) dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: İspatsız olarak $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif doğal sayıların dizisi hakkında bir not verelim:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a\in \mathbb{R} \text{ ve } \lim_{n\to\infty} b_n = \infty \text{ ise o halde } \lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a.$$

(x_n) üzerindeki varsayımdan $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0 \tag{3.2}$$

yazılır. $q(n)$ dizisi (3.1) şartını sağladığından

$$\left\{\frac{|\{k: k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|}{q(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisi sıfıra yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\} \subset \{k: k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

kapsamı ve

$$|\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k: k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizlikten

$$\frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k: p(n) < k \leq q(n),\ \ |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

$$\leq \left(1 + \frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right) . \frac{1}{q(n)} |\{k: k \leq q(n),\ \ |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

ve her iki tarafın n→ ∞ giderken limiti alınırsa

$$x_k \to l(DS[p,q])$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.7 $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(n) < n$ olacak şekilde bir dizi ve $\left\{\frac{n}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde $x_n \to l(S)$ ise $x_n \to l(DS[p,q])$ (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Uyarı 3.2.8 Teorem 3.2.6 nın tersi $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı olsa bile doğru değildir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Örnek 3.2.9 $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{2}, & n\, tek\, ise \\ \dfrac{-n}{2}, & n\, çift\, ise \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer $p(n) = 2n$, $q(n) = 4n$ olarak seçilirse Teorem 3.2.6 nın koşullarının sağlandığı ve $x_n \to 0(D[2n, 4n])$ olduğu açıktır. Teorem 3.2.1 den $x_n \to 0(DS[2n, 4n])$ dır. Fakat keyfi küçük bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \neq 0$$

elde edilir ki buradan da $x_n \nrightarrow 0(S)$ olduğu anlaşılır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Tanım 3.2.10 $DS[p, q]$metodu $\{p(n)\}$ ve $\{q(n)\}$ nin (3.1) şartına ek olarak $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}$ tüm n ler için sınırlı olduğunda tam deferred olarak adlandırılır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Uyarı 3.2.11 İki tam deferred istatistiksel yakınsama metodu birbirini içermemelidir.

$$x_n = \begin{cases} k+1, & n = 2k+1, \\ -k, & n = 2k. \end{cases}$$

olsun. $x_n \to 0(DS[2n, 4n])$ ve $x_n \to \frac{1}{2}(DS[2n-1, 4n-1])$ olduğu açıktır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

Teorem 3.2.12 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ olsun. Bu takdirde $x_n \to l(DS[p, n])$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \to l(S)$ 'dir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: ($\Rightarrow$) $x_k \to l(DS[p, n])$ olduğunu varsayalım. Agnew tarafından kullanılan tekniği uygulayacağız. Bu takdirde herhangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$p(n)=n^{(1)},\ p(n^{(1)}) = n^{(2)},\ p(n^{(2)}) = n^{(3)}, \dots,$$

ve $\{k \leq n, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\{k \leq n, |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k \leq n^{(1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(1)} < k \leq n, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

ve $\{1 < k \leq n^{(1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\{1 < k \leq n^{(1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k \leq n^{(2)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(2)} < k \leq n^{(1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

ve $\{k \leq n^{(2)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\{k \leq n^{(2)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k \leq n^{(3)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(3)} < k \leq n^{(2)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

olarak yazılabilir. Eğer bu işlem devam ederse $n^{(h)} \geq 1$ ve $n^{(h+1)} = 0$ olduğu n ye bağlı belli bir $h > 0$ pozitif tamsayısı için

$$\{k \leq n^{(h-1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} = \{k \leq n^{(h)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\} \cup \{n^{(h)} < k \leq n^{(h-1)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeden

$$\frac{1}{n}\{k \leq n, |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$
$$= \sum_{m=0}^{h} \frac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n} \frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} \left|\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|$$

eşitliği her n için sağlanır. Ayrıca $x_n \to l(DS[p,n])$ olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{\frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} \left|\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)}, |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|\right\}_{m\in\mathbb{N}}$$

dizisi yakınsaktır.

$$b_{n,m} = \begin{cases} \dfrac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n}, & m = 0,1,2,\dots,h, \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$(n^{(0)} = n)$

matrisini göz önüne alalım. $(b_{n,m})$ matrisi Silverman Toeplitz teoremini sağlar. Böylece n→ ∞ iken

$$\frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} |\{n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \to 0$$

den dolayı

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

dır.

$(\Leftarrow)$ $q(n) = n$ olduğundan (3.1) sağlanır. Bu takdirde teoremin tersi Teorem 3.2.6 nın basit bir sonucudur.

Sonuç 3.2.13 $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin hemen hemen her pozitif tamsayıyı içerdiğini kabul edelim. Bu takdirde $x_n \to l(DS[p,q])$ ise $x_n \to l(S)$ 'dir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: Keyfi bir $\{p(n)\}$ için $x_n \to l(DS[p,q])$ olsun ve $\{q(n)\}$ kümesinden m den büyük olan tüm pozitif tamsayıları içerecek şekilde yeterince büyük pozitif m tamsayısı seçelim. Bu takdirde (k_n) indeks dizisi,

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 1$$

ve $\forall n > m$ için $q_{k_n} = n$ olacak biçimde seçilsin. (k_n) nin monoton artan bir dizi olduğu açıktır. O halde, kabulden $x_n \to l\left(DS\left[p_{k_n}, q_{k_n}\right]\right)$ ve Teorem 3.2.12 den $x_n \to l(S)$ 'dır.

Sonuç 3.2.14 $\{q(n)\}$ nin hemen hemen tüm pozitif tamsayıları içerdiğini kabul edelim. $x = (x_n)$, keyfi bir $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ için $x_n \to l(DS[p,q])$ ve $\Delta x_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ olacak şekilde bir dizi ise bu takdirde $x_n \to l(n \to \infty)$ dir (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: Sonuç 3.2.13 ve $q(n)$ üzerindeki kabulden $x_n \to l(S)$ olduğu açıktır. Bu yüzden [Fridy 1985, Teorem 3] kullanılırsa ispat elde edilir.

Teorem 3 $st - lim x_k = L$ ve $\Delta x_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$ olacak şekilde bir x dizisi varsa bu takdirde $\lim x_k = L$ dir (Fridy 1985).

Şimdi $DS[p',q']$ ile $DS[p,q]$ yü karşılaştıralım. Bu kısımda $DS[p,q]$ ve $DS[p',q']$ metodları $\forall$n $\in \mathbb{N}$ için

$$p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n) \tag{3.3}$$

kısıtlaması altında kıyaslanacaktır.

Teorem 3.2.15 $\{k: p(n) < k \leq p'(n)\}$ ve $\{k: q'(n) < k \leq q(n)\}$ kümeleri $\forall n \in \mathbb{N}$ için sonlu kümeler olacak şekilde $p' = \{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q' = \{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, (3.3) şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri olsun. Bu takdirde $x_k \to l(DS[p',q'])$ ise $x_k \to l(DS[p,q])$ 'dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat: $x = (x_k)$ dizisinin $x_k \to l(DS[p',q'])$ olduğunu göz önüne alalım. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$
$$= \{k: p(n) < k \leq p'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

$$\cup \{k: p'(n) < k \leq q'(n), |x_k - L| \geq \varepsilon\}$$
$$\cup \{k: q'(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

eşitliği ve

$$\frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \frac{1}{q'(n) - p'(n)} |\{k: p(n) < k \leq p'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$
$$+ \frac{1}{q'(n) - p'(n)} |\{k: p'(n) < k \leq q'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$
$$+ \frac{1}{q'(n) - p'(n)} |\{k: q'(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

sağlanır. $n \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{k: p(n) < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Bu da iddiayı ispatlar.

Teorem 3.2.16 $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p'(n)} < \infty$$

olacak şekilde (3.3) şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri olsun. Bu takdirde $x_k \to l(DS[p, q])$ ise $x_k \to l(DS[p', q'])$ dır (Küçükaslan ve Yılmaztürk 2016).

İspat:

$$\{k: p'(n) + 1 \leq k \leq q'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\} \subset \{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}$$

kapsaması ve

$$|\{k: p'(n) + 1 \leq k \leq q'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\frac{1}{q'(n) - p'(n)} |\{k: p'(n) + 1 \leq k \leq q'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n) + 1 \leq k \leq q(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}|$$

dır. $n \to \infty$ iken limit alınırsa istenilen sonuç; yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q'(n) - p'(n)} |\{k: p'(n) + 1 \leq k \leq q'(n), |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0.$$

4. DEFERRED HEMEN HEMEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAK DİZİLER

Bu bölümde deferred hemen hemen yakınsaklık, kuvvetli deferred hemen hemen yakınsaklık, deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaklık tanımları verilerek bunlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.1 Tanımlar

Tanım 4.1.1 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k+m} = L$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen yakınsaktır denir (Lorentz 1948).

Tanım 4.1.2 $x = (x_k)$ dizisi için eğer, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n: |x_{k+m} - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, $x = (x_k)$ dizisi L sayısına hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir (Savaş ve Nuray 1993).

Tanım 4.1.3 m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{\mathrm{k=p(n)+1}}^{q(n)} x_{k+m} = l$$

ise (x_k) dizisi l ye deferred hemen hemen yakınsaktır denir. Deferred hemen hemen yakınsak diziler $\widehat{D}[p, q]$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.4 m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_{k+m} - l| = 0$$

ise (x_k) dizisi l ye kuvvetli deferred hemen hemen yakınsaktır denir. Kuvvetli deferred hemen hemen yakınsak diziler $\lim_{n\to\infty} x_n = l\ (\widehat{D}[p, q])$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.5 $r > 0$ olmak üzere, m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_{k+m} - l|^r = 0$$

ise (x_k) dizisi l ye kuvvetli r-deferred hemen hemen yakınsaktır denir. Kuvvetli r-deferred hemen hemen yakınsak diziler $\lim_{n\to\infty} x_n = l\ (\widehat{D}_r[p,q])$ ile gösterilecektir.

Tanım 4.1.6 m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (x_k) dizisi l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaktır denir. Deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak diziler $\lim_{n\to\infty} x_n = l\ (\widehat{D}S[p,q])$ ile gösterilecektir.

4.2 Kapsam Bağıntıları

Bu kısımda $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların ve $p(n) < q(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$ koşullarını sağlayan dizileri olmak üzere, kuvvetli deferred hemen hemen yakınsaklık ile deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki ele alınacaktır. Daha sonra hemen hemen istatistiksel yakınsaklık ve deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 4.2.1 (x_n) dizisi kuvvetli deferred hemen hemen yakınsak ise bu takdirde (x_n) dizisi deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_n) dizisi kuvvetli deferred hemen hemen yakınsak olsun. Keyfi bir ε>0 sayısı ve her m için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_{k+m} - l|$$

$$= \frac{1}{q(n)-p(n)} \left(\sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} + \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|<\varepsilon}}^{q(n)} \right) |x_{k+m} - l|$$

$$\geq \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} |x_{k+m}-l|$$

$$\geq \varepsilon \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{p(n)+1 < k \leq q(n): |x_{k+m}-l| \geq \varepsilon\}|$$

Sonra $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n)+1 < k \leq q(n), |x_{k+m}-l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olur ve istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.2 $x = (x_n) \in l_\infty$ ve (x_n) dizisi l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak ise bu takdirde (x_n) dizisi l ye kuvvetli deferred hemen hemen yakınsaktır.

İspat $x = (x_n) \in l_\infty$ (x_n) dizisinin l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. (x_n) dizisi sınırlı olduğundan $\forall n$ için $|x_n - l| \leq M$ olacak şekilde pozitif bir M sayısı vardır. Böylece, her m için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_{k+m}-l|$$

$$= \frac{1}{q(n)-p(n)} \left(\sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} + \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|<\varepsilon}}^{q(n)} \right) |x_{k+m}-l|$$

$$\leq \frac{1}{q(n)-p(n)} \left(M \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)} 1 + \varepsilon \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ |x_{k+m}-l|<\varepsilon}}^{q(n)} 1 \right)$$

$$\leq M \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n)+1 < k \leq q(n),\ |x_{k+m}-l| \geq \varepsilon\}|$$

$$+\varepsilon \frac{1}{q(n)-p(n)} |\{k: p(n)+1 < k \leq q(n),\ |x_{k+m}-l| < \varepsilon\}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} |x_{k+m}-l| = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.3 $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı ve (x_n) dizisi l ye hemen hemen istatistiksel yakınsak ise bu takdirde (x_n) dizisi l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_n) üzerindeki varsayımdan $\forall\varepsilon > 0$ için m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{1 < k \leq n : |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yazılır. $q(n)$ dizisi $p(n) < q(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$ şartını sağladığından her m için

$$\left\{\frac{|\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}|}{q(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisi sıfıra yakınsaktır. Dolayısıyla her m için

$$\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\} \subset \{k: k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}$$

kapsamı ve

$$|\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k: k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}|$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizlikten her m için

$$\frac{1}{q(n) - p(n)}|\{k: p(n) + 1 < k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}|$$
$$\leq \left(1 + \frac{p(n)}{q(n) - p(n)}\right).\frac{1}{q(n)}|\{k: k \leq q(n), |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}|$$

ve her iki tarafın $n \to \infty$ giderken limiti alınırsa (x_n) nın l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğu görülür ki bu da istenilen sonuçtur.

Sonuç 4.2.4 $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(n) < n$ olacak şekilde bir dizi ve $\left\{\frac{n}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı bir dizi olsun. Bu takdirde (x_n) dizisi l ye hemen hemen istatistiksel yakınsak ise (x_n) dizisi l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsaktır.

Uyarı 4.2.5 Teorem 4.2.3 ün tersi $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ sınırlı olsa bile doğru değildir.

Teorem 4.2.6 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ olsun. Bu takdirde (x_n) dizisinin l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin l ye hemen hemen istatistiksel yakınsak olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) (x_k) dizisinin l ye deferred hemen hemen istatistiksel yakınsak olduğunu varsayalım. Agnew tarafından kullanılan tekniği uygulayacağız. Bu takdirde herhangi $n \in \mathbb{N}$ ve her m için

$$p(n) = n^{(1)},\ p(n^{(1)}) = n^{(2)}, p(n^{(2)}) = n^{(3)}, \dots,$$

ve $\{1 < k \leq n\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}$ kümesini

$$\{1 < k \leq n\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}$$
$$= \left\{1 < k \leq n^{(1)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(1)} < k \leq n\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$

ve $\left\{1 < k \leq n^{(1)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$ kümesini

$$\left\{1 < k \leq n^{(1)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$
$$= \left\{1 < k \leq n^{(2)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(2)} < k \leq n^{(1)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$

ve $\left\{1 < k \leq n^{(2)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$ kümesini

$$\left\{1 < k \leq n^{(2)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$
$$= \left\{1 < k \leq n^{(3)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(3)} < k \leq n^{(2)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$

olarak yazılabilir. Eğer bu işlem devam ederse $n^{(h)} \geq 1$ ve $n^{(h+1)} = 0$ olduğu n ye bağlı belli bir $h > 0$ pozitif tamsayısı ve her m için

$$\left\{1 < k \leq n^{(h-1)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$
$$= \left\{1 < k \leq n^{(h)}, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(h)} < k \leq n^{(h-1)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeden

$$\frac{1}{n}\{1 < k \leq n\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\}$$
$$= \sum_{r=0}^{h} \frac{n^{(r)} - n^{(r+1)}}{n} \frac{1}{n^{(r)} - n^{(r+1)}} \left|\left\{n^{(r+1)} < k \leq n^{(r)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

eşitliği her n ve m için sağlanır. $x_n \to l(\widehat{D}S[p,n])$ olduğundan her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{\frac{1}{n^{(r)} - n^{(r+1)}} \left|\left\{n^{(r+1)} < k \leq n^{(r)}\,, |x_{k+m} - l| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\}_{r \in \mathbb{N}}$$

dizisi yakınsaktır.

$$b_{n,r} = \begin{cases} \dfrac{n^{(r)} - n^{(r+1)}}{n}\,, & r = 0,1,2,\dots,h, \\ 0\,, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$(n^{(0)} = n)$

matrisini göz önüne alalım. $(b_{n,r})$ matrisi Silverman Toeplitz teoremini sağlar. Böylece $n \to \infty$ iken her m için

$$\frac{1}{n^{(r)}-n^{(r+1)}}\left|\left\{n^{(r+1)}<k\leq n^{(r)}:|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\right\}\right|\to 0$$

den dolayı m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\{1<k\leq n:|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}|=0$$

dır.

($\Leftarrow$) $q(n)=n$ olduğundan $p(n)<q(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} q(n)=\infty$ sağlanır. Bu takdirde teoremin tersi Teorem 4.2.3 ün basit bir sonucudur.

Şimdi $\widehat{D}S[p',q']$ ve $\widehat{D}S[p,q]$ metotlarını karşılaştıralım. Bu kısımda $\widehat{D}S[p,q]$ ve $\widehat{D}S[p',q']$ metotları $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$p(n)\leq p'(n)<q'(n)\leq q(n) \tag{4.1}$$

koşulu altında kıyaslanacaktır.

Teorem 4.2.7 $\{k: p(n)<k\leq p'(n)\}$ ve $\{k: q'(n)<k\leq q(n)\}$ kümeleri $\forall n\in\mathbb{N}$ için sonlu kümeler olacak şekilde $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, (4.1) şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri olsun. Bu takdirde $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ ($\widehat{D}S[p',q']$) ise $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ ($\widehat{D}S[p,q]$) dır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisi $\lim_{n\to\infty} x_n=l$ ($\widehat{D}S[p',q']$) olsun. Keyfi bir $\varepsilon>0$ sayısı ve her m için

$$\begin{aligned}&\{k: p(n)+1<k\leq q(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}\\&=\{k: p(n)+1<k\leq p'(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}\\&\cup\{k: p'(n)<k\leq q'(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}\\&\cup\{k: q'(n)<k\leq q(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}\end{aligned}$$

eşitliği ve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{q(n)-p(n)}|\{k: p(n)+1<k\leq q(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}|\\&\leq\frac{1}{q'(n)-p'(n)}|\{k: p(n)+1<k\leq p'(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}|\\&+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}|\{k: p'(n)<k\leq q'(n),|x_{k+m}-l|\geq \varepsilon\}|\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}|\{k: q'(n) < k \le q(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}|$$

sağlanır. $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)}|\{k: p(n)+1 < k \le q(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}| = 0$$

elde ederiz. Bu da iddiayı ispatlar.

Teorem 4.2.8 $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} < \infty$$

olacak şekilde (4.1) şartını sağlayan pozitif doğal sayıların dizileri olsun. Bu takdirde $\lim_{n\to\infty} x_n = l \ (\widehat{D}S[p,q])$ ise $\lim_{n\to\infty} x_n = l \ (\widehat{D}S[p',q'])$ dır.

İspat: Her $\varepsilon > 0$ ve m için

$$\{k: p'(n)+1 \le k \le q'(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\} \subset \{k: p(n)+1 < k \le q(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}$$

kapsamasının ve

$$|\{k: p'(n)+1 \le k \le q'(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}| \le |\{k: p(n)+1 < k \le q(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}|$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu görmek kolaydır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve m için

$$\frac{1}{q'(n)-p'(n)}|\{k: p'(n)+1 \le k \le q'(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}|$$

$$\le \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} \frac{1}{q(n)-p(n)}|\{k: p(n)+1 \le k \le q(n), |x_{k+m} - l| \ge \varepsilon\}|$$

dır. $n \to \infty$ iken limit alınırsa istenilen sonuç elde edilir.

5. ASİMPTOTİK DEFERRED HEMEN HEMEN İSTATİSTİKSEL DENK DİZİLER

Bu bölümde hemen hemen asimptotik istatistiksel denk dizi, hemen hemen λ-asimptotik denk dizi, deferred hemen hemen asimptotik denklik, kuvvetli *r*-deferred hemen hemen asimptotik denklik, asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denklik tanımları verilecektir ve aralarındaki ilişki incelenecektir.

5.1 Tanımlar

Tanım 5.1.1 Her $\varepsilon > 0$ için m=1,2,3,…, ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n\colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \tag{5.1}$$

ise negatif olmayan x=(x_k) ve y=(y_k) dizilerine L-katlı $\hat{S}$-asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{\hat{S}}{\sim} y$ ile gösterilir. (5.1) de L =1 ise basitçe hemen hemen asimptotik istatistiksel denk diziler denir (Savaş ve Başarır 2006).

Tanım 5.1.2 Her $\varepsilon > 0$ için m=1,2,3,…, ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n}\left|\left\{k \in I_n\colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise negatif olmayan x=(x_k) ve y=(y_k) dizilerine L-katlı $\hat{S}_{\lambda}$–asimptotik denk diziler denir ve $x \overset{\hat{S}_{\lambda}}{\sim} y$ ile gösterilir. L =1 ise basitçe hemen hemen λ −asimptotik denk diziler denir (Savaş ve Başarır 2006).

Tanım 5.1.3 m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} = L$$

ise negatif olmayan $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri L katlı deferred hemen hemen asimptotik denktir denir ve $x \overset{\hat{D}_L}{\sim} y$ ile gösterilir ve $L = 1$ olduğunda basitçe deferred hemen hemen asimptotik denktir denir ve $x \overset{\hat{D}}{\sim} y$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.4 m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|^{r}=0$$

dizisinin deferred Cesàro ortalaması sıfıra giderse L katlı kuvvetli r-deferred hemen hemen asimptotik denktir denir ve $x\overset{\hat{D}_L^r}{\sim}y$ ile gösterilir. $L=1$ ise basitçe kuvvetli r-deferred hemen hemen asimptotik denktir denir ve $x\overset{\hat{D}^r}{\sim}y$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.5 $\forall\varepsilon>0$ için m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0 \tag{5.2}$$

ise L katlı asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denktir denir ve $x\overset{D\hat{S}_L}{\sim}y$ ile gösterilir. $L=1$ ise basitçe asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denktir denir ve $x\overset{D\hat{S}}{\sim}y$ ile gösterilir.

Uyarı 5.1.6

(i) $q(n)=n$ ve $p(n)=0$ ise bu takdirde (5.1) ile (5.2) denktir.

(ii) $q(n)=\lambda_n$ ve $p(n)=0$ ise $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$ olacak şekilde λ_n doğal sayıların kesin artan bir dizisidir bu takdirde (5.2)'den, L katlı hemen hemen λ-asimptotik denk dizi elde edilir.

5.2 Dizilerin $D\hat{S}_L$ Denkliği

$x=(x_n)$ ve $y=(y_n)$ reel sayıların dizileri olsun. $\forall n\in\mathbb{N}$ için '' $x_n\leq y_n$'' ise ''$x<y$'' notasyonu kullanılacaktır.

Teorem 5.2.1 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$, $z=(z_n)$ negatif olmayan reel sayıların dizileri olsun. $x\overset{D\hat{S}_L}{\sim}y$ ve $z<x$ ise bu takdirde $z\overset{D\hat{S}_L}{\sim}y$ dir.

İspat: Farz edelim ki $x\overset{D\hat{S}_L}{\sim}y$ ve $z<x$ olsun. $\forall k,m\in\mathbb{N}$ için $\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\leq\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|$ sağlandığı için bu takdirde her m için

$$\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

kapsaması sağlanır. Bundan dolayı herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her m için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

dir. $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.2.2 $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$ negatif olmayan reel sayıların dizileri olsun. $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ve $y < z$ ise bu takdirde $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} z$ dir.

İspat: İspat, Teorem 5.2.1 in ispatı takip edilerek elde edilebilir. Bu yüzden ispata burada değinilmedi.

Tanım 5.2.3 $x = (x_n)$, sıfır deferred yoğunluğa sahip olan bir küme hariç $\forall n \in \mathbb{N}$ için bir P özelliğini sağlarsa bu takdirde $x = (x_n)$ nin deferred hemen hemen tüm $n \in \mathbb{N}$ için P özelliğine sahip olduğu söylenir ve bu ''d.h.h.n'' ile gösterilir (Koşar vd. 2017)

Teorem 5.2.4 $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ ve $z = (z_n)$ negatif olmayan reel sayıların herhangi bir dizisi olsunlar. $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ve $z < x$ (d.h.h.n) ise bu takdirde $z \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: $A \coloneqq \{n: z_n > x_n\}$ olsun. Varsayımdan $\delta_{p,q}A = 0$ dır.

$$\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \leq \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \qquad (\mathrm{d.h.h.n})$$

eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde her m için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \frac{1}{q(n)-p(n)}|A|$$

dır. $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olup $z \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ elde edilir.

Teorem 5.2.5 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ ve $z=(z_n)$ negatif olmayan reel sayıların dizileri olsun. $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ve $y<z$ (d.h.h.n) ise bu takdirde $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} z$ dir.

İspat: İspat, Teorem 5.2.4 ün ispatı göz önüne alınarak kolaylıkla elde edilebilir. Bu yüzden ispatı verilmedi.

Teorem 5.2.6 $x=(x_n)$, $y=(y_n)$ ve $z=(z_n)$ negatif olmayan reel sayıların dizileri olsun. $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ve $x=z$ (d.h.h.n) ise bu takdirde $z \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: $A\coloneqq\{n: x_n\neq z_n\}$ alalım. Varsayımdan $\delta_{p,q}(A)=0$ dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
&\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\\
&=\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap(A^C\cup A)\\
&\subseteq\left(\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap A^C\right)\\
&\cup\left(\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cap A\right)\\
&\subseteq\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\cup A
\end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|\\
&\leq\frac{1}{q(n)-p(n)}\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}+\frac{1}{q(n)-p(n)}|A|
\end{aligned}$$

$n\to\infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|\frac{z_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olur ve istenilen sonuç elde edilir.

5.3 $\widehat{D}_L^r$ nin $D\widehat{S}_L$ Denkliği ile Kıyaslanması

Bu kısımda dizilerin kuvvetli r-deferred hemen hemen asimptotik denkliği ve asimptotik deferred hemen hemen istatistiksel denkliği arasındaki ilişkiden bahsedeceğiz.

Teorem 5.3.1 $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ negatif olmayan reel değerli diziler olsun. Bu takdirde $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ ise $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: Farz edelim ki $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ olsun öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r = 0$$

dır. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ ve her m için

$$\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r = \left(\sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon}}^{q(n)} + \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| < \varepsilon}}^{q(n)} \right) \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r$$

$$\geq \sum_{\substack{k=p(n)+1 \\ \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon}}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r \geq \varepsilon^r . \left|\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

ve

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r$$

$$\geq \varepsilon^r . \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.3.2 l_∞ tüm sınırlı dizilerin kümesini göstermek üzere $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \in l_\infty$ ise bu takdirde $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ise $x \overset{\hat{D}_L^r}{\sim} y$ dir.

İspat: Farz edelim ki $\left(\frac{x_n}{y_n}\right) \in l_\infty$ olsun ve $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ şartı sağlansın. Bu takdirde $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ pozitif reel sayısı vardır. Bu yüzden herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve her m için A ve B kümeleri sırasıyla

$\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$ ve $\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| < \varepsilon\right\}$

gösterildiğinde

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r = \frac{1}{q(n)-p(n)} \left(\sum_{k\in A} + \sum_{k\in B}\right) \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r$$

$$\leq \frac{M^r}{q(n)-p(n)} \left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| + \varepsilon^r$$

eşitsizliği sağlanır. Bundan dolayı $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right|^r = 0$$

olur ve istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.3.3 $q(n) = n$ ve keyfi $p(n)$ e göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ise bu takdirde $x \overset{\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: Varsayalım ki $q(n) = n$ ve keyfi $p(n)$ e göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ olsun. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $h \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n^{h+1} = 0$ ve

$$p(n) = n^{(1)}, p\left(n^{(1)}\right) = n^{(2)}, p\left(n^{(2)}\right) = n^{(3)}, \dots, p\left(n^{(h-1)}\right) = n^{(h)} \geq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu nedenle $\left\{k \leq n : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$ kümesi

$$\left\{k \leq n^{(1)}: \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(1)} < k \leq n : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

olarak ifade edilebilir. Aynı şekilde ilk küme

$$\left\{k \leq n^{(2)}: \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(2)} < k \leq n^{(1)} : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

olarak ifade edilebilir. Sonlu adımdan sonra (en fazla h adım)

$$\left\{k \leq n^{(h-1)} \colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

$$= \left\{k \leq n^{(h)} : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \cup \left\{n^{(h)} < k \leq n^{(h-1)} : \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$T_t = \frac{1}{n^{(t)} - n^{(t+1)}} \left|\left\{n^{(t+1)} < k \leq n^{(t)} \colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n \colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = \sum_{t=0}^{k} \frac{n^{(t)} - n^{(t+1)}}{n} T_t$$

dir. Eğer

$$a_{n,t} = \begin{cases} \dfrac{n^{(t)} - n^{(t+1)}}{n}, & t = 0,1,2,\dots,h \\ 0 & ,diğer\ durumlarda \end{cases}$$

olacak şekilde bir $A = (a_{n,t})$ matrisi göz önüne alırsak bu takdirde

$$\left\{\frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n \colon \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisi (T_t) dizisinin $(a_{n,t})$ dönüşümüdür. $A = (a_{n,t})$ matrisi Silverman-Toeplitz Teoremini sağladığından dolayı ve $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ varsayımından istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.3.4 Herhangi bir $p(n)$ ve $q(n) = n$ e göre bir $D\hat{S}_L$ denkliğinin $\hat{S}_L$ denkliğine eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\left\{\frac{p(n)}{n-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ nin sınırlı olmasıdır.

5.4 Herhangi bir $p(n)$ ve $q(n)$ için $D\hat{S}_L$- Denkliğinin Kıyaslanması

$p(n) < q(n)$ ve $\lim_{n\to\infty} q(n) = \infty$ şartlarının yanında $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$ şartını sağlayan $p' = \{p'(n)\}$ ve $q' = \{q'(n)\}$ yi göz önüne alalım. $E := \{p(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$, $E' := \{p'(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$, $F := \{q(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ ve $F' := \{q'(n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ birleşim kümesi olarak gösterilsin.

Teorem 5.4.1 $F' \setminus F$ kümesi sonlu ve $\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)-q'(n)}{q'(n)-p(n)} < \infty$ ise bu takdirde p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ise p ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: $F' \setminus F$ sonlu olduğu için bu takdirde $\{q'(n): n > n_0\} \subset \{q(n): n \in \mathbb{N}\}$ kapsayacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu yüzden tüm $n \geq n_0$ için $q'(n) = q(j(n))$ olacak şekilde $j = \{j(n)\}$ kesin artan dizisi vardır. Bundan dolayı yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ ve her m için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\frac{1}{q'(n) - p(n)} \left| \left\{ p(n) < k \leq q'(n): \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$= \frac{1}{q(j(n)) - p(n)} \left| \left\{ p(n) < k \leq q(j(n)): \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$\leq \frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p(n)} . \frac{1}{q(n) - p(n)} \left| \left\{ p(n) < k \leq q(n): \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$
$$= \left(\frac{q(n) - q'(n)}{q'(n) - p(n)} + 1 \right) \frac{1}{q(n) - p(n)} \left| \left\{ p(n) < k \leq q(n): \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \geq \varepsilon \right\} \right|$$

varsayım altında istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.4.2 $F' \setminus F$ kümesi sonlu ve $\lim_{n\to\infty} inf \frac{q'(n)-p(n)}{q(n)-p(n)} > 0$ ise bu takdirde p ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ ise p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ dir.

İspat: Teorem 5.4.1 takip edilerek ispat yapılabilir. Bu yüzden ispat verilmedi.

Sonuç 5.4.3 $F \triangle F'$ sonlu ise bu takdirde p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ olması için gerek ve yeter şart p ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ olmasıdır.

Teorem 5.4.4 $E' \setminus E$ kümesi sonlu ve $\lim_{n\to\infty} inf \frac{q(n)-p'(n)}{q(n)-p(n)} > 0$ ise bu takdirde p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ ise p' ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ dir.

İspat: Teorem 5.4.1 deki görüşün aynısı kullanılarak ispat yapılabilir. Bu yüzden ispat verilmedi.

Teorem 5.4.5 $\{k: p(n) < k \leq p'(n)\}$ ve $\{k: q'(n) < k \leq q(n)\}$ kümeleri sonlu olacak şekilde $p'(n)$ ve $q'(n)$ dizileri $p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$ şartını sağlasın. Bu takdirde p' ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ ise p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\underset{\sim}{}} y$ dir.

İspat: Farz edelim ki p' ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ olsun. Bu yüzden keyfi bir $\varepsilon > 0$ için $a_1 := |\{k: p(n) < k \leq p'(n)\}|$ ve $a_2 := |\{k: q'(n) < k \leq q(n)\}|$ olmak üzere her m için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq p'(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\left\{p'(n) < k \leq q'(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\left\{q'(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{a_1}{q'(n)-p'(n)}$$
$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\left\{p'(n) < k \leq q'(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{a_2}{q'(n)-p'(n)}$$

$n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

dır. Bu yüzden p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

Teorem 5.4.6 $\lim_{n\to\infty}\frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} = 0$ olacak şekilde $p'(n)$ ve $q'(n)$ dizileri $p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$ şartını sağlasın. Bu takdirde p ve q ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ ise p' ve q' ya göre $x \overset{D\hat{S}_L}{\sim} y$ dir.

İspat: $p(n) \leq p'(n) < q'(n) \leq q(n)$ şartından her m için

$$\left\{p'(n) < k \leq q'(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\} \subset \left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}$$

kapsamı ve

$$\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\left\{p'(n) < k \leq q'(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$
$$\leq \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}.\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n) < k \leq q(n): \left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Daha sonra $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} = 0$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q'(n)-p'(n)} \left| \left\{ p'(n) < k \le q'(n) : \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 5.4.7 Teorem 5.4.5 in varsayımı altında herhangi sınırlı x ve y dizileri için p' ve q' ya göre $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ ise p ve q ya göre $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ dir.

İspat: x ve y sınırlı diziler olsun, bu takdirde $\left|\frac{x_k}{y_k} - L\right| \le M$ olacak şekilde bir pozitif M reel sayısı vardır. Bu yüzden,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)} \sum_{p(n)+1}^{q(n)} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right|^r = \frac{1}{q(n)-p(n)} \begin{bmatrix} \sum\limits_{p(n)+1}^{p'(n)} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right|^r + \\ \sum\limits_{p'(n)+1}^{q'(n)} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right|^r + \\ \sum\limits_{q'(n)+1}^{q(n)} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right|^r \end{bmatrix}$$

$$\le \frac{2}{q'(n)-p'(n)} M^r O(1) + \frac{1}{q'(n)-p'(n)} \sum_{q'(n)+1}^{q(n)} \left| \frac{x_{k+m}}{y_{k+m}} - L \right|^r$$

yazılabilir. Buradan $x \overset{\widehat{D}_L^r[p,q]}{\sim} y$ dir.

Teorem 5.4.8 $\{p(n)\}$, $\{q(n)\}$, $\{p'(n)\}$ ve $\{q'(n)\}$, $p(n) \le p'(n) < q'(n) \le q(n)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} = 0$ şartlarını sağlayan negatif olmayan tamsayıların dizileri olsun. Bu takdirde p ve q ya göre $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ ise p' ve q' ya göre $x \overset{\widehat{D}_L^r}{\sim} y$ dir.

İspat:

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{p(n)+1}^{q(n)}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|^{r} \geq \frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{p'(n)+1}^{q'(n)}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|^{r}$$

$$\geq \frac{q'(n)-p'(n)}{q(n)-p(n)}.\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\sum_{p'(n)+1}^{q'(n)}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|^{r}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $n \to \infty$ iken limit alınırsa m'ye göre düzgün olarak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\sum_{p'(n)+1}^{q'(n)}\left|\frac{x_{k+m}}{y_{k+m}}-L\right|^{r} = 0$$

olup istenilen sonuç elde edilir.

6. KAYNAKLAR

Agnew R P, 1932, On Deferred Cesàro Mean, Annals of Mathematics, 33, 413−421.

Balcı M, 1999, Matematik Analiz-I, Balcı Yayınları, 341s, Ankara.

Banach S, 1932, Théorie Des Óperations Linéaires, 254p, Warsaw.

Başarır M, Altundağ S, 2008, On $\Delta -$ Lacunary Statistical Asymptotically Equivalent Sequences, Filomat 22(1), 161−172.

Braha N L, 2012, On asymptotically Δ^m −Lacunary Statistical Equivalent Sequences, Applied Mathematics and Computation, 219, 280−288.

Buck R C, 1953, Generalized Asymptotic Density, American Journal of Mathematics, 75, 335−346.

Connor J S, 1988, The Statistical and Strong p- Cesàro Convergence of Sequences, Analysis, 8, 47−63.

Das G, Nanda S, 1992, Absolute Almost Convergence, Indian Journal of Mathematics, 34, 99−110.

Fast H, 1951, Sur la Convergence Statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241−244.

Freedman A R, Sember J J and Raphael M, 1978, M. Some Cesàro Type Summability Spaces, Proceedings London Mathematical Society, 37, 508−520.

Fridy J A, 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301−313.

Fridy J A, Orhan C, 1992, Lacunary Statistical Convergence, Pacific Journal of Mathematics (to appear).

Fridy J A, Orhan C, 1993, Lacunary Statistical Convergence, Pacific Journal of Mathematics, 160, 43−51.

Fridy J A, Miller H I, 1991, A Matrix Characterization of Statistical Convergence, Analysis, 11, 59−56.

Jalal T, 2004, Absolute σ- Almost Convergence with an Index, Pure and Applied Mathematics Journal, 59(1-2), 63−70.

Koşar C, Küçükaslan M, Et M, 2017, On Asymptotically Deferred Statistical Equivalence of Sequences, Filomat, 31(16), 5139−5150.

Kurtz J C, 1972, Almost Convergence in Banach Space, Tohoku Mathematical Journal, 24(3), 389−399.

Küçükaslan M, Yılmaztürk M, 2013, Deferred İstatistiksel Yakınsaklık, Mersin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 53s, Mersin.

Küçükaslan M, Yılmaztürk M, 2016, On Deferred Statistical Convergence of Sequences, Kyungpook Mathematical Journal, 56, 357−366.

Lorentz G G A, 1948, Contribution to the Theory of Divergent Sequences, Acta Mathematica, 80, 167−190.

Maddox I J, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, 218p.

Maddox I J, 1978, A New Type of Convergence, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 83, 61−64.

Marouf M, 1993, Asymptotic Equivalence and Summability, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 16, 755−762.

Mishra B P, Jaiswal M R, 2004/05, Some Generalizations on Sequence Spaces and Absolute Almost Convergence, Journal of the Orissa Mathematical Society, 23/24, 40−52.

Mursaleen M, 2000, λ-Statistical Convergence, Mathematica Slovaca, 50, 111−115.

Mursaleen M, Edely O H H, 2009, On Invariant Mean and Statistical Convergence, Applied Mathematics Letters, 22, 1700−1704.

Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H L, 1991, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., Fifth edition , New York.

Patterson R F, 2003, On Asymptotically Statistically Equivalent Sequence, Demon Mathematics, 36, 149−153.

Patterson F, Savaş E, 2006, On Asymptotically Lacunary Statistical Equivalent Sequences, Thai Journal of Mathematics, 4, 267−272.

Šalát T, 1980, On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139−150.

Savaş E, 1990, Almost Convergence and Almost Summability, Tamkang Journal of Mathematics, 21(4), 327−332.

Savaş E, Nuray F, 1993, On Sigma-Statistically Convergence and Lacunary Sigma-Statistically Convergence, Mathematica Slovaca, 3, 309−315.

Savaş R, Başarır M, 2006, (σ-λ)- Asymptotically Statistical Equivalent Sequences, Filomat, 20(1), 35−42.

Savaş E, Patterson R F, 2006, σ- Asymptotically Lacunary Statistical Equivalent Sequences, Central European Journal of Mathematics, 4, 648−655.

Schoenberg I J, 1959, The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, The Amerikan Mathematical Monthly, 361−375.

Shaw S, Lin S, 2007, Strong and Absolute Almost-Convergence of Vector Functions and Related Tauberian Theorems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 334(2), 1073−1087.

Steinhaus H, 1951, Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique, Colloquium Mathematicum, 73−74.

Ulusu U, Nuray F, 2013, On Asymptotically Lacunary Statistical Equivalent Set Sequences, Hindawi Publishing Corporation Journal of Mathematics, Article number 310438.

Zygmund A, 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Pres, Cambridge, UK.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Meryem Ece ALKAN
Doğum Yeri ve Tarihi : Altındağ, 19/06/1990
Yabancı Dili : İngilizce
İletişim (Telefon / e-posta) : 0507 012 28 37 / m.ecealkan06@gmail.com

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)
Lise : Kanuni Lisesi (2004–2007)
Lisans : Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2008–2012)
Yüksek Lisans : Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2018-2020)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl
Esertepe Kız Teknik ve Meslek Lisesi (2013 – 2014)
Muhsin Yazıcıoğlu İmam Hatip Ortaokulu (2014 – 2015)
Yunus Emre İmam Hatip Ortaokulu (2015 – 2016)
Özel Keçiören Çözüm Temel Lisesi (2016 – 2017)
Afyonkarahisar Gençlik ve Spor İl Müdürlüğü (2017– Devam Ediyor)

Diğer Konular
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi 3.sü Matematik Bölüm 1.si