2-NORMLU UZAYLARDA
ROUGH YAKINSAKLIK ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Mukaddes ARSLAN

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ARALIK 2020

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Mukaddes ARSLAN

Danışman
Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2020

TEZ ONAY SAYFASI

Mukaddes ARSLAN tarafından hazırlanan "2-Normlu Uzaylarda Rough Yakınsaklık Üzerine" adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/12/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Başkan : Prof. Dr. Fatih NURAY
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Prof. Dr. Emrah Evren KARA
Düzce Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler Meslek Yüksekokulu

Üye : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nimet AKIN
Afyon Kocatepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
....../....../.......... tarih ve
.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25 / 12 / 2020

Mukaddes ARSLAN

ÖZET

Doktora Tezi

2-NORMLU UZAYLARDA
ROUGH YAKINSAKLIK ÜZERİNE

Mukaddes ARSLAN
Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan konunun tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık kavramı ve rough limit noktası kavramı tanıtılarak rough limit noktaları kümesinin özellikleri incelenmiş ve bu kümenin sınırlı, kapalı ve konveks olduğu gösterilmiştir. Bunun yanında, 2-normlu uzayda rough Cauchy dizisi kavramı tanıtılarak rough yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklığın bazı özellikleri ve diğer yakınsaklık türleri ile ilişkisi incelenerek, rough limit noktaları kümesinin özellikleri teoremlerle açıklanmıştır. Beşinci bölümde, 2-normlu uzaylarda rough istatistiksel yakınsaklık ve rough istatistiksel limit noktası kavramları tanıtılarak bunların kendine özgü özellikleri örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, çalışma süresince yararlanılan literatürdeki kaynaklar listelenmiştir.

2020, v + 51 sayfa

Anahtar Kelimeler : 2-normlu uzay, Rough yakınsaklık, Rough Cauchy dizisi, Rough limit noktası, Rough istatistiksel yakınsaklık.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON ROUGH CONVERGENCE
IN 2-NORMED SPACES

Mukaddes ARSLAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Erdinç DÜNDAR

This thesis study consists of six chapters.

In the first chapter, the historical development of the subject discussed in the study is mentioned. In the second part, some basic concepts that are necessary for the study to be more understandable has been granted. In the third chapter, in 2-normed spaces the concepts of rough convergence and rough limit point are introduced and the set of rough limit point has been examined and shown to be bounded, closed and convex. Besides, the concept of rough Cauchy sequence in 2-normed space is introduced and the relations between rough Cauchy and rough convergence was investigated. In the fourth chapter, some properties of rough convergence in 2-normed spaces and its relationship with other types of convergence are examined and the properties of rough limit points are explained with theorems. In the fifth chapter, rough statistical convergence and rough statistical limit point concepts in 2-normed spaces are introduced and their specific properties are given by examples and theorems.

In the the sixth chapter, which is the last chapter, sources in the literature that utilized throughout the study are listed.

2020, v + 51 pages

Keywords : 2-normed space, Rough convergence, Rough Cauchy sequence, Rough limit points, Rough statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimin boyunca, tez çalışmam için konu belirlenmesi, çalışmalarımın yönlendirilmesi ve tezimin yazımı aşamalarında yapmış olduğu büyük katkılarından dolayı danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erdinç DÜNDAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Eğitim-Öğretim hayatım boyunca üzerimde emeği olan, bu branşı seçmemde ve eğitimimi bu noktaya getirmemde motivasyon desteği sağlayan, her konuda öneri ve eleştirileriyle yardımlarını gördüğüm tüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, hayatım boyunca her konuda maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan, bana daima sabır, anlayış ve iyi niyetle yaklaşan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Mukaddes ARSLAN

Afyonkarahisar 2020

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.. iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ v
1. GİRİŞ.. 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 4
3. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK 12
4. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIĞIN ÖZELLİKLERİ…….. 20
5. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK 33
6. KAYNAKLAR 48
ÖZGEÇMİŞ.. 51

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^2$	2-boyutlu reel Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel Öklid uzayı
$\|.,.\|$	2-norm fonksiyonu
$\|.\|_\infty$	2-normların maksimumu olan sonsuz norm fonksiyonu
(X,d)	Metrik uzay
$(X,\|.,.\|)$	2-Banach uzayı
$B_r(x_0)$	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{B}_r(x_0)$	x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
$int(A)$	A kümesinin içi
$diam(A)$	A kümesinin çapı
$\vert K\vert$	K kümesinin kardinelitesi
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
(x_n)	Reel sayı dizisi
$\lim x_n$	(x_n) dizisinin limiti
$st-\lim x_n$	(x_n) dizisinin istatistiksel limiti
$r-\lim x_n$	(x_n) dizisinin rough limiti
$\mathrm{LIM}^r x$	$x=(x_n)$ dizisinin rough limit noktaları kümesi
$\mathrm{LIM}_2^r x$	$x=(x_n)$ dizisinin 2-normlu uzayda rough limit noktalarının kümesi
$st-\mathrm{LIM}_2^r x$	$x=(x_n)$ dizisinin 2-normlu uzayda r-istatistiksel limit noktalarının kümesi
Γ_x^2	$x=(x_n)$ dizisinin 2-normlu uzayda tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi

Kısaltmalar

h.h. n	hemen hemen her n

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı, analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalının temel kavramlarından biridir. Yakınsaklık kavramının bir genelleştirmesi olan ve temeli doğal sayılar kümesinin altkümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklık kavramı ise bu bilim dalındaki toplanabilme teorisinin önemli konularından biridir. Fast (1951) ve eş zamanlı olarak Steinhaus (1951)'un istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmalarından bu yana bu kavram üzerine çalışmalar başta Šalát (1980) ve Fridy (1985) olmak üzere birçok araştırmacı tarafından günümüze kadar devam etmiştir.

Rough yakınsaklık kavramı ilk olarak Phu (2001) tarafından sonlu boyutlu normlu uzaylarda çalışılmıştır. Bu çalışmada $\mathrm{LIM}^r x$ kümesinin kapalı, sınırlı ve konveks olduğu gösterilmiş ve rough Cauchy dizisi kavramı tanıtılmıştır. Aynı zamanda rough yakınsaklığın diğer yakınsaklık türleri ile ilişkisi ve $\mathrm{LIM}^r x$ kümesinin r roughlık derecesine bağlılığı incelenmiştir. Başka bir çalışmada Phu (2002), lineer operatörlerde rough yakınsaklık kavramını tanımlamış olup, X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $dimY < \infty$ ve $r > 0$ şartları altında bir $f : X \to Y$ lineer operatörünün her $x \in X$ noktasında r-yakınsak olduğunu göstermiştir. Phu (2003) bir diğer çalışmasında, rough yakınsaklık ve ilgili özellikleri sonsuz boyutlu normlu uzaylara genişletmiştir. Aytar (2008) rough istatistiksel yakınsaklık kavramını çalışmış ve bir dizinin rough istatistiksel limit noktaları kümesini tanımlamıştır. Aynı zamanda bu kümeye bağlı olarak iki istatistiksel yakınsaklık kriteri elde etmiştir ve bu kümenin kapalı ve konveks olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca Aytar (2008), reel sayılarda bir (x_n) dizisinin alışılmış çekirdeği ile bu dizinin r-limit noktaları arasındaki ilişkileri incelemiştir. Son zamanlarda Dündar ve Çakan (2014), rough $\mathcal{I}$-yakınsaklık kavramını tanıtarak, bir dizinin rough $\mathcal{I}$-limit noktaları kümesini ve bazı önemli özelliklerini incelemişlerdir. Bununla birlikte Dündar ve Çakan (2014), çift dizilerde rough yakınsaklık ve rough limit noktaları kavramlarını tanıtmışlardır. Başka bir çalışmada Dündar (2016), çift dizilerde rough $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık kavramını tanıtarak, bu kavramın bazı özelliklerini incelemiştir. Ayrıca Kişi ve Dündar (2018), çift dizilerde rough lacunary $\mathcal{I}_2$-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır.

2-normlu uzay kavramı, ilk olarak Gähler (1963, 1964) tarafından tanıtılmasının ardından bir çok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir. 2-normlu uzaylarda yakınsaklık üzerine yapılan ilk çalışmada Gunawan ve Mashadi (2001), 2-normlu uzaylarda yakınsaklık ve Cauchy dizisi kavramlarını tanıtmışlardır. Yine Gunawan ve Mashadi (2001), n-normlu uzaylar üzerine çalışmışlardır. Daha sonra Gürdal ve Pehlivan (2009), 2-normlu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisi kavramları üzerine çalışmışlardır. Benzer şekilde, 2-normlu uzaylarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi kavramları ile $\mathcal{I}$-istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-istatistiksel Cauchy dizisi kavramları da sırasıyla Şahiner vd. (2007) ve Yamancı ve Gürdal (2014) tarafından yapılan çalışmalarda verilmiştir. Ayrıca, Gürdal ve Pehlivan (2004), Gürdal ve Açık (2008) ve Sarabadan ve Talebi (2011) tarafından da 2-normlu uzaylarda benzer çalışmalar yapılmıştır. Arslan ve Dündar (2018), 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramlarını tanıtarak $\mathcal{I}$-yakınsaklığın lineerlik gibi bazı özelliklerini incelemişlerdir. Yine Arslan ve Dündar (2018), 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi kavramlarını tanıtarak $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy kavramları arasındaki ilişkileri araştırmışlardır. Yegül ve Dündar (2017), 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığını tanıtmış ve bu yakınsaklığın özelliklerini inceleyen teoremleri ispatlamışlardır. Dündar vd. (2020), 2-normlu uzaylarda fonksiyon dizileri için $\mathcal{I}$-düzgün yakınsaklık kavramını tanıtarak bazı özelliklerini vermişlerdir. Ayrıca 2-normlu uzaylarda yakınsaklık tipleri ile ilgili Çakallı ve Ersan (2016), Gürdal (2006), Mursaleen ve Alotaibi (2011) ve Sharma ve Kumar (2008) gibi birçok araştırmacı çalışmalar yapmışlardır.

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada ele alınan konunun tarihsel gelişiminden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmanın daha anlaşılır olması için gerekli olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık ve rough Cauchy dizisi kavramları tanıtılmıştır. Rough limit noktaları kümesine bağlı olarak iki yakınsaklık kriteri verilmiştir. 2-normlu uzayda bir dizinin rough limit noktaları kümesinin sınırlılık, kapalılık ve konvekslik gibi özellikleri teorem ve örneklerle açıklanmıştır. Rough yakınsaklık ile rough Cauchy dizisi arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra bir dizinin yığılma noktaları ile rough limit noktaları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık ile adi yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenmiş ve 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık, rough yığılma noktası ve rough limit noktası kavramları ile ilgili bazı özellikler araştırılmıştır. Aynı zamanda 2-normlu uzaylarda sabit bir $x = (x_n)$ dizisinin rough limit noktaları kümesi olan $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin değişen r parametresine bağımlılığı incelenmiştir.

Beşinci bölümde, 2-normlu uzaylarda rough istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılmış ve adi yakınsaklık ile arasındaki ilişki incelenmiştir. Bunun yanında, rough istatistiksel limit noktaları kümesinin sınırlılık, kapalılık ve konvekslik gibi özellikleri incelenmiştir. Bir dizinin r-istatistiksel limit noktaları kümesinin topolojik ve geometrik özellikleri verilmiştir. 2-normlu uzayda bir dizinin tüm istatistiksel yığılma noktaları ile rough istatistiksel limit noktaları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Son bölüm olan altıncı bölümde ise, tez çalışması süresince temel kaynak olarak yararlanılan kitap ve makaleler listelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez çalışmasının orijinal bölümlerinde kullanılacak olan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tanım 2.1 X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için
(M1) $d(x, x) = 0$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir. Bu tanımda (M1) şartı yerine
(M1)$'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
şartı sağlanırsa, d fonksiyonuna *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de bir *metrik uzay* denir.

Lineer bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam metrik uzay* veya *Fréchet uzay* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.2 X lineer bir uzay ve $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için
(N1) $\|x\| \geq 0$,
(N2) $\|\theta\| = 0$,
(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
şartları sağlanıyorsa, $\| \cdot \|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir *yarı normlu uzay* denir. Bu tanımda (N2) şartı yerine
(N2)$'$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
şartı sağlanırsa, $\| \cdot \|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir.

Bir $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir (Maddox 1970).

Tanım 2.3 Bir (X, d) metrik uzayında; x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\} \quad \text{ve} \quad \overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

cümlelerine, sırasıyla, x_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar* ve x_0 merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar* denir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.4 X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir r pozitif sayısı varsa A ya X in *açık alt cümlesi* veya *A, X de açıktır* denir. X in B alt cümlesinin X deki tümleyeni $B^t = X - B$, X de açıksa B ye *kapalı cümle* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.5 (X, d) bir metrik uzay ve A, X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. A nın çapı $d(A)$ ile gösterilir ve

$$d(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

olarak tanımlanır. Eğer $d(A)$ sonlu ise, yani $d(A) < \infty$ ise, A ya *sınırlı cümle* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.6 L lineer bir uzay, $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L : z = \alpha x + (1 - \alpha)y,\ 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

ise, A cümlesine *konveks* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.7 Tanım kümesi doğal sayılar kümesi olan fonksiyona *dizi* denir. Eğer dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise, diziye *reel terimli dizi* veya *reel sayı dizisi* ya da *reel dizi* denir. Yani, reel terimli dizi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ biçiminde bir fonksiyondur. Genel terimi x_n olan dizi $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ biçiminde gösterilir (Balcı 2016).

Tanım 2.8 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\ x(n) = x_n$ dizisi verilmiş olsun. $k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\ k(n) = k_n$ fonksiyonu (dizisi) artan bir dizi olmak üzere, $(x \circ k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bileşke fonksiyonuna (x_n) dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$(x \circ k)(n) = x(k(n)) = x(k_n) = x_{k_n}$ olmak üzere, (x_{k_n}) dizisinin her elemanının (x_n) dizisinin bir terimi olduğu açıktır (Balcı 2016).

Tanım 2.9 Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına bir *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞, c, c_0, ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır (Choudhary 1989).

Tanım 2.10 Her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n| < M$ olacak şekilde pozitif bir M reel sayısı varsa (x_n) dizisine *sınırlı dizi* denir (Balcı 2016).

Tanım 2.11 $\varepsilon > 0$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

$$K = \{x : |x - a| < \varepsilon, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesine a nın ε-komşuluğu denir (Balcı 2016).

Tanım 2.12 (x_n) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - L| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa, (x_n) dizisi L ye *yakınsaktır* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$ veya $x_n \to L$ biçiminde gösterilir (Balcı 2016).

Tanım 2.13 (X, d) bir metrik uzay, $A \in X$ ve $x_0 \in A$ olsun. $D(x_0; \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa A ya x_0 ın bir *civarı* ve x_0 a da A nın bir *iç noktası* denir. A nın bütün iç noktalarının cümlesine A *nın içi* denir ve A° veya içA ile gösterilir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.14 A, X metrik uzayının bir alt cümlesi ve $x_0 \in X$ olsun (Bu nokta A nın bir elemanı olabilir de olmayabilir de). $D'(x_0; \varepsilon)$ delik civarı A ya ait bir nokta ihtiva ediyorsa x_0 noktasına A nın bir *yığılma noktası* denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.15 $(x_{k_n}), (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi olsun. (x_{k_n}) yakınsak ve limiti L ise, bu L noktasına (x_n) dizisinin bir *limit noktasıdır* denir (Balcı 2016).

Tanım 2.16 (x_n) bir reel terimli dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda $|x_m - x_n| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa, (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir (Balcı 2016).

Tanım 2.17 $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \in K : k \leq n\}$ olsun. Bu durumda K kümesinin *doğal yoğunluğu,*

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \big\{ k \leq n : k \in K \big\} \Big|$$

biçiminde tanımlanır. Burada $|K_n|$ ifadesi, K_n kümesinin eleman sayısını göstermektedir (Freedman ve Sember 1981).

Doğal yoğunluk kavramı ile ilgili birkaç özellik ve bazı örnekler aşağıdaki gibidir:

i. $K \subset \mathbb{N}$ sonlu ise, o zaman $\delta(K) = 0$ dır.
ii. $K = \mathbb{N}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1$ dir.
iii. $K = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$ dir.
iv. $K = \{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ ise, o zaman $\delta(K) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|K_n|}{n} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$ dır.
v. $K_1 \subseteq K_2$ ise, o zaman $\delta(K_1) \leq \delta(K_2)$ dir.
vi. $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1 - \delta(K)$ dır.

(x_n) bir reel terimli dizi olsun. (x_n) dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir küme hariç diğer bütün n ler için bir P özelliğini sağlıyorsa, "(x_n) dizisi hemen hemen her n için P özelliğini sağlıyor" denir ve bu durum $h.h.\,n$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.18 (x_k) bir reel terimli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\big\{ k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \Big| \big\{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \big\} \Big| = 0$$

ise, (x_k) dizisi L ye *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st - \lim x_k = L$ biçiminde gösterilir (Fridy 1985).

Sonlu elemanlı kümelerin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır, fakat istatistiksel yakınsak bir dizinin yakınsak olması gerekmez. Bu durum aşağıdaki örnekle açıklanabilir:

Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad n = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}), \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olan

$$(x_k) = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

dizisi göz önüne alındığında, her $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır, yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(K_\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{|K_\varepsilon|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\Big| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt{n} = 0$$

olduğundan $st - \lim x_k = 0$ dır. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Tanım 2.19 X sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. X uzayında 2-*norm* aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur :

N1) $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlıdır,

N2) $\|x, y\| = \|y, x\|$,

N3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|, \alpha \in \mathbb{R}$,

N4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$.

Bu durumda $(X, \|.,.\|)$ ikilisine 2-*normlu uzay* denir (Gunawan ve Mashadi 2001).

2- normlu uzaya bir örnek olarak, $\|x, y\| :=$ x ve y vektörlerinin oluşturduğu

$$\|x, y\| = |x_1 y_2 - x_2 y_1| \; ; \; x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

formülü ile verilen 2- norm ile donatılmış $X = \mathbb{R}^2$ paralelkenarsal bölgesi alınabilir.

Bu tez çalışması boyunca X, d boyutlu $(2 \leq d < \infty)$ bir 2-normlu uzay olarak kabul edilecektir.

Tanım 2.20 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir (x_n) dizisi her $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| = 0$$

şartını sağlıyorsa, (x_n) dizisi bir $L \in X$ noktasına *yakınsaktır* denir. Böyle bir durumda, $\lim_{n\to\infty} x_n = L$ yazılır ve L ye (x_n) *dizisinin limiti* denir (Gunawan ve Mashadi 2001).

Örnek 2.21 $(x_n) = (\frac{n}{n+1}, \frac{1}{n})$, $L = (1,0)$ and $z = (z_1, z_2)$ olsun. (x_n) dizisinin 2-normlu uzayda $L = (1,0)$ a yakınsadığı açıktır.

Tanım 2.22 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $m, n \geq N$ ve her $z \in X$ olduğunda

$$\|x_m - x_n, z\| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ varsa bu durumda (x_n) dizisine $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayında bir *Cauchy dizisi* denir (Gunawan ve Mashadi 2001).

Tanım 2.23 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Başka bir deyişle, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \big|\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z \ \big| \geq \varepsilon\}\big| = 0$$

ise, (x_n) dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki L noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir. Bunun diğer bir anlamı her $z \in X$ için

$$\|x_n - L, z\| < \varepsilon, \quad h.h.\, n,$$

demektir. Bu durumda,

$$st - \lim_{n\to\infty} \|x_n, z\| := \|L, z\|$$

yazılabilir (Gürdal ve Pehlivan 2009).

Tanım 2.24 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta\big(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, z)$ varsa, yani sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|x_n - x_{N(\varepsilon,z)}, z\| < \varepsilon, \quad h.h.\, n$$

ise, (x_n) dizisi bir *istatistiksel Cauchy dizisidir* denir (Gürdal ve Pehlivan 2009).

Tanım 2.25 r negatif olmayan bir reel sayı ve $\mathbb{R}^n$, $\|.\|$ normu ile verilen n- boyutlu normlu bir uzay olsun. Bir $x = (x_n) \in \mathbb{R}^n$ dizisi için eğer

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - L\| < r + \varepsilon$$

şartı sağlanıyorsa, $x = (x_n)$ dizisi L noktasına *rough yakınsaktır* (r-yakınsaktır) denir ve $x_n \xrightarrow{r} L$ ile gösterilir. Bu durumda

$$\mathrm{LIM}^r x := \{L \in \mathbb{R} : x_n \xrightarrow{r} L\}$$

kümesi $x = (x_n)$ dizisinin *r-limit kümesi* olarak adlandırılır. Eğer $\mathrm{LIM}^r x \neq \emptyset$ ise, $x = (x_n)$ dizisi *r-yakınsaktır* denir. Burada r, $x = (x_n)$ dizisinin *yakınsaklık derecesi* olarak adlandırılır. $r = 0$ için adi yakınsaklık elde edilir (Phu 2001).

Tanım 2.26 (x_n) ve (y_n), $(X, \|.\|)$ normlu uzayında iki dizi olsun. Eğer bir (y_n) dizisi tam olarak belirlenemiyor fakat bir (x_n) dizisi tarafından $\dfrac{\rho}{2} > 0$ tahmin üst sınır hatası ile belirlenebiliyorsa, yani her n için $\|x_n - y_n\| \leq \frac{\rho}{2}$ oluyorsa, bu durumda (x_n) dizisi klasik anlamda Cauchy şartını sağlamaz fakat sadece aşağıdaki

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} : m, n \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \rho + \varepsilon$$

rough Cauchy şartını sağlar. Böyle bir diziye, ρ roughlık derecesine sahip bir *rough Cauchy dizisi* ya da kısaca *ρ-Cauchy dizisi* denir. Aynı zamanda ρ, (x_n) dizisinin bir *Cauchy derecesi* olarak adlandırılır (Phu 2001).

Tanım 2.27 r negatif olmayan bir reel sayı ve $\mathbb{R}^n$, $\|.\|$ normu ile verilen n- boyutlu normlu bir uzay olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır ise veya buna denk olarak

$$st - \limsup \|x_n - L\| \geq r$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $x = (x_n)$ dizisi L noktasına *r-istatistiksel yakınsaktır* denir ve

$$x_n \xrightarrow{rst} L$$

ile gösterilir. Ek olarak $x_n \xrightarrow{rst} L$ yazılabilmesi için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her n için

$$\|x_n - L\| < r + \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Genel olarak, $r > 0$ roughlık derecesi için bir dizinin rough istatistiksel limit noktası tek olmayabilir. Burada, $x = (x_n)$ dizisinin r-istatistiksel limit kümesi

$$st - \mathrm{LIM}^r x := \{L \in X : x_n \xrightarrow{rst} L\}$$

biçiminde tanımlanır. $st - \mathrm{LIM}^r x \neq \emptyset$ ise $x = (x_n)$ dizisi *r-istatistiksel yakınsaktır* denir. Eğer bir reel sayı dizisi olan $x = (x_n)$ için $st - \mathrm{LIM}^r x \neq \emptyset$ ise bu durumda

$$st - \mathrm{LIM}^r x = [st - \limsup x - r, st - \liminf x + r]$$

elde edilir (Aytar 2008).

3. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIK

Bu bölümde, 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık kavramı tanımlanarak rough limit noktaları kümesinin sınırlılık, kapalılık ve konvekslik gibi bazı özellikleri verilecektir. Daha sonra 2-normlu uzaylarda rough Cauchy dizisi kavramı tanımlanarak rough yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.1 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve r negatif olmayan bir reel sayı olsun. Eğer her $z \in X$ için

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - L, z\| < r + \varepsilon \tag{3.1}$$

veya buna denk olarak

$$\limsup \|x_n - L, z\| \leq r \tag{3.2}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına *rough yakınsaktır (r-yakınsaktır)* denir ve

$$x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L$$

ile gösterilir. Bu durumda, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $x = (x_n)$ dizisinin r-limit noktalarının kümesi

$$\mathrm{LIM}_2^r x := \{L \in X : x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L\} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ ise, $x = (x_n)$ dizisi *r-yakınsaktır* denir. Bu durumda r, $x = (x_n)$ dizisinin bir *yakınsaklık derecesi* olarak adlandırılır. $r = 0$ için $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında adi yakınsaklık elde edilir. Burada asıl ilgilenilmesi gereken durum $r > 0$ olma durumudur. Bunun için birçok sebep vardır. Örneğin, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında adi anlamda yakınsak olan bir (y_n) $(y_n \to L)$ dizisi genellikle tam olarak tespit edilemediğinden (ölçülemediğinden veya hesaplanamadığından), bu (y_n) dizisinin limiti $r > 0$ bir üst sınır yaklaşım hatası olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $z \in X$ için

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r$$

eşitsizliğini sağlayan bir (x_n) dizisi yardımı ile yaklaşık olarak hesaplanmalıdır. Bu durumda (x_n), artık adi anlamda yakınsak değildir fakat her $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|x_n - L, z\| &\leq \|x_n - y_n, z\| + \|y_n - L, z\| \\ &\leq r + \|y_n - L, z\| \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından dolayı (x_n) dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında L noktasına (3.1) anlamında r-yakınsaktır.

Örnek 3.2 2-normlu $X = \mathbb{R}^2$ uzayında $x = (x_n) = ((-1)^n, (-1)^n)$ dizisi yakınsak değildir fakat $L = (0, 0)$ noktasına rough yakınsaktır. Ayrıca,

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < 1 \text{ ise,} \\ [(-r, -r), (r, r)] & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olduğu açıktır.

Bazı durumlarda, verilen bir $D \subset X$ alt kümesinde bulunan (ve D kümesi üzerindeki r-limit olarak adlandırılan) r-limit noktalarının kümesi ile ilgilenilir. Bu küme

$$\mathrm{LIM}_2^{D,r} x := \{L \in D : x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L\} \tag{3.4}$$

biçiminde gösterilir. Ayrıca, burada

$$\mathrm{LIM}_2^{X,r} x = \mathrm{LIM}_2^r x \text{ ve } \mathrm{LIM}_2^{D,r} x = D \cap \mathrm{LIM}_2^r x$$

olduğu açıktır.

Şimdi ilk olarak 2-normlu uzayda adi yakınsaklığın bazı özellikleri rough yakınsaklığa taşınacaktır. Bir dizi adi yakınsak ise limitinin tek olduğu iyi bilinmektedir. Bu özellik $r > 0$ roughlık derecesi ile rough yakınsaklık için geçerli değildir fakat sadece aşağıdaki teoremde verilen benzetime sahiptir.

Teorem 3.3 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Bu dizinin r-limit noktaları kümesinin çapı $diam(\mathrm{LIM}_2^r x) \leq 2r$ dir. Bu çap, genel olarak daha küçük bir üst sınıra sahip değildir.

İspat: $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Her $z \in X$ için

$$diam(\text{LIM}_2^r x) = \sup \{\|y - t, z\| : y, t \in \text{LIM}_2^r x\} \leq 2r \tag{3.5}$$

ifadesinin sağlandığını göstermek gerekir. Tersine

$$diam(\text{LIM}_2^r x) > 2r$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda, her $z \in X$ için

$$d := \|y - t, z\| > 2r$$

olacak şekilde $y, t \in \text{LIM}_2^r x$ vardır. Keyfi bir $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2} - r)$ için, (3.1) ve (3.3) ifadelerinden, $n \geq n_\varepsilon$ iken her $z \in X$ için

$$\|x_n - y, z\| < r + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \|x_n - t, z\| < r + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durum, her $z \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|y - t, z\| &\leq \|x_n - y, z\| + \|x_n - t, z\| \\
&< 2(r + \varepsilon) \\
&< 2r + 2(\frac{d}{2} - r) \\
&= d
\end{aligned}$$

olmasını gerektirir ki bu ifade $d = \|y - t, z\|$ olması ile çelişir. Buradan (3.5) ifadesinin doğru olduğu anlaşılır. Şimdi

$$\lim_{n \to \infty} x_n = L$$

eşitliğini sağlayan bir $x = (x_n)$ dizisi alınsın. Bu durumda,

$$\overline{B}_r(L) := \{y \in X : \|y - L, z\| \leq r\}$$

olmak üzere, her $z \in X$ ve $y \in \overline{B}_r(L)$ için

$$\begin{aligned}
\|x_n - y, z\| &\leq \|x_n - L, z\| + \|L - y, z\| \\
&\leq \|x_n - L, z\| + r
\end{aligned}$$

elde edilir ki böylece (3.1) ve (3.3) ifadelerinden

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$$

olduğu görülür. $diam(\overline{B}_r(L)) = 2r$ olduğundan, bu durum gösterir ki genel olarak bir r-limit kümesinin çapının üst sınırı $2r$ olabilir fakat daha küçük olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Açık olarak, adi limitin tekliği Teorem 3.3 ün özel bir hali olarak kabul edilebilir. Çünkü eğer $r = 0$ ise, bu durumda

$$diam(\mathrm{LIM}_2^r x) = 2r = 0,$$

yani $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesi boş küme ya da tek nokta kümesidir.

Adi yakınsaklık kavramının diğer önemli bir özelliği de yakınsak dizilerin sınırlılığıdır. Bu özelliğin 2-normlu uzayda rough yakınsaklığa uyarlanması aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.4 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $r \geq 0$ için $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olmasıdır. Her $r > 0$ için sınırlı bir (x_n) dizisi,

$$\mathrm{LIM}_2^{(x_{n_k}),r} x_{n_k} \neq \emptyset$$

olacak şekilde daima bir (x_{n_k}) alt dizisine sahiptir.

İspat: Her $z \in X$ için eğer

$$s := \sup\{\|x_n, z\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

oluyorsa bu durumda, $\mathrm{LIM}_2^s x$ kümesi X uzayının orijinini içerir. Diğer taraftan bazı $r \geq 0$ için $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olduğundan, tüm sonlu x_n elemanları yarıçapı r den büyük olan bir yuvarın içinde kalır. Bundan dolayı, (x_n) dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında sınırlıdır. (x_n) dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında sınırlı olduğundan, kesinlikle yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisini ihtiva eder. L, (x_n) dizisinin bir limit noktası olsun. Bu durumda $\mathrm{LIM}_2^r x_{n_k} = \overline{B}_r(L)$ olup, her $z \in X$ ve $r > 0$ için,

$$\mathrm{LIM}_2^{(x_{n_k}),r} x_{n_k} = \{x_{n_k} : \|L - x_{n_k}, z\| \leq r\} \neq \emptyset$$

elde edilir.

Üstteki teoremin ikinci kısmı $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki (x_{n_k}) alt dizisinin r-limit noktaları ile ilgilidir. Anlaşılmaktadır ki herhangi bir sınırlı D kümesi tarafından ihtiva edilen bir dizi (keyfi bir $r > 0$ için) D kümesinin herhangi bir noktasına r-yakınsaktır. Burada, D kümesinin adi yakınsaklıkta olduğu gibi kapalı olmasına gerek yoktur.

Yakınsak bir dizinin her alt dizisinin aynı limit noktasına yakınsak olması özelliğine bağlı olarak, ispatı daha kolay olan aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.5 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $x' = (x'_n)$ dizisi (x_n) dizisinin bir alt dizisi ise, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x'$ bağıntısı sağlanır.

Teorem 3.6 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Her $r \geq 0$ için (x_n) dizisinin r-limit noktalarının kümesi olan $\mathrm{LIM}_2^r x$ kapalıdır.

İspat: Herhangi bir L noktasına yakınsayan (y_m) dizisi, $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinde keyfi bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için, tanımdan, $n \geq n_{\varepsilon/2}$ iken

$$\|y_{m_{\varepsilon/2}} - L, z\| < \varepsilon/2 \quad \text{ve} \quad \|x_n - y_{m_{\varepsilon/2}}, z\| < r + \varepsilon/2$$

olacak şekilde $m_{\varepsilon/2}$ ve $n_{\varepsilon/2}$ vardır. Sonuç olarak her $z \in X$ için, $n \geq n_{\varepsilon/2}$ iken

$$\begin{aligned} \|x_n - L, z\| &\leq \|x_n - y_{m_{\varepsilon/2}}, z\| + \|y_{m_{\varepsilon/2}} - L, z\| \\ &< r + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ifade aynı zamanda $L \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğu anlamına gelir. O halde $\mathrm{LIM}_2^r x$ kapalıdır.

Teorem 3.7 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $y_0 \in \mathrm{LIM}_2^{r_0} x$ ve $y_1 \in \mathrm{LIM}_2^{r_1} x$ ise bu durumda, $\alpha \in [0, 1]$ için

$$y_\alpha := (1 - \alpha) y_0 + \alpha y_1 \in \mathrm{LIM}_2^{(1-\alpha)r_0 + \alpha r_1} x$$

ifadesi geçerlidir.

İspat: Tanımdan, her $\varepsilon > 0$, $r_0, r_1 > 0$ ve her $z \in X$ için, $n > n_\varepsilon$ iken

$$\|x_n - y_0, z\| < r_0 + \varepsilon \quad \text{ve} \quad \|x_n - y_1, z\| < r_1 + \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_ε vardır. Aynı zamanda, her $z \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|x_n - y_\alpha, z\| &\leq (1-\alpha)\|x_n - y_0, z\| + \alpha\|x_n - y_1, z\| \\
&< (1-\alpha)(r_0 + \varepsilon) + \alpha(r_1 + \varepsilon) \\
&= (1-\alpha)r_0 + \alpha r_1 + \varepsilon
\end{aligned}$$

olur ki buradan,

$$y_\alpha \in \mathrm{LIM}_2^{(1-\alpha)r_0 + \alpha r_1} x$$

elde edilir.

Teorem 3.8 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. (x_n) dizisinin r-limit noktalarının kümesi olan $\mathrm{LIM}_2^r x$ konvekstir.

İspat: Teorem 3.7 de özel olarak $r = r_0 = r_1$ alınırsa, $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin konveks olduğu açıkça görülür.

Teorem 3.9 Eğer $x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L_1$ ve $y_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L_2$ ise bu durumda,

(i) $(x_n + y_n) \xrightarrow{\|.,.\|}_r (L_1 + L_2)$ ve

(ii) $c\,(x_n) \xrightarrow{\|.,.\|}_r c\,L, (c \in \mathbb{R})$ dir.

İspat: **(i)** Tanımdan her $z \in X$ için,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - L_1, z\| \leq r_1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

ve

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq j_\varepsilon \Rightarrow \|y_n - L_2, z\| \leq r_2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

olduğu açıktır. $j = \max(n_\varepsilon, j_\varepsilon)$ ve $r_1 + r_2 = r$ olsun. Her $n > j$ ve $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|(x_n + y_n) - (L_1 + L_2), z\| &\leq \|x_n - L_1, z\| + \|y_n - L_2, z\| \\ &\leq r_1 + \frac{\varepsilon}{2} + r_2 + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= r + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki buradan

$$(x_n + y_n) \xrightarrow{\|.,.\|}_r (L_1 + L_2)$$

olduğu görülür.

(ii) $c = 0$ iken bu durum açıktır. $c \neq 0$ olsun.

$$x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_r L$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $z \in X$ için, her $n \geq n_\varepsilon$ iken

$$\|x_n - L, z\| \leq \frac{r + \varepsilon}{|c|}$$

olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Buna göre her $n \geq n_\varepsilon$ ve $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|c\,x_n - c\,L, z\| &= |c|\|x_n - L, z\| \\ &\leq |c|\frac{r + \varepsilon}{|c|} \\ &= r + \varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da $c\,(x_n) \xrightarrow{\|.,.\|}_r c\,L$ elde edilir.

Tanım 3.10 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. $\rho > 0$, $L \in X$ ve her $z \in X$ için,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon : m, n \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n, z\| \leq \rho + \varepsilon \tag{3.6}$$

şartı sağlanıyorsa bu durumda, (x_n) dizisine $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında ρ roughlık derecesine sahip bir *rough Cauchy dizisi* denir ve kısaca ρ-Cauchy dizisi şeklinde ifade edilir. Aynı zamanda ρ, (x_n) dizisinin bir Cauchy derecesidir.

Önerme 3.11

(i) Monotonluk: $\rho' > \rho$ olduğu kabul edilsin. Eğer ρ, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında verilen bir (x_n) dizisinin Cauchy derecesi ise, aynı zamanda ρ' de (x_n) dizisinin bir Cauchy derecesidir.

(ii) Sınırlılık: Bir (x_n) dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\rho \geq 0$ için (x_n) dizisinin $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir ρ-Cauchy dizisi olmasıdır.

Teorem 3.12 $x = (x_n)$ dizisinin $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında rough yakınsak yani, $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olması için gerek ve yeter şart $x = (x_n)$ dizisinin her $\rho \geq 2r$ için bir ρ-Cauchy dizisi olmasıdır. Cauchy derecesi için bu sınır genellikle daha küçük olamaz.

İspat: L noktası, $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin herhangi bir noktası olsun. Bu durumda, her $z \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq k_\varepsilon$ iken

$$\|x_m - L, z\| \leq r + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \|x_n - L, z\| \leq r + \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde en az bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece, $m, n \geq k_\varepsilon$ iken her $z \in X$ için,

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n, z\| &= \|x_m - L + L - x_n, z\| \\
&\leq \|x_m - L, z\| + \|L - x_n, z\| \\
&\leq r + \frac{\varepsilon}{2} + r + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= 2r + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir ki $\rho \geq 2r$ için $x = (x_n)$ dizisi bir ρ-Cauchy dizisidir. Önerme 3.11 den, her $\rho \geq 2r$ aynı zamanda $x = (x_n)$ dizisinin bir Cauchy derecesidir.

$x = (x_n)$ dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir rough Cauchy dizisi olsun. (x_n) bir rough Cauchy dizisi olduğundan, $\rho > 0$ ve her $z \in X$ için

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_\varepsilon : m, n \geq k_\varepsilon \Rightarrow \|x_m - x_n, z\| < \rho + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Bu durumda, (x_n) dizisi sınırlıdır ve sonuç olarak rough yakınsaktır. Ayrıca, Teorem 3.3 ten bu sınırın $2r$ den daha küçük olamayacağı açıktır.

4. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH YAKINSAKLIĞIN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, 2-normlu uzaylarda rough yakınsaklık ile adi yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelenecek ve rough yakınsaklık, rough yığılma noktası ve rough limit noktası kavramları ile ilgili bazı özellikler araştırılacaktır. Aynı zamanda 2-normlu uzaylarda sabit bir $x = (x_n)$ dizisinin rough limit noktaları kümesi olan $\text{LIM}_2^r x$ kümesinin değişen r parametresine bağımlılığı incelenecektir.

Teorem 4.1 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi, $r_1 \geq 0$ ve $r_2 > 0$ olsun. (x_n) dizisinin $L \in X$ noktasına $(r_1 + r_2)$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $z \in X$ için

$$y_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_1} L \quad \text{ve} \quad \|x_n - y_n, z\| \leq r_2, \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $(y_n) \in X$ dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat: (4.1) eşitsizliğinin doğru olduğu varsayılsın. $y_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_1} L$ olması, her $z \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için, $n \geq n_\varepsilon$ iken

$$\|y_n - L, z\| \leq r_1 + \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_ε sayısının mevcut olması anlamına gelir. Ayrıca,

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r_2$$

olduğundan, $n \geq n_\varepsilon$ ve her $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|x_n - L, z\| &\leq \|x_n - y_n, z\| + |y_n - L, z\| \\ &< r_1 + r_2 + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $x = (x_n)$ dizisi L noktasına $(r_1 + r_2)$-yakınsaktır.

Şimdi $x = (x_n)$ dizisinin L noktasına $(r_1 + r_2)$-yakınsak olduğu kabul edilsin. Her $z \in X$ için bir (y_n) dizisi

$$y_n := \begin{cases} L & , \quad \|x_n - L, z\| \leq r_2, \\ x_n + r_2 \dfrac{(L - x_n)}{\|L - x_n, z\|} & , \quad \|x_n - L, z\| > r_2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$\|y_n - L, z\| = \begin{cases} 0 & , \quad \|x_n - L, z\| \leq r_2, \\ \|x_n - L, z\| - r_2 & , \quad \|x_n - L, z\| > r_2 \end{cases}$$

olur ve böylece $n = 1, 2, \ldots$ ve her $z \in X$ için

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r_2$$

elde edilir. $L \in \mathrm{LIM}_2^{r_1+r_2} x$ olduğundan, (3.2) eşitsizliği gereğince her $z \in X$ için

$$\limsup \|x_n - L, z\| \leq r_1 + r_2$$

ve böylece

$$\limsup \|y_n - L, z\| \leq r_1$$

elde edilir. Buradan da

$$y_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_1} L$$

olduğu görülür.

Teorem 4.2 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. $x = (x_n)$ dizisinin $L \in X$ noktasına yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $z \in X$ için,

$$\overline{B}_r(L) := \{x_1 \in X : \|x_1 - L, z\| \leq r\}$$

olmak üzere

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$$

olmasıdır.

İspat: $\mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$ eşitliğinin $x_n \to L$ olmasını gerektirdiğini göstermek gerekir. Aksine $x = (x_n)$ dizisinin L noktasından farklı bir L' yığılma noktasına sahip olduğu varsayılsın. Bu durumda, her $z \in X$ için

$$\overline{L} := L + \frac{r}{\|L - L', z\|}(L - L')$$

noktası

$$\|\overline{L} - L', z\| = r + \|L - L', z\| > r \tag{4.2}$$

eşitsizliğini sağlar. L' bir yığılma noktası olduğundan, (tanım gereği) (4.2) eşitsizliği $\overline{L} \notin \mathrm{LIM}_2^r x$ olmasını gerektirir ki bu durum

$$\|\overline{L} - L, z\| = r \quad \text{ve} \quad \mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$$

ile çelişir. Bundan dolayı, sonlu boyutlu normlu uzaylardaki sınırlı dizilerde olduğu gibi (Teorem 3.4), L noktası $x = (x_n)$ dizisinin tek yığılma noktasıdır. Sonuç olarak, $x = (x_n)$ dizisi $L \in X$ noktasına yakınsaktır.

Teorem 4.3 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı sonlu boyutlu kesin konveks bir uzay (yani kapalı birim yuvar kesin konveks) ise, bu durumda $\mathrm{LIM}_2^r x$ kesin konvekstir, yani $t_0, t_1 \in \mathrm{LIM}_2^r x$ ve $t_0 \neq t_1$ olması tüm $\lambda \in (0,1)$ için

$$t_\lambda \in int(\mathrm{LIM}_2^r x)$$

olmasını gerektirir.

İspat: Teorem 3.7 de özel olarak, $r = r_0 = r_1$ alınırsa, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı konveks olur.

$(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayı kesin konveks olsun. $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin kesin konveks olduğunu ispat etmek için $t_0, t_1 \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğunu ve ayrıca $t_o \neq t_1$ olması durumunun

$$t_{0.5} = \frac{1}{2}(t_0 + t_1) \in int(\mathrm{LIM}_2^r x)$$

ifadesini gerektirdiğini göstermek yeterlidir. Çünkü, her bir t_λ $(0 < \lambda < 1)$ için

$$t_o' \neq t_1' \quad \text{ve} \quad t_\lambda = \frac{1}{2}(t_0' + t_1')$$

durumunu sağlayan $t_0', t_1' \in \mathrm{LIM}_2^r x$ vardır.

Şimdi (x_n) dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi $\mathcal{C}$ ile gösterilsin. Bu kümenin kapalı olduğu açıktır. Bunun yanında, göz önüne alınan uzay sonlu boyutlu ve Teorem 3.4 ten dolayı (x_n) dizisi sınırlı olduğundan, $\mathcal{C}$ kümesi boş kümeden farklıdır ve sınırlıdır. Bu nedenle, her $z \in X$ için

$$\|\overline{c} - t_{0.5}, z\| = \max_{c \in \mathcal{C}} \|c - t_{0.5}, z\|$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\overline{c} \in \mathcal{C}$ vardır. Her $z \in X$ için

$$\|\overline{c} - t_0, z\| \leq r \quad \text{ve} \quad \|\overline{c} - t_1, z\| \leq r$$

olacak şekilde $t_0, t_1 \in \mathrm{LIM}_2^r x$ vardır. Bu eşitsizlikler, göz önüne alınan uzayın kesin konvekslik özelliğinden dolayı

$$\begin{aligned}
\|\overline{c} - t_{0.5}, z\| &= \|0.5(\overline{c} - t_0) + 0.5(\overline{c} - t_1), z\| \\
&< \max\{\|\overline{c} - t_0, z\|, \|\overline{c} - t_1, z\|\} \\
&\leq r
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar ve böylece

$$\lambda := r - \|\overline{c} - t_{0.5}, z\| > 0$$

olur. Şimdi $t \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğundan tüm $c \in \mathcal{C}$, $t \in B_\lambda(t_{0.5})$ ve her $z \in X$ için

$$\begin{aligned}
\|c - t, z\| &\leq \|c - t_{0.5}, z\| + \|t_{0.5} - t, z\| \\
&\leq \|\overline{c} - t_{0.5}, z\| + \lambda \\
&= r
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $t_{0.5}$ noktasının $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin bir iç noktası olduğu anlaşılır.

Teorem 4.4 $x = (x_n)$, herhangi bir (sonlu boyutlu) kesin konveks $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $z \in X$ için $\|t_1 - t_2, z\| = 2r$ eşitliğini sağlayan $t_1, t_2 \in \mathrm{LIM}_2^r x$ noktaları varsa, $x = (x_n)$ dizisi $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ noktasına yakınsaktır.

İspat: t_3, $x = (x_n)$ dizisine ait keyfi bir yığılma noktası olsun. Bu durumda, $t_1, t_2 \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olması her $z \in X$ için

$$\|t_1 - t_3, z\| \leq r \quad \text{ve} \quad \|t_2 - t_3, z\| \leq r \tag{4.3}$$

olmasını gerektirir. Kabulden ve (4.3) eşitsizliğinden, her $z \in X$ için

$$2r = \|t_1 - t_2, z\| \leq \|t_1 - t_3, z\| + \|t_2 - t_3, z\|$$

ve böylece

$$\|t_1 - t_3, z\| = \|t_2 - t_3, z\| = r$$

elde edilir. Ayrıca

$$\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}((t_3 - t_1) + (t_2 - t_3)) \quad \text{ve} \quad \|\frac{1}{2}(t_2 - t_1), z\| = r$$

olduğundan, göz önüne alınan 2-normlu uzayın kesin konveksliği

$$\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = t_3 - t_1 = t_2 - t_3$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

elde edilir. Bu da (Teorem 3.4 ten) bazı sonlu boyutlu 2-normlu uzaylardaki sınırlı dizilerde olduğu gibi $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ noktasının $x = (x_n)$ dizisinin tek yığılma noktası olduğu anlamına gelir. Böylece, $x = (x_n)$ dizisi $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ noktasına yakınsaktır.

Önceki iki teoremde 2-normlu uzayda bir yakınsak dizi ve bu dizinin r-limit noktaları kümesi ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Genel olarak, yakınsak olan dizilerden ziyade birkaç yığılma noktasına sahip olan diziler göz önüne alınmıştır.

Teorem 4.5 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu bir uzay olsun. Bu durumda,

(i) Eğer c, $x = (x_n)$ dizisinin bir yığılma noktası ise

$$\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \overline{B}_r(c) \tag{4.4}$$

kapsaması geçerlidir.

(ii) $\mathcal{C}$ kümesi, $x = (x_n) \subset X$ dizisinin tüm yığılma noktalarının kümesi olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_r(c) = \{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\} \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: **(i)** Her $z \in X$, tüm $L \in \mathrm{LIM}_2^r x$ noktaları ve $x = (x_n)$ dizisinin keyfi bir c yığılma noktası için

$$\|L - c, z\| \leq r \tag{4.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan, c noktası $x = (x_n)$ dizisinin bir yığılma noktası olduğundan,

$$\varepsilon := (\|L - c, z\| - r)/2 > 0$$

olmak üzere her $z \in X$ için

$$\|L - x_n, z\| > r + \varepsilon$$

olacak şekilde sonsuz sayıda x_n vardır ki bu durum (3.1) ile çelişir. Böylece,

$$\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \overline{B}_r(c)$$

kapsaması sağlanır.

(ii) (i) şıkkından,

$$\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_r(c) \tag{4.7}$$

olduğu açıktır. Şimdi, $y \in \bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_r(c)$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, tüm $c \in \mathcal{C}$ ler ve her $z \in X$ için

$$\|y - c, z\| \leq r$$

olur ki bu ifade $\mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(y)$ demektir, yani

$$\bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_r(c) \subseteq \{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\} \tag{4.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine olarak $y \notin \mathrm{LIM}_2^r x$ alınırsa, bu durumda (tanımdan), her $z \in X$ için

$$\|x_n - y, z\| \geq r + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ ve sonsuz sayıda x_n değeri vardır öyle ki bu durum $x = (x_n)$ dizisinin bir c yığılma noktasının mevcut olmasını gerektirir ve

$$\|y - c, z\| \geq r + \varepsilon,$$

yani

$$\mathcal{C} \nsubseteq \overline{B}_r(y) \quad \text{ve} \quad y \notin \{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\}$$

elde edilir. Böylece, eğer $y \in \mathrm{LIM}_2^r x$ ise,

$$y \in \{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\},$$

yani

$$\{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\} \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x \tag{4.9}$$

kapsaması sağlanır. Bu durumda, (4.7) – (4.9) dan

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_r(c) = \{L \in X : \mathcal{C} \subseteq \overline{B}_r(L)\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanımdan Limsup$\{x_n\}$ kümesi, $x = (x_n)$ dizisinin yığılma noktalarının kümesidir. Burada; (4.6) eşitsizliğinden, tüm $L \in \mathrm{LIM}_2^r x$ noktaları için

$$\mathrm{Lim\,sup}\{x_n\} \subset \overline{B}_r(L)$$

ve (4.5) eşitsizliğinden, eğer göz önüne alınan uzay sonlu boyutlu ise,

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{c \in \mathrm{Lim\,sup}\{x_n\}} \overline{B}_r(c)$$

elde edilir.

Teorem 4.6 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \mathrm{Lim\,inf}\, \overline{B}_r(x)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: İlk olarak $y \in \mathrm{LIM}_2^r x$ alalım. Her $z \in X$ için $y = (y_n)$ dizisi

$$y_n := \begin{cases} x_n + \frac{r}{\|y-x_n,z\|}(y - x_n) & , \ \|y - x_n, z\| > r \ \text{ ise,} \\ \qquad y & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Her $z \in X$ için

$$\begin{aligned} \|y_n - y, z\| &= \left| \frac{r}{\|y - x_n, z\|} - 1 \right| \|y - x_n, z\| \\ &= \big| \|y - x_n, z\| - r \big| \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\|y_n - y, z\| = \begin{cases} \|y - x_n, z\| - r & , \quad \|y - x_n, z\| > r \ \text{ ise,} \\ \qquad 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Bundan dolayı, $y \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olması $n \to \infty$ iken $y_n \to y$ olmasını gerektirir. Fakat $\|x_n - y_n, z\| \leq r$, yani $y_n \in \overline{B}_r(x)$ dir. Sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} d(y, \overline{B}_r(x)) = 0$$

olur ki burada (tanımdan dolayı) $y \in \operatorname{Lim\,inf} \overline{B}_r(x)$ olduğu anlaşılır. Böylece

$$\mathrm{LIM}_2^r x \subset \operatorname{Lim\,inf} \overline{B}_r(x)$$

kapsaması elde edilir.

Şimdi, $y \in \operatorname{Lim\,inf} \overline{B}_r(x)$ alınsın. Tanımdan, $y_n \to y$ ve $y_n \in \overline{B}_r(x)$ olacak şekilde bir (y_n) dizisi vardır, yani her $z \in X$ için

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r$$

dir. Bu durumda, Teorem 4.1 den $y \in \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğu anlaşılır. Buradan

$$\operatorname{Lim\,inf} \overline{B}_r(x) \subset \mathrm{LIM}_2^r x$$

ve böylece

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \operatorname{Lim\,inf} \overline{B}_r(x)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önceki teoremler, sabit bir r roughlık derecesi için r-limit noktalarının özellikleri ile ilgiliydi. Şimdi r-limit noktaları kümesi $\mathrm{LIM}_2^r x$ in keyfi bir $x = (x_n)$ dizisi için değişen r değerlerine bağlılığı incelenecektir.

Tanımdan,

$$r_1 < r_2 \quad \text{ise } \mathrm{LIM}_2^{r_1} x \subseteq \mathrm{LIM}_2^{r_2} x \tag{4.10}$$

elde edilir. Bu monotonluk aşağıdaki teoremde de verilecektir.

Teorem 4.7 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $r \geq 0$ ve $\rho > 0$ ise bu durumda

(i) $\mathrm{LIM}_2^r x + \overline{B}_\rho(0) \subseteq \mathrm{LIM}_2^{r+\rho} x$ dir.

(ii) $\overline{B}_\rho(y) \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x$ kapsaması $y \in \mathrm{LIM}_2^{r-\rho} x$ olmasını gerektirir.

İspat: (i) $y \in \mathrm{LIM}_2^r x$ ve $t \in \overline{B}_\rho(0)$ olsun. Tanımdan, tüm $\varepsilon > 0$ için bir n_ε vardır öyle ki her $z \in X$ için, $n \geq n_\varepsilon$ iken

$$\|x_n - y, z\| < r + \varepsilon$$

olur ki bu durum $\|t, z\| < \rho$ olmasından dolayı $n \geq n_\varepsilon$ iken

$$\|x_n - y - t, z\| < r + \rho + \varepsilon$$

olmasını gerektirir. Buradan, $y + t \in \mathrm{LIM}_2^{r+\rho} x$ elde edilir.

(ii) c, $x = (x_n)$ dizisinin keyfi bir yığılma noktası olsun. Eğer her $z \in X$ için

$$\|y - c, z\| > r - \rho$$

ise, bu durumda

$$L := y + \frac{\rho}{\|y - c, z\|}(y - c)$$

noktası

$$\|L - c, z\| = \rho + \|y - c, z\| > \rho + (r - \rho) = r$$

ifadesini sağlar. Bu durum, (4.4) ten, $L \notin \mathrm{LIM}_2^r x$ olmasını gerektirir ki bu ifade

$$\|L - y, z\| = \rho \quad \text{ve} \quad \overline{B}_\rho(y) \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x$$

olması ile çelişir. Böylece, tüm $c \in \mathcal{C}$ yığılma noktaları ve her $z \in X$ için

$$\|y - c, z\| \leq r - \rho$$

eşitsizliği sağlanır. Sonuç olarak (4.5) ten

$$y \in \bigcap_{c \in \mathcal{C}} \overline{B}_{r-\rho}(c) = \mathrm{LIM}_2^{r-\rho} x$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi,

$$\overline{r} := \inf\{r > 0 : \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset\} \tag{4.11}$$

noktası tanımlansın. (4.10) da verilen monotonluktan

$$\mathrm{LIM}_2^r x \begin{cases} = \emptyset \quad , \quad r < \overline{r} \ \text{ ise,} \\ \neq \emptyset \quad , \quad r > \overline{r} \ \text{ ise,} \end{cases} \tag{4.12}$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 4.7 den, tüm $r > \overline{r}$ ve $\rho \in (0, r - \overline{r})$ noktaları için $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesi daima ρ yarıçaplı bazı yuvarları içerir ki bu ifade

$$r > \overline{r} \quad \text{için} \quad int(\mathrm{LIM}_2^r x) \neq \emptyset \tag{4.13}$$

anlamına gelir. Bu nedenle,

$$int(\mathrm{LIM}_2^r x) = \emptyset \ \text{ ifadesi } \ r \leq \overline{r} \ \text{ ve } \ r' \in [0, r) \text{ için } \mathrm{LIM}_2^{r'} x = \emptyset \tag{4.14}$$

olmasını sağlar.

Teorem 4.8 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun.

(i) $r = \overline{r}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad int(\mathrm{LIM}_2^r x) = \emptyset \tag{4.15}$$

olmasıdır.

(ii) Eğer $(X, \|.,.\|)$ sonlu boyutlu kesin konveks bir uzay ise bu durumda, $r = \overline{r}$ olması için gerek ve yeter şart $\mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin tek nokta kümesi olmasıdır.

İspat: **(i)** $r = \overline{r}$ olsun. Bu durumda (4.15) eşitsizliğinin sağlandığını göstermek gerekir. Bir sonraki Teorem 4.9 da

$$\mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{r' > \overline{r}} \mathrm{LIM}_2^{r'} x$$

olduğu ispatlanacaktır. $r' > \overline{r}$ için, $\mathrm{LIM}_2^{r'} x$ kümesi (4.12) den dolayı boştan farklı bir küme ve Teorem 3.6 gereğince kapalıdır. (4.10) dan

$$\bigcap_{r' > \overline{r}} \mathrm{LIM}_2^{r'} x = \bigcap_{\overline{r} < r' \leq \overline{r}+1} \mathrm{LIM}_2^{r'} x$$

elde edilir ve $r' \in (\overline{r}, \overline{r}+1]$ için $\mathrm{LIM}_2^{r'} x$, sonlu arakesit özelliğine sahip $\mathrm{LIM}_2^{\overline{r}+1} x$ kompakt kümesindeki boştan farklı kapalı altkümelerin bir ailesidir. Bundan dolayı, bu kümelerin arakesiti boş kümeden farklıdır ve böylece

$$\mathrm{LIM}_2^{\overline{r}} x \neq \emptyset$$

elde edilir.

Eğer $int(\mathrm{LIM}_2^r x) \neq \emptyset$ ise, bu küme $\rho > 0$ için bazı $\overline{B}_\rho(y)$ yuvarlarını içerir ve Teorem 4.7 den $\mathrm{LIM}_2^{r-\rho} x \neq \emptyset$, yani $r > \overline{r}$ elde edilir. Bu nedenle, $r = \overline{r}$ olması $int(\mathrm{LIM}_2^r x) = \emptyset$ olmasını gerektirir.

(4.15) ifadesinin sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olduğundan $r \geq \overline{r}$ elde edilir. Diğer taraftan, (4.14) ten $int(\mathrm{LIM}_2^r x) = \emptyset$ olduğundan $r \leq \overline{r}$ olup, sonuç olarak $r = \overline{r}$ elde edilir.

(ii) Eğer $\mathrm{LIM}_2^r x$ bir tek nokta kümesi ise (4.15) sağlanır. Burada (i) den dolayı $r = \overline{r}$ olduğu görülür. Bu durum, $\mathrm{LIM}_2^{\overline{r}} x$ kümesinin tek nokta kümesi olduğunu gösterir. Kümenin kesin konveksliğinden (Teorem 4.3)

$$\mathrm{LIM}_2^{\overline{r}} x \neq \emptyset \quad \text{ve} \quad int(\mathrm{LIM}_2^{\overline{r}} x) = \emptyset$$

doğrudan elde edilir.

Teorem 4.9 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Aşağıdaki kapsama geçerlidir:

$$cl\left(\bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}_2^{r'} x\right) \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{r' > r} \mathrm{LIM}_2^{r'} x.$$

Eğer $r \neq \overline{r}$ ise, bu durumda

$$cl\left(\bigcup_{0\leq r'<r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x\right) = \mathrm{LIM}_2^{r}x$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.10) da verilen monotonluk ve $r-$limit kümesinin kapalılık özelliğinden (Teorem 3.6)

$$cl\left(\bigcup_{0\leq r'<r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x\right) \subseteq \mathrm{LIM}_2^{r}x \subseteq \bigcap_{r'>r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x$$

elde edilir. Şimdi, keyfi bir $y \in X \setminus \mathrm{LIM}_2^{r}x$ alınsın. Tanımdan, bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her $z \in X$ için

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k:\ \|x_n - y, z\| \geq r + \varepsilon$$

olur. Bu durum, $r' < r + \varepsilon$ için $\varepsilon' := r + \varepsilon - r' > 0$ ve her $z \in X$ için

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists n \geq k:\ \|x_n - y, z\| \geq r' + \varepsilon'$$

olmasını gerektirir. Böylece, $r' < r + \varepsilon$ için $y \notin \mathrm{LIM}_2^{r'}x$ olur ki bu ifade

$$y \notin \bigcap_{r'>r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x$$

olmasını gerektirir. Buradan

$$\mathrm{LIM}_2^{r}x = \bigcap_{r'>r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x$$

elde edilir.

$r < \overline{r}$ için

$$cl\left(\bigcup_{0\leq r'<r} \mathrm{LIM}_2^{r'}x\right) = \mathrm{LIM}_2^{r}x = \emptyset$$

olduğu açıktır.

$r = r_1 > \overline{r}$ ve $r_0 = (\overline{r} + r_1)/2$ olsun. $r_0 > \overline{r}$ olduğundan bir $y_0 \in \mathrm{LIM}_2^{r_0}x \neq \emptyset$ seçilebilir. Keyfi bir $y_1 \in \mathrm{LIM}_2^{r_1}x$ alınsın. Bu durumda Teorem 3.7 den

$$\alpha \in [0,1] \quad \text{için} \quad y_\alpha = (1-\alpha)y_0 + \alpha y_1 \in \mathrm{LIM}_2^{(1-\alpha)r_0 + \alpha r_1}x$$

olur ki sonuç olarak

$$y_\alpha \in \bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}_2^{r'} x, \ \big(\alpha \in [0,1)\big)$$

elde edilir.

Her $z \in X$ için

$$\alpha \to 1 \quad \text{iken} \quad \|y_\alpha - y_1, z\| = (1-\alpha)\|y_0 - y_1, z\| \to 0$$

olduğundan

$$y_1 \in cl\big(\bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}_2^{r'} x\big)$$

elde edilir. Böylece

$$cl\big(\bigcup_{0 \leq r' < r} \mathrm{LIM}_2^{r'} x\big) = \mathrm{LIM}_2^{r} x$$

eşitliği $r > \overline{r}$ için de doğrudur.

5. 2-NORMLU UZAYLARDA ROUGH İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde, 2-normlu uzaylarda rough istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılacak ve adi yakınsaklık ile arasındaki ilişki incelenecektir. Bunun yanında rough istatistiksel limit noktaları kümesinin sınırlılık, kapalılık ve konvekslik gibi özellikleri incelenecektir. Bir dizinin r-istatistiksel limit noktaları kümesinin topolojik ve geometrik özellikleri verilecektir. 2-normlu uzayda bir dizinin tüm istatistiksel yığılma noktaları ile rough istatistiksel limit noktaları arasındaki ilişki araştırılacaktır.

Tanım 5.1 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu bir uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfır oluyorsa veya bu ifadeye denk olarak, eğer

$$st - \limsup \|x_n - L, z\| \leq r$$

şartı sağlanıyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına *rough istatistiksel yakınsaktır (r_2st-yakınsaktır)* denir ve $x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_2st} L$ ile gösterilir. Ayrıca, $x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_2st} L$ yazılabilmesi için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$, her bir $z \in X$ ve hemen hemen her n için

$$\|x_n - L, z\| < r + \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Bu yakınsaklıkta r, istatistiksel yakınsaklık derecesi olarak adlandırılır. $r = 0$ için rough istatistiksel yakınsaklık adi istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Rough yakınsaklık fikrine benzer olarak bir dizinin rough istatistiksel yakınsaklığı aşağıdaki gibi yorumlanabilir. $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında istatistiksel yakınsak bir (y_n) dizisi alınsın ve bu dizinin limiti kesin olarak ölçülemiyor ya da hesaplanamıyor olsun. Bu ölçümün her n ve her bir $z \in X$ için

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde X de bir $x = (x_n)$ dizisi yardımı ile yaklaşık olarak (ya da istatistiksel yaklaşık) yapılması gerekmektedir (hemen hemen her n için $\delta(n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_n, z\| \geq r) = 0$ dır). Bu durumda, $x = (x_n)$ dizisi artık istatistiksel yakınsak değildir fakat sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L', z\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L', z\| \geq r + \varepsilon\} \tag{5.1}$$

kapsaması geçerli olduğundan,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L', z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

ve böylece

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L', z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir. Yani, Tanım 5.1 gereğince $x \in X$ dizisi $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında r-istatistiksel yakınsaktır.

Genel olarak, $r > 0$ roughlık derecesi için bir $x = (x_n)$ dizisinin rough istatistiksel limiti tek olmayabilir. Bu durumda, $(X, \|.,.\|)$ uzayındaki $x = (x_n)$ dizisinin rough istatistiksel limit noktalarının kümesi olarak

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x := \{L \in X : x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_2 st} L\} \tag{5.2}$$

şeklinde tanımlanan küme göz önüne alınacaktır.

Eğer $x = (x_n)$ dizisi için $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ ise, $x = (x_n)$ dizisi *r-istatistiksel yakınsaktır* denir. Sınırlı olmayan bir $x = (x_n)$ dizisi için $\mathrm{LIM}_2^r x = \emptyset$ dir fakat bu dizi rough istatistiksel yakınsak olabilir. Örneğin, $(X, \|.,.\|)$ uzayında

$$x_n := \begin{cases} ((-1)^n, (-1)^n) & , \quad n \neq k^2 \ \ (k \in \mathbb{N}) \text{ ise }, \\ (n, n) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{5.3}$$

dizisi tanımlansın. $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x = \begin{cases} \emptyset & , \quad r < 1 \text{ ise }, \\ [(1 - r, 1 - r), (r - 1, r - 1)] & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve tüm $r \geq 0$ için $\mathrm{LIM}_2^r x = \emptyset$ elde edilir.

Yukarıdaki örnekten, $\mathrm{LIM}_2^r x = \emptyset$ elde edilir fakat $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ dir. Doğal sayıların sonlu bir alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan, $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olması $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olmasını gerektirir ve böylece

$$\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x$$

elde edilir. Yani,

$$\{r \geq 0 : \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset\} \subseteq \{r \geq 0 : st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset\}$$

ve buradan

$$\inf\{r \geq 0 : \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset\} \geq \inf\{r \geq 0 : st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset\}$$

olur. Bu durum aynı zamanda

$$diam(\mathrm{LIM}_2^r x) \leq diam(st - \mathrm{LIM}_2^r x)$$

olmasını gerektirir. Yukarıda bahsedildiği gibi, $r > 0$ roughlık derecesi için bir dizinin rough istatistiksel limit noktasının tek olduğu söylenemez. Aşağıdaki teorem bu durumla ilgilidir.

Teorem 5.2 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Bu durumda,

$$diam(st - \mathrm{LIM}_2^r x) \leq 2r$$

dir. Genel olarak $diam(st - \mathrm{LIM}_2^r x)$ daha küçük bir üst sınıra sahip değildir.

İspat: İlk olarak $diam(st - \mathrm{LIM}_2^r x) > 2r$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|y - t, z\| > 2r$$

olacak şekilde $y, t \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ vardır. $\varepsilon \in (0, \frac{\|y-t,z\|}{2} - r)$ seçilsin. $y, t \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$A_1 = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y, z\| \geq r + \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad A_2 = \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - t, z\| \geq r + \varepsilon\}$$

olmak üzere

$$\delta(A_1) = 0 \quad \text{ve} \quad \delta(A_2) = 0$$

elde edilir. Doğal yoğunluğun özelliklerinden $\delta(A_1^c \cap A_2^c) = 1$ olur ve böylece her $n \in A_1^c \cap A_2^c$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|y - t, z\| \leq \|x_n - y, z\| + \|x_n - t, z\| < 2(r + \varepsilon) = \|y - t, z\|$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Şimdi ispatın ikinci kısmı için $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında $st - \lim x = L$ olacak şekilde bir $x = (x_n)$ dizisi alınsın. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olduğu açıktır. Böylece, her bir

$$y \in \overline{B}_r(L) := \{y \in X : \|y - L, z\| \leq r\}$$

ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|x_n - y, z\| \leq \|x_n - L, z\| + \|L - y, z\| \leq \|x_n - L, z\| + r$$

olduğu görülür. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ ve her bir $n \in \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| < \varepsilon\}$ için

$$\|x_n - y, z\| < r + \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $x = (x_n)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olduğundan, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için,

$$\delta\left(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| < \varepsilon\}\right) = 1$$

dir ve buradan da $y \in st - \text{LIM}_2^r x$ elde edilir. Sonuç olarak

$$st - \text{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$$

yazılabilir. $diam(\overline{B}_r(L)) = 2r$ olduğundan, bu durum gösterir ki genel olarak $st - \mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin çapının üst sınırı $2r$ den daha küçük olamaz. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 gereğince sınırlı bir dizi için $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olacak şekilde negatif olmayan bir r reel sayısı vardır. $\mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olması $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olmasını gerektirdiğinden dolayı aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3 Eğer $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisi sınırlı ise bu durumda, $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olacak şekilde negatif olmayan bir r reel sayısı vardır.

Bu sonucun tersi geçerli değildir. Eğer alınan dizi 2-normlu uzayda istatistiksel sınırlı ise bu durumda, Sonuç 5.3 ün tersi elde edilir.

Teorem 5.4 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayındaki bir $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olması için gerek ve yeter şart $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olacak şekilde negatif olmayan bir r reel sayısının mevcut olmasıdır.

İspat: $x = (x_n)$ istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n, z\| \geq M\}) = 0$$

olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı vardır. Şimdi,

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \|x_n, z\| \geq M\}$$

olmak üzere, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$r' := \sup\{\|x_n, z\| : n \in A^c\}$$

alınsın. Bu durumda $st - \mathrm{LIM}_2^{r'} x$ kümesi X uzayının orijinini içerir. Bundan dolayı $st - \mathrm{LIM}_2^{r'} x \neq \emptyset$ elde edilir.

Eğer bazı $r \geq 0$ için $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ ise bu durumda, $L \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olacak şekilde bir L sayısı vardır, yani her bir $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

olur. Bu durumda, hemen hemen her x_n noktasının r den büyük herhangi yarıçaplı bir yuvar tarafından kapsandığı söylenebilir. Böylece, $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.5 ten eğer $x' = (x'_n)$, $x = (x_n)$ dizisinin bir alt dizisi ise bu durumda, $\mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \mathrm{LIM}_2^r x'$ olduğu bilinmektedir. Fakat bu durum istatistiksel yakınsaklık teorisinde geçerli değildir. Örneğin, reel sayılarda

$$x_n := \begin{cases} (n, n) & , \quad n = k^3, (k \in \mathbb{N}), \\ (0, 0) & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisi tanımlansın. Bu durumda $x' := ((1, 1), (8, 8), (27, 27), \dots)$ dizisi x dizisinin bir alt dizisidir.

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x = [(-r, -r), (r, r)] \text{ ve } st - \mathrm{LIM}_2^r x' = \emptyset$$

elde edilir.

Böylece Önerme 3.5 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 5.5 $(X, \|., .\|)$ 2-normlu uzayında bir $x' = (x_{n_k})$ dizisi, $x = (x_n)$ dizisinin seyrek olmayan bir alt dizisi olsun. Bu durumda

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x'$$

kapsaması geçerlidir.

Şimdi, 2-normlu uzayda bir dizinin r-istatistiksel limit noktaları kümesinin topolojik ve geometrik özellikleri incelenecektir.

Teorem 5.6 $(X, \|., .\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisinin r-istatistiksel limit noktalarının kümesi kapalıdır.

İspat: Eğer $st - \mathrm{LIM}_2^r x = \emptyset$ ise ispat açıktır. Şimdi $st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $n \to \infty$ için $y_n \to L'$ olacak şekilde bir $(y_n) \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x$ dizisi seçilebilir. Eğer $L' \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğu gösterilirse ispat tamamlanır.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $y_n \to L'$ olduğundan, her $n > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|y_n - L', z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_{\frac{\varepsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ vardır. Şimdi, $n_0 > n_{\frac{\varepsilon}{2}}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda,

$$\|y_{n_0} - L', z\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $(y_n) \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğundan

$$y_{n_0} \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$$

elde edilir, yani

$$\delta\left(\left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_{n_0}, z\| \geq r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) = 0 \tag{5.4}$$

olur. Şimdi

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L', z\| < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_{n_0}, z\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\} \tag{5.5}$$

ifadesinin sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için sağlandığı gösterilecektir. Bunun için

$$k \in \left\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_{n_0}, z\| < r + \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

alınsın. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|x_k - y_{n_0}, z\| < r + \frac{\varepsilon}{2}$$

ve böylece

$$\|x_k - L', z\| \leq \|x_k - y_{n_0}, z\| + \|y_{n_0} - L', z\| < r + \varepsilon,$$

yani

$$k \in \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L', z\| < r + \varepsilon\}$$

elde edilir ki bu ifade (5.5) kapsamasını sağlar. (5.4) eşitsizliğinden, (5.5) ifadesinin sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğunun 1 olduğu söylenebilir. Bu durumda, (5.5) kapsamasının sol tarafındaki kümenin de doğal yoğunluğu 1 e eşittir. Böylece, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L', z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.7 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizinin r-istatistiksel limit noktalarının kümesi konvekstir.

İspat: $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisi için $y_0, y_1 \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$A_1 := \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_0, z\| \geq r + \varepsilon\} \quad \text{ve} \quad A_2 := \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_1, z\| \geq r + \varepsilon\}$$

tanımlansın. $y_0, y_1 \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğundan

$$\delta(A_1) = \delta(A_2) = 0$$

dır. Bundan dolayı, her bir $n \in A_1^c \cap A_2^c$, $\lambda \in [0, 1]$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|x_n - [(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1], z\| = \|(1 - \lambda)(x_n - y_0) + \lambda(x_n - y_1), z\| < r + \varepsilon$$

elde edilir. $\delta(A_1^c \cap A_2^c) = 1$ olduğundan,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - [(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1], z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

olduğu görülür, yani sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$[(1 - \lambda)y_0 + \lambda y_1] \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$$

olur. Bu durum ise $st - \mathrm{LIM}_2^r x$ kümesinin konveks olduğunu gösterir.

Teorem 5.8 (x_n), $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi ve $r > 0$ olsun. Bu durumda, (x_n) dizisinin L noktasına r-istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her bir $n \in \mathbb{N}$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \lim_{n \to \infty} y_n = L \quad \text{ve} \quad \|x_n - y_n, z\| \leq r$$

olacak şekilde bir (y_n) dizisinin mevcut olmasıdır.

İspat: $x_n \xrightarrow{\|.,.\|}_{r_2 st} L$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$st - \limsup_{n\to\infty} \|x_n - L, z\| \leq r \tag{5.6}$$

dir. Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$y_n := \begin{cases} L & , \ \|x_n - L, z\| \leq r \text{ ise,} \\ x_n + r\frac{L - x_n}{\|x_n - L, z\|} & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{5.7}$$

biçiminde bir (y_n) dizisi tanımlansın. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|y_n - L, z\| = \begin{cases} 0 & , \ \|x_n - L, z\| \leq r \text{ ise,} \\ \|x_n - L, z\| - r & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{5.8}$$

yazılabilir. (y_n) dizisinin tanımından, her $n \in \mathbb{N}$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|x_n - y_n, z\| \leq r$$

elde edilir. (5.6) eşitsizliği ve (y_n) dizisinin tanımından, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$st - \limsup_{n\to\infty} \|y_n - L, z\| = 0$$

elde edilir ki bu sonuç

$$st - \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

olmasını gerektirir.

Tersine olarak,

$$st - \lim_{n\to\infty} y_n = L$$

olduğu kabul edilsin. Bu durumda, her bir $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olur ve böylece

$$\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}$$

kapsamasının sağlandığı kolayca görülür. Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|y_n - L, z\| \geq \varepsilon\}) = 0$$

olduğundan,

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}) = 0$$

elde edilir ki bu ifade ispatı tamamlar.

Eğer yukarıdaki teoremin hipotez kısmındaki

“ her $n \in \mathbb{N}$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $\|x_n - y_n, z\| \leq r$ ”

ifadesi yerine

$$\text{“ } \delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y_n, z\| > r\}) = 0 \text{ ”}$$

ifadesi alınırsa teorem yine sağlanacaktır.

Tanım 5.9 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - c, z\| < \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdan farklı oluyorsa, $c \in X$ noktasına $x = (x_n)$ dizisinin bir *istatistiksel yığılma noktası* denir. $x = (x_n)$ dizisinin $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında tüm istatistiksel yığılma noktalarının kümesi Γ_x^2 ile gösterilecektir.

Şimdi, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizinin rough istatistiksel limit noktaları kümesinin önemli bir özelliği verilecektir.

Lemma 5.10 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisinin keyfi bir $c \in \Gamma_x^2$ yığılma noktası alınsın. Her $L \in st - \text{LIM}_2^r x$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $\|L - c, z\| \leq r$ eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Tersine olarak sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için $\|L - c, z\| > r$ olacak şekilde $c \in \Gamma_x^2$ ve $L \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ noktalarının mevcut olduğu kabul edilerek bir $\varepsilon := \frac{\|L-c,z\|-r}{3}$ tanımlansın. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} : \|x_n - c, z\| < \varepsilon\} \tag{5.9}$$

yazılabilir. $c \in \Gamma_x^2$ olduğundan, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - c, z\| < \varepsilon\}) \neq 0$$

olur. Böylece (5.9) kapsamasından dolayı sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir ki bu durum $L \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olması ile çelişir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi, 2-normlu uzaylarda bir dizinin rough istatistiksel limit noktaları kümesi ile ilişkili iki tane istatistiksel yakınsaklık kriteri verilecektir.

Teorem 5.11 $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir $x = (x_n)$ dizisinin L noktasına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $st - \mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik kısmı Teorem 5.2 de ispatlanmıştır.

Şimdi teoremin yeterlilik kısmı ispatlanacaktır. $st - \mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L) \neq \emptyset$ olduğundan, Teorem 5.4 gereğince $x = (x_n)$ dizisinin istatistiksel sınırlı olduğu söylenebilir. Tersine olarak, $x = (x_n)$ dizisinin L den farklı bir L' istatistiksel yığılma noktasının mevcut olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$\overline{L} := L + \frac{r}{\|L - L', z\|}(L - L')$$

noktası

$$\|\overline{L} - L', z\| = \left(\frac{r}{\|L - L', z\|} + 1\right)\|L - L', z\| = r + \|L - L', z\| > r$$

olmasını sağlar. L', $x = (x_n)$ dizisinin bir istatistiksel yığılma noktası olduğundan, Lemma 5.10 dan $\overline{L} \notin st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olduğu görülür. Bu durum

$$\|\overline{L} - L, z\| = r \quad \text{ve} \quad st - \mathrm{LIM}_2^r x = \overline{B}_r(L)$$

olması ile çelişir. Bundan dolayı, L noktası $x = (x_n)$ dizisinin tek istatistiksel limit noktasıdır ve böylece $x = (x_n)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 5.12 $(X, \|.,.\|)$ 2- normlu uzayı kesin konveks bir uzay ve $x = (x_n)$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|t_1 - t_2, z\| = 2r$$

olacak şekilde $t_1, t_2 \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ noktaları varsa, bu dizi $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ noktasına istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $t \in \Gamma_x^2$ kabul edilsin. Bu durumda $t_1, t_2 \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olması, Lemma 5.10 dan, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\|t_1 - t, z\| \leq r \quad \text{ve} \quad \|t_2 - t, z\| \leq r \tag{5.10}$$

olmasını gerektirir. Diğer taraftan, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$2r = \|t_1 - t_2, z\| \leq \|t_1 - t, z\| + \|t_2 - t, z\| \tag{5.11}$$

olur ve böylece (5.10) ve (5.11) eşitsizliklerinden

$$\|t_1 - t, z\| = \|t_2 - t, z\| = r$$

eşitliği elde edilir. Sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = \frac{1}{2}[(t - t_1) + (t_2 - t)] \tag{5.12}$$

ve

$$\|t_1 - t_2, z\| = 2r$$

olduğundan

$$\|\frac{1}{2}(t_1 + t_2), z\| = r$$

elde edilir. Göz önüne alınan uzayın kesin konveksliğinden ve (5.12) eşitliğinden, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\frac{1}{2}(t_2 - t_1) = t - t_1 = t_2 - t$$

olur ki bu eşitlik

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

olmasını gerektirir. Buradan, t noktası $x = (x_n)$ dizisinin tek istatistiksel yığılma noktasıdır. Diğer taraftan, $t_1, t_2 \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ kabulü

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x \neq \emptyset$$

olmasını gerektirir. Teorem 5.4 gereğince, $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır. Sonuç olarak $x = (x_n)$ dizisi istatistiksel yakınsaktır, yani

$$st - \lim x = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.5 in istatistiksel genişletilmesidir.

Teorem 5.13 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında bir dizi olsun.

(i) Eğer $c \in \Gamma_x^2$ ise bu durumda

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \overline{B}_r(c) \tag{5.13}$$

kapsaması geçerlidir.

(ii)

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x = \bigcap_{c \in \Gamma_x^2} \overline{B}_r(c) = \{L \in X : \Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(L)\} \tag{5.14}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: (i) $L \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ ve $c \in \Gamma_x^2$ olsun. Bu durumda, Lemma 5.10 dan

$$\|L - c, z\| \leq r$$

olduğu görülür. Aksi halde, $\varepsilon := \frac{\|L-c,z\|-r}{3}$ ve sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - L, z\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

dır. Bu ifade $L \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$ olması ile çelişir.

(ii) (5.13) kapsamasından,

$$st - \mathrm{LIM}_2^r x \subseteq \bigcap_{c \in \Gamma_x^2} \overline{B}_r(c) \tag{5.15}$$

yazılabilir. İlk olarak, $y \in \bigcap_{c \in \Gamma_x^2} \overline{B}_r(c)$ alınsın. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ ve tüm $c \in \Gamma_x^2$ için

$$\|y - c, z\| \leq r$$

elde edilir ki bu ifade $\Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(y)$ olması ile aynı anlama gelir, yani

$$\bigcap_{c \in \Gamma_x^2} \overline{B}_r(c) \subseteq \{L \in X : \Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(L)\} \tag{5.16}$$

kapsaması sağlanır. Şimdi, $y \notin st - \mathrm{LIM}_2^r x$ alınsın. Bu durumda, bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - y, z\| \geq r + \varepsilon\}) \neq 0$$

elde edilir. Bu ifade aynı zamanda $x = (x_n)$ dizisinin

$$\|y - c, z\| \geq r + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir c istatistiksel yığılma noktasının mevcut olmasını gerektirir, yani

$$\Gamma_x^2 \nsubseteq \overline{B}_r(y) \quad \text{ve} \quad y \notin \{L \in X : \Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(L)\}$$

sağlanır. Böylece,

$$y \in \{L \in X : \Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(L)\}$$

olduğundan

$$y \in st - \mathrm{LIM}_2^r x$$

yani

$$\{L \in X : \Gamma_x^2 \subseteq \overline{B}_r(L)\} \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x \tag{5.17}$$

kapsaması elde edilir. Bu durumda, (5.15) – (5.17) ifadelerinden (5.14) eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

Son olarak 2-normlu uzayda bir dizinin istatistiksel yığılma noktaları ve rough istatistiksel limit noktaları arasındaki ilişkiyi inceleyen teorem verilecektir.

Teorem 5.14 $x = (x_n)$, $(X, \|.,.\|)$ 2-normlu uzayında istatistiksel sınırlı bir dizi olsun. Eğer $r = diam(\Gamma_x^2)$ ise, bu durumda

$$\Gamma_x^2 \subseteq st - \mathrm{LIM}_2^r x$$

kapsaması geçerlidir.

İspat: $c \notin st - \mathrm{LIM}_2^r x$ alınsın. Bu durumda, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için

$$\delta(\{n \in \mathbb{N} : \|x_n - c, z\| \geq r + \varepsilon'\}) \neq 0 \tag{5.18}$$

olacak şekilde bir $\varepsilon' > 0$ vardır. Dizi istatistiksel sınırlı olduğundan ve (5.18) ifadesinden, sıfırdan farklı her bir $z \in X$ için, $\widetilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon'}{2}$ olmak üzere

$$\|c - c', z\| > r + \widetilde{\varepsilon}$$

olacak şekilde farklı bir c' istatistiksel yığılma noktası vardır. Böylece

$$diam(\Gamma_x^2) > r + \widetilde{\varepsilon}$$

elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

6. KAYNAKLAR

Arslan M, Dündar E, 2018, On $\mathcal{I}$-convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 42, 491–502.

Arslan M, Dündar E, 2018, $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence of Functions in 2-normed Spaces, Konuralp Journal of Mathematics, 6, 57–62.

Aytar S, 2008, Rough Statistical Convergence, Numerical Functional Analysis and Optimization, 29, 291–303.

Aytar S, 2008, The Rough Limit Set and The Core of a Real Sequence, Numerical Functional Analysis and Optimization 29, 283–290.

Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.

Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Gazi Kitabevi, Ankara.

Choudhary B, Nanda S, 1989, Functional Analysis with Applications, John Wiley-Sons, NewYork.

Çakallı H, Ersan S, 2016, New Types of Continuity in 2-normed Spaces, Filomat, 30, 525–532.

Dündar E, 2016, On Rough $\mathcal{I}_2$-convergence, Numerical Functional Analysis and Optimization, 37, 480–491.

Dündar E, Arslan M, Yegül S, 2020, On $\mathcal{I}$-uniform Convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 50, 1637–1646.

Dündar E, Çakan C, 2014, Rough Convergence of Double Sequences, Demonstratio Mathematica, 47, 638–651.

Dündar E, Çakan C, 2014, Rough $\mathcal{I}$-convergence, Gulf Journal of Mathematics, 2, 45–51.

Fast H, 1951, Sur la Convergence Statistique, Colloquium Mathematicum, 2, 241–244.

Freedman A R, Sember J J, 1981, Densities and Summability, Pacific Journal of Mathematics, 95, 293–305.

Fridy J A, 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301–313.

Gähler S, 1963, 2-metrische Räume und Ihre Topologische Struktur, Mathematische Nachrichten, 26, 115–148.

Gähler S, 1964, 2-normed Spaces, Mathematische Nachrichten, 28, 1–43.

Gunawan H, Mashadi M, 2001, On Finite Dimensional 2-normed Spaces, Soochow Journal of Mathematics, 27, 321–329.

Gunawan H, Mashadi M, 2001, On n-normed Spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27, 631–639.

Gürdal M, 2006, On Ideal Convergent Sequences in 2-normed Spaces, Thai Journal of Mathematics, 4, 85–91.

Gürdal M, Açık I, 2008, On $\mathcal{I}$-Cauchy Sequences in 2-normed Spaces, Mathematical Inequalities and Applications, 11, 349–354.

Gürdal M, Pehlivan S, 2004, The Statistical Convergence in 2-Banach Spaces, Thai Journal of Mathematics, 2, 107–113.

Gürdal M, Pehlivan S, 2009, Statistical Convergence in 2-normed Spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33, 257–264.

Kişi Ö, Dündar E, 2018, Rough $\mathcal{I}_2$-lacunary Statistical Convergence of Double Sequences, Journal of Inequalities and Applications, 2018, 16 pages.

Maddox I J, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mursaleen M, Alotaibi A, 2011, On $\mathcal{I}$-convergence in Random 2-normed Spaces, Mathematica Slovaca, 61, 933–940.

Musayev B, Alp M, 2000, Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya.

Phu H X, 2001, Rough Convergence in Normed Linear Spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 22, 199–222.

Phu H X, 2002, Rough Continuity of Linear Operators, Numerical Functional Analysis and Optimization, 23, 139–146.

Phu H X, 2003, Rough Convergence in Infinite Dimensional Normed Spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 24, 285–301.

Šalát T, 1980, On Stistically Convergent Sequences of Real Numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139–150.

Sarabadan S, Talebi S, 2011, Statistical Convergence and Ideal Convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, 1–10.

Sharma A, Kumar K, 2008, Statistical Convergence in Probabilistic 2-normed Spaces, Mathematical Sciences, 2, 373–390.

Steinhaus H, 1951, Sur la Convergence Ordinarie et la Convergence Asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.

Şahiner A, Gürdal M, Saltan S, Gunawan H, 2007, Ideal Convergence in 2-normed Spaces, Taiwanese Journal of Mathematics, 11, 1477–1484.

Yamancı U, Gürdal M, 2014, I-statistically Pre-Cauchy Double Sequences, Global Journal of Mathematical Analysis, 2, 297–303.

Yegül S, Dündar E, 2017, On Statistical Convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, Journal of Classical Analysis, 10, 49–57.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Mukaddes ARSLAN
Doğum Yeri ve Tarihi	: Bolvadin / 1989
Yabancı Dili	: İngilizce
İletişim (Tel/e-posta)	: 05530759773 / mukad.deu@gmail.com

Eğitim Durumu

Lise	: Afyonkarahisar Anadolu Öğretmen Lisesi, (2003 - 2007)
Lisans	: Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği, (2007 - 2012)
Yüksek Lisans	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2013 - 2015)
Doktora	: Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, (2016 - 2020)

Çalıştığı Kurum(lar)	: Konya Doğanhisar Anadolu Lisesi, (2013 - 2014)
	: İhsaniye Anadolu İmam Hatip Lisesi, (2014-Devam Ediyor)

Yayınları (SCI-E, ESCI ve Diğer)

Arslan M, Dündar E, 2018, $\mathcal{I}$-convergence and $\mathcal{I}$-Cauchy Sequence of Functions in 2-normed Spaces, Konuralp Journal of Mathematics, 6, 57–62.

Arslan M, Dündar E, 2018, On $\mathcal{I}$-convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 42, 491–502. (ESCI)

Arslan M, Dündar E, 2018, Rough Convergence in 2-normed Spaces, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, 10, 1–9. (ESCI)

Arslan M, Dündar E, 2019, On Rough Convergence in 2-normed Spaces and Some Properties, Filomat, 33, 5077–5086. (SCI-E)

Dündar E, Arslan M, Yegül S, 2020, On $\mathcal{I}$-uniform Convergence of Sequences of Functions in 2-normed Spaces, Rocky Mountain Journal of Mathematics, 50, 1637–1646. (SCI-E)